Maths expertes// le mercredi 13 mars — Lycée Saint Charles

Interrogation écrite n° 6

NOM : ..... — **durée 45 minutes**

Calculatrice 4 opérations uniquement ; on soignera la rédaction et présentation qui comptera pour 1 po

I. exercice différencié – 3 points

Groupe Mme Beaujard- les questions sont indépendantes

1. déterminer le PGCD de 17538 et 1542 à l'aide de l'algorithme d'Euclide
2. le pgcd de deux entiers naturels non nul est 12 et le plus grand de ces deux entiers est 240. Déterminer les valeurs possibles de l'autre entier

Groupe M. Arnt-

Soit les complexes $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = -e^{\frac{i\pi}{6}}$
Mettre ces deux complexes sous forme exponentielle

II. exercices communs – 6 points

les exercices suivants sont indépendants. Dans tous les exercices, on se place dans le plan complexe rapporté au repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)orthonormé direct.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
$$|z - i| = 2$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z-2)^3 - 8 = 0$; on pourra poser $Z = \dfrac{z-2}{2}$

III problème commun – 10 points

On se place dans le plan complexe rapporté au repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)orthonormé direct.
On considère la fonction polynomiale P définie par :
$$\textit{Pour tout complexe } z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13$$

1. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$
2. Pour tout complexe z, on a l'égalité : $P(z) = (z^2+1)Q(z)$
où $Q(z)$ s'écrit sous la forme $Q(z) = z^2 + cz + d$

   Donner les valeurs de c et de d
3. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z) = 0$. Justifier le résultat.
4. En déduire l'ensemble S_2 des solutions, dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$
5. Placer sur une figure (unité graphique : le cm) les points A, C et Ω d'affixes respectives :
$$z_A = i, \qquad z_C = 3 + 2i, \qquad z_\Omega = 2,$$
6. On note Z_1, Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$
Donner les valeurs de Z_1, Z_2 et Z_3
7. En déduire les valeurs exactes des distances AC, ΩA et ΩC. Justifier les réponses
8. Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega C}$. Justifier le résultat
9. Quelle est la nature précise du triangle $A\Omega C$?

Correction

I. exercice différencié – 3 points

Groupe Mme Beaujard - les questions sont indépendantes

1. On a :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 17538 & = & 1542 & \times & 11 & + & 576 \\ 1542 & = & 576 & \times & 2 & + & 390 \\ 576 & = & 390 & \times & 1 & + & 186 \\ 390 & = & 186 & \times & 2 & + & 18 \\ 186 & = & 18 & \times & 10 & + & 6 \\ 18 & = & 6 & \times & 3 & + & 0 \end{array}$$

Le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide étant 6, le PGCD de 17538 et 1542 est donc 6.

2. On note $a \in \mathbb{N}^*$ l'entier recherché. D'après l'énoncé, on a $a \leq 240$ et $\text{pgcd}(240, a) = 12$. Par caractérisation du pgcd, il existe $a', b' \in \mathbb{N}$ tel que $a = 12a'$, $240 = 12b'$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$. On a alors $b' = 20$ et donc $a' \leq 20$ car $12a' = a \leq 240 = 12 \times 20$.
Or, la liste des nombres premiers avec 20 est : $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$; ce qui donne les seules valeurs potentielles de a'.
Par suite, comme $a = 12a'$, les seules valeurs potentielles de a sont :

$$12, 36, 84, 108, 132, 156, 204, 228.$$

Réciproquement, par la formule $\text{pgcd}(cx, xy) = c.\text{pgcd}(x, y)$, les valeurs potentielles de a vérifient toutes $\text{pgcd}(240, a) = 12$. En effet, pour $a = 12, 36, 84, 108, 132, 156, 204, 228$, on a $a = 12a'$ avec $a' = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$, valeurs toutes premières avec 20, donc :

$$\text{pgcd}(240, a) = \text{pgcd}(12 \times 20, 12a) = 12\text{pgcd}(20, a') = 12.$$

Ainsi, la liste de toutes les valeurs possibles pour a est :

$$12, 36, 84, 108, 132, 156, 204, 228.$$

Groupe M. Arnt

On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt{3} - 2i \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ z_1 &= 4e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_2 &= -e^{i\frac{i\pi}{6}} \\ &= e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)} \\ z_2 &= e^{i\frac{7\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait également écrire $-1 = e^{-i\pi}$ pour trouver $z_2 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

II. exercices communs – 6 points

1. Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$, I d'affixe i. On note $z_{\overrightarrow{IM}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{IM}$. On a $IM = \|\overrightarrow{IM}\| = |z_{\overrightarrow{IM}}| = |z - i|$.
Par suite, on a : $|z - i| = 2$ si, et seulement si, $IM = 2$ si, et seulement si, M appartient au cercle de centre I et de rayon 2.

