Exercices de représentation des nombres

Voici deux exercices de représentation des nombres du même type (avec des nombres différents bien-sûr) que ceux que vous aurez au concours blanc.
Il y aura également des exercices similaires à ceux des deux précédents DS (DS5 et DS6).

Exercice 1.

1. Convertir en base 10 les nombres suivants :

$$a)\ \overline{33}^{4} \qquad b)\ \overline{2af}^{16} \qquad c)\ \overline{11101}^{2}$$

2. Convertir de la base 10 vers la base b les nombres suivants :
   (a) 29 avec $b = 7$.
   (b) 123 avec $b = 3$.
   (c) 1145 avec $b = 5$.
   (d) 232 avec $b = 11$.
   (e) 479 avec $b = 16$.

Correction.

1. Convertir en base 10 les nombres suivants :
   (a) On a :

$$\overline{33}^{4} = 3 \times 4^1 + 3 \times 4^0 = 15.$$

   (b) On a :

$$\overline{2af}^{16} = 2 \times 16^2 + \underbrace{a}_{=10} \times 16^1 + \underbrace{f}_{=15} \times 16^0 = 687.$$

   (c) On a :

$$\overline{11101}^{2} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 29$$

2. Convertir de la base 10 vers la base b les nombres suivants :
   (a) On a :

$$\begin{array}{ccccccc} n & = & b & \times & q & + & r \\ 29 & = & 7 & \times & 4 & + & 1 \\ 4 & = & 7 & \times & 0 & + & 4 \end{array}$$

   Puis on lit la colonne r des restes du bas vers le haut pour obtenir :

$$29 = \overline{41}^{7}.$$

(b) On a :

$$\begin{array}{rcccccc} n & = & b & \times & q & + & r \\ 123 & = & 3 & \times & 41 & + & 0 \\ 41 & = & 3 & \times & 13 & + & 2 \\ 13 & = & 3 & \times & 4 & + & 1 \\ 4 & = & 3 & \times & 1 & + & 1 \\ 1 & = & 3 & \times & 0 & + & 1 \end{array}$$

Puis on lit la colonne r des restes du bas vers le haut pour obtenir :

$$123 = \overline{11120}^{3}.$$

(c) On a :

$$\begin{array}{rcccccc} n & = & b & \times & q & + & r \\ 1145 & = & 5 & \times & 229 & + & 0 \\ 229 & = & 5 & \times & 45 & + & 4 \\ 45 & = & 5 & \times & 9 & + & 0 \\ 9 & = & 5 & \times & 1 & + & 4 \\ 1 & = & 5 & \times & 0 & + & 1 \end{array}$$

Puis on lit la colonne r des restes du bas vers le haut pour obtenir :

$$1145 = \overline{14040}^{5}.$$

(d) On a :

$$\begin{array}{rcccccc} n & = & b & \times & q & + & r \\ 232 & = & 11 & \times & 21 & + & 1 \\ 21 & = & 11 & \times & 1 & + & \underbrace{10}_{=a} \\ 1 & = & 11 & \times & 0 & + & 1 \end{array}$$

Puis on lit la colonne r des restes du bas vers le haut pour obtenir :

$$232 = \overline{1a1}^{11}.$$

(e) On a :

$$\begin{array}{rcccccc} n & = & b & \times & q & + & r \\ 479 & = & 16 & \times & 29 & + & \underbrace{15}_{=f} \\ 29 & = & 16 & \times & 1 & + & \underbrace{13}_{=d} \\ 1 & = & 16 & \times & 0 & + & 1 \end{array}$$

Puis on lit la colonne r des restes du bas vers le haut pour obtenir :

$$479 = \overline{1df}^{16}.$$

Exercice 2.

Représenter en complément à deux sur un octet les entiers relatifs suivants :

1) 32 2) 125
3) -65 4) -14

Correction.

1. On a $-2^{8-1} = -128 \leq 32 \leq 127 = 2^{8-1} - 1$, donc 32 est bien représentable en complément à deux sur 8 bits. 32 est positif et $32 = \overline{100000}^2$ donc sa représentation en complement à deux sur un octet est :

$$32 \rightsquigarrow \boxed{0\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0}$$

2. On a $-2^{8-1} = -128 \leq 125 \leq 127 = 2^{8-1} - 1$, donc 125 est bien représentable en complément à deux sur 8 bits. 125 est positif et $125 = \overline{1111101}^2$ donc sa représentation en complement à deux sur un octet est :

$$125 \rightsquigarrow \boxed{0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0\,|\,1}$$

3. On a $-2^{8-1} = -128 \leq -65 \leq 127 = 2^{8-1} - 1$, donc -65 est bien représentable en complément à deux sur 8 bits. -65 est strictement négatif et $65 = \overline{1000001}^2$ donc
   - Sur 8 bits, sa représentation binaire est :

     $$\boxed{0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1}$$

     On effectue un complément à un en inversant chaque bits :

     $$\boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0}$$

   - puis on ajoute 1 :

     $$\boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0} + 1 \rightsquigarrow \boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$$

   Donc la représentation en complément à deux de -65 sur un octet est :

   $$\boxed{1\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,1}$$

4. On a $-2^{8-1} = -128 \leq -14 \leq 127 = 2^{8-1} - 1$, donc -14 est bien représentable en complément à deux sur 8 bits. -14 est strictement négatif et $14 = \overline{1110}^2$ donc
   - Sur 8 bits, sa représentation binaire est :

     $$\boxed{0\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0}$$

     On effectue un complément à un en inversant chaque bits :

     $$\boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1}$$

   - puis on ajoute 1 :

     $$\boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,1} + 1 \rightsquigarrow \boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,0}$$

   Donc la représentation en complément à deux de -14 sur un octet est :

   $$\boxed{1\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,1\,|\,0}$$