Applications des nombres complexes

Exercice 1 – un problème avec des complexes

Objectif de l'exercice : trouver les coordonnées de points du cercle trigonométrique vérifiant des conditions particulières.

Dans tout l'exercice, on se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm).

On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Faire une figure : placer les points A et B et tracer le cercle $(\mathcal{C})$.

2. Donner la forme trigonométrique de z_{A} et celle de z_{B}.

3. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\ ;\ 2\pi]$.
On considère l'application f qui, à tout point M de $(\mathcal{C})$, associe

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB}.$$

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \sin\alpha.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(\mathrm{M}) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(\mathrm{M}) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

4. **a.** En utilisant **3 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(\mathrm{M})$ est minimal. Donner cette valeur minimale. On les notera M_1 et M_2.

b. En utilisant **3 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(\mathrm{M})$ est maximal. Donner cette valeur maximale. On le notera M_3.

c. Placer ces trois points sur la figure.

Exercice 2 – calculs avec les racines n-ièmes

Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^n - 1$ avec $n \geq 1$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Donner l'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ (sans démonstration).

2. Que vaut la somme de toutes ses racines (sans démonstration).

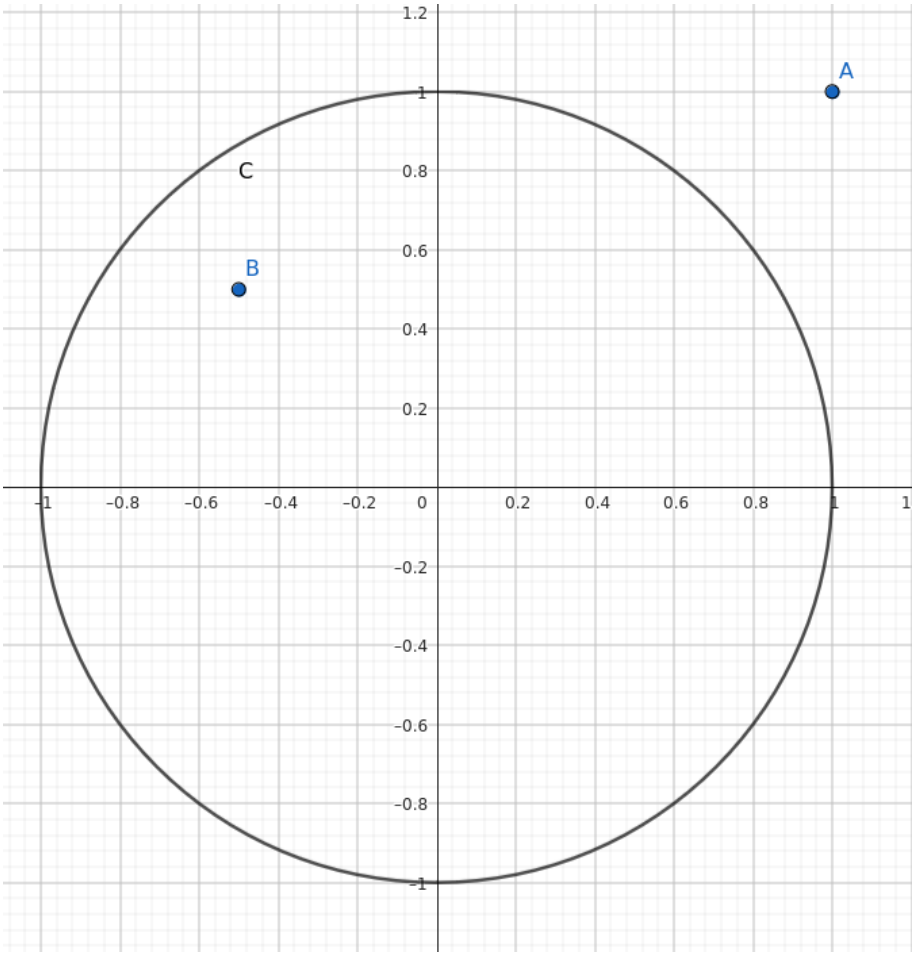
3. Calculer le produit de toutes ses racines.

4. Soit $p \geq 0$, calculer $\sum_{k=0}^{k=n-1} \omega^{pk}$ (on sera amené à discuter selon les valeurs de p).

Correction

Exercice 1 – un problème avec des complexes

1.