Il en résulte que l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - i| = 2$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $Z = \dfrac{z-2}{2}$. On a :

$$\begin{array}{l} (z-2)^3 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \\ (z-2)^3 = 8 = 2^3 \\ \Leftrightarrow \\ \left(\dfrac{z-2}{2}\right)^3 = 1 \\ \Leftrightarrow \\ Z^3 = 1 \end{array}$$

Or, dans $\mathbb{C}$, les solutions de $Z^3 = 1$ sont les trois racines troisièmes de l'unité, à savoir $Z = 1, j, j^2$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Par suite, on a :

$$\begin{array}{l} (z-2)^3 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \\ Z^3 = 1 \\ \Leftrightarrow \\ Z = 1 \text{ ou } j \text{ ou } j^2 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{z-2}{2} = 1 \text{ ou } j \text{ ou } j^2 \\ \Leftrightarrow \\ z = 4 \text{ ou } 2j + 2 \text{ ou } 2j^2 + 2 \\ \Leftrightarrow \\ z = 4 \text{ ou } 2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2 \text{ ou } 2e^{i\frac{4\pi}{3}} + 2. \end{array}$$

Ainsi, les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation sont 4, $2e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2$ et $2e^{i\frac{4\pi}{3}} + 2$.

III problème commun – 10 points

1. On a :

$$\begin{array}{rcl} P(i) & = & i^4 - 6i^3 + 14i^2 - 6i + 13 \\ & = & 1 - 6 \times (-i) + 14 \times (-1) - 6i + 13 \\ & = & (1 - 14 + 13) + i(6 - 6) \\ P(i) & = & 0. \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} P(-i) & = & (-i)^4 - 6(-i)^3 + 14(-i)^2 - 6(-i) + 13 \\ & = & 1 - 6i + 14 \times (-1) - 6(-i) + 13 \\ & = & (1 - 14 + 13) + i(-6 + 6) \\ P(-i) & = & 0. \end{array}$$

Remarque : comme le polynôme P est à coefficients réels, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ et donc, on pouvait retrouver la valeur de $P(-i)$ à partir de celle de $P(i)$: $P(-i) = P(\overline{i}) = \overline{P(i)} = \overline{0} = 0$.

2. Soit $c, d \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$ avec $Q : z \mapsto z^2 + cz + d$. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 & = & P(z) \\ & = & (z^2+1)Q(z) \\ & = & (z^2+1)(z^2+cz+d) \\ & = & z^4 + cz^3 + dz^2 + z^2 + cz + d \\ z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 6z + 13 & = & z^4 + cz^3 + (d+1)z^2 + cz + d \end{array}$$

Or deux fonctions polynomiales égales sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux, d'où :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -6 = c \\ 14 = d+1 \\ -6 = c \\ 13 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ d = 13 \end{cases}$$

Par suite, $c = -6$ et $d = 13$. Ainsi, $Q : z \mapsto z^2 - 6z + 13$.

3. Le discriminant de Q est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 < 0$. Comme Q est à coefficients réels et $\Delta < 0$, il possède deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$. De plus, on a $(4i)^2 = -16 = \Delta$ donc $4i$ est une racine de Δ, d'où :

$$r = \frac{-(-6) + 4i}{2} = 3 + 2i \text{ et } \overline{r} = \overline{3+2i} = 3 - 2i.$$

Par suite, les solutions de $Q(z) = 0$ sont $3 + 2i$ et $3 - 2i$ i.e. $S_1 = \{3+2i, 3-2i\}$.

4. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ et $3+2i, 3-2i$ étant les racines du polynôme Q unitaire de degré 2, $Q(z) = (z - (3+2i))(z - (3-2i))$. Ainsi, on a :