2. On a :

$$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$z_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

3. **a.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant la formule d'Euler $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2i}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 &= 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin(\alpha). \end{aligned}$$

b. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Comme $|\omega|.|\omega'| = |\omega.\omega'|$ pour tout

$\omega, \omega' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{M}) &= \mathrm{MA} \times \mathrm{MB} \\
&= |z_{\mathrm{A}} - z| \,.\, |z_{\mathrm{B}} - z| \\
&= |(z_{\mathrm{A}} - z)(z_{\mathrm{B}} - z)| \\
&= \left|z^2 - (z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}})z + z_{\mathrm{A}}.z_{\mathrm{B}}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + (-1)\right| \\
f(\mathrm{M}) &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|.
\end{aligned}$$

c. On a, d'après la question 3.a. :

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{M}) &= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \\
&= \left|2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin(\alpha) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| . \left|2\mathrm{i}\sin(\alpha) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\right| \\
&= 1 \times \left|-\frac{1}{2} + \left(2\sin(\alpha) - \frac{3}{2}\right)\mathrm{i}\right| \\
f(\mathrm{M}) &= \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2}.
\end{aligned}$$

4. **a.** — <u>1ère façon :</u> par encadrement.

Soit $\alpha \in [0, 2\pi]$. On a $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$, d'où $-\frac{7}{2} \leq -\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}$. Par suite, on a :

$$0 \leq \left(-\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 \leq \frac{49}{4}$$

et donc :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 \leq \frac{50}{4}.$$

Ainsi, par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$ et d'après la question 3. c. on obtient, pour M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$:

$$\frac{1}{2} \leq f(\mathrm{M}) \leq \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
& f(\mathrm{M}) = \tfrac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \left(-\tfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\tfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin(\alpha) = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

— <u>2ème façon :</u> par monotonie.

La fonction $g : t \mapsto \sqrt{\frac{1}{4} + t}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint un minimum global uniquement en $t = 0$ (minimum valant $\frac{1}{2}$).
Comme, d'après la question 3. c., on a :

$$f(\mathrm{M}) = g(t) \text{ avec } t = \left(-\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 \in \mathbb{R}_+$$

on cherche alors les valeurs de $\sin(\alpha)$ telles que $t = 0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \\ \left(-\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \\ -\frac{3}{2} + 2\sin(\alpha) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \\ \sin(\alpha) & = & \frac{3}{4}. \end{array}$$

Comme $|\cos(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$, on obtient :

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Or, M étant d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$ et donc de coordonnées $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$; la fonction f admet un minimum qui vaut $\frac{1}{2}$ sur $(\mathcal{C})$ seulement pour les points M_1, M_2 de coordonnées :

$$\mathrm{M}_1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right) \text{ et } \mathrm{M}_2 = \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

b. — <u>1ère façon :</u> par encadrement.

D'après l'inégalité $(*)$ obtenue dans la résolution de la question précédente, on a, pour M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$:

$$f(\mathrm{M}) \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
& f(\mathrm{M}) = \tfrac{5\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \\
& \tfrac{1}{4} + \left(-\tfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 = \tfrac{50}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \\
& \left(-\tfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha)\right)^2 = \tfrac{49}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \\
& -\tfrac{3}{2} + 2\sin(\alpha) = \pm\tfrac{7}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \\
& \sin(\alpha) = \tfrac{5}{2} \text{ ou } \sin(\alpha) = -1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{ car } \sin(\alpha) \in [-1, 1] \text{ et } \tfrac{5}{2} > 1 \\
& \sin(\alpha) = -1 \\
\Leftrightarrow\ & \text{ car } \alpha \in [0, 2\pi] \\
& \alpha = \tfrac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

— <u>2ème façon :</u> par monotonie.
La fonction $h : x \mapsto (-\frac{3}{2} + 2x)^2$ est strictement décroissante sur $[-1, \frac{3}{4}]$ donc sa valeur maximale sur cet intervalle est atteinte en -1 uniquement et vaut $h(-1) = \frac{49}{4}$. Cette fonction est strictement croissante sur $[\frac{3}{4}, 1]$ donc sa valeur maximale sur cet intervalle est atteint en 1 et vaut $h(1) = \frac{1}{4} < \frac{49}{4}$. Par suite, h admet un maximum sur $[-1, 1]$ atteint uniquement en -1.
De plus, h est à valeurs positives et la fonction g de la question précédente est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $g \circ h$ admet un maximum $[-1, 1]$ uniquement en $x = -1$ qui vaut $g \circ h(-1) = \sqrt{\frac{1}{4} + (-\frac{3}{2} - 2)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
D'après la question 3. c., on a :