$$P(z) = (z^2+1)Q(z) = (z-i)(z+i)(z-(3+2i))(z-(3-2i)).$$

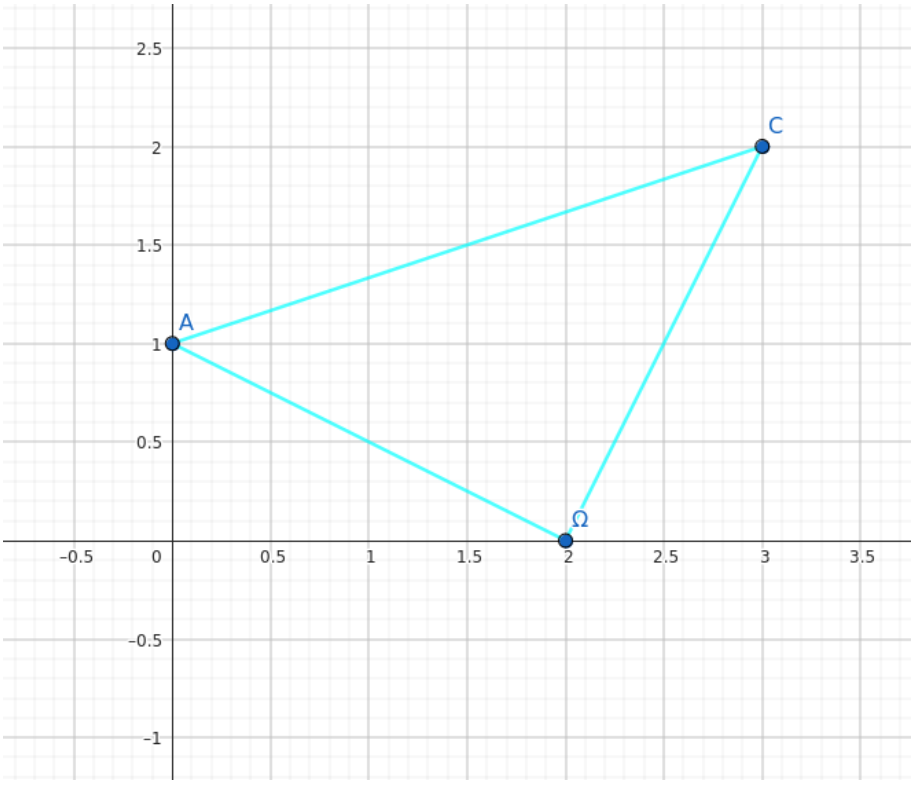
Par suite, comme dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul, on a :

$$\begin{array}{l} P(z) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ (z-i)(z+i)(z-(3+2i))(z-(3-2i)) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ z - i = 0 \text{ ou } z + i = 0 \text{ ou } z - (3+2i) = 0 \text{ ou } z - (3-2i) = 0 \\ \Leftrightarrow \\ z = i \text{ ou } z = -i \text{ ou } z = 3+2i \text{ ou } z = 3-2i. \end{array}$$

Ainsi, les solutions de $P(z) = 0$ sont $i, -i, 3+2i$ et $3-2i$ i.e. $S_2 = \{i, -i, 3+2i, 3-2i\}$.

Autre façon de raisonner : comme P est une fonction polynomiale de degré 4, elle possède au plus quatre racines distinctes. Or, i et $-i$ sont racines de P d'après la question 1. et comme, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z^2+1)Q(z)$, les racines de Q sont des racines de P et donc, d'après la question 3., $3+2i$ et $3-2i$ sont des racines de P. On a donc quatre racines distinctes de P qui en possède au plus quatre : on a ainsi la totalité des racines de P d'où $S_2 = \{i, -i, 3+2i, 3-2i\}$.

5.



6. On a :

- $Z_1 = z_C - z_A = 3 + 2i - i = 3 + i$.
- $Z_2 = z_A - z_\Omega = i - 2 = -2 + i$.
- $Z_3 = z_C - z_\Omega = 3 + 2i - 2 = 1 + 2i$.

7. Pour deux points M, N du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est d'affixe z, on a $MN = \|\overrightarrow{MN}\| = |z|$ donc :

- $AC = |Z_1| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
- $\Omega A = |Z_2| = |-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- $\Omega C = |Z_3| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

8. D'après le cours, on a :

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = \arg\left(\frac{z_A - z_\Omega}{z_C - z_\Omega}\right) = \arg\left(\frac{Z_2}{Z_3}\right) \ [2\pi].$$

Or :

$$\frac{Z_2}{Z_3} = \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{5i}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Par suite, l'angle algébrique $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C})$ vaut $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ car $\arg\left(\frac{Z_2}{Z_3}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Il en résulte que l'angle géométrique $\widehat{A\Omega C}$ vaut $\frac{\pi}{2}$ radians.

9. D'après la question 8., $A\Omega C$ est rectangle en Ω car $\widehat{A\Omega C}$ est un angle droit et d'après la question 6., il est isocèle en Ω car $\Omega A = \Omega C$.