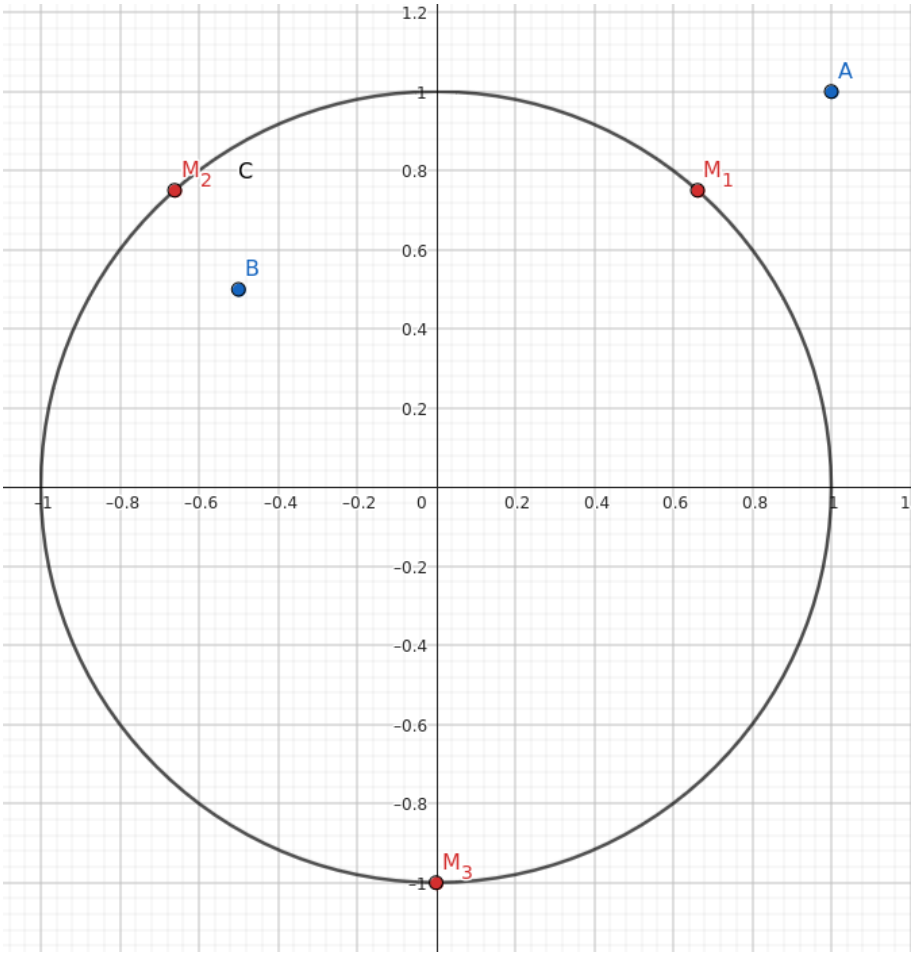
$$f(\mathrm{M}) = g \circ h(x) \text{ avec } x = \sin(\alpha) \in [-1, 1].$$

Comme $\alpha \in [0, 2\pi]$, on a : $x = -1$ si, et seulement si, $\sin(\alpha) = -1$ si, et seulement si, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Or, M étant d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)$ et donc de coordonnées $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$; la fonction f admet un maximum qui vaut $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ sur $(\mathcal{C})$ uniquement pour le point M_3 de coordonnées :

$$\mathrm{M}_3 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0, -1).$$

c.



Exercice 2 – calculs avec les racines n-ièmes

1. On a $P(z) = 0$ si, et seulement si, $z^n = 1$. Il s'agit des racines n-ièmes de l'unité i.e.

$$P(z) = 0 \text{ si et seulement si, } z \in \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ \omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

2. La somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

3. On note p_n ce produit. On peut procéder de deux manières :

1) *Avec la formule du produit de puissances d'un nombre et la formule de la somme des premiers entiers naturels*

— Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, donc, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout $\theta_0, ..., \theta_{n-1}$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\theta_i} = e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\theta_i} \quad (\star)$$

et on en déduit également que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^N = e^{iN\theta} \quad (\star\star)$$

— Pour $S = \sum_{k=0}^{n-1} k$, on a :

$$\begin{aligned}
2S &= 2 \times (0 + 1 + ... + (n-2) + (n-1)) \\
&= (0 + 1 + ... + (n-2) + (n-1)) + ((n-1) + (n-2) + ... + 1 + 0) \\
&= (0 + n - 1) + (1 + n - 2) + ... + (n - 2 + 1) + (n - 1 + 0) \\
&= \underbrace{(n-1) + (n-1) + ... + (n-1) + (n-1)}_{n \text{ termes}} \\
2S &= n(n-1)
\end{aligned}$$

D'où $S = \dfrac{n(n-1)}{2}$ $(\star\star\star)$.

Plus rigoureusement : par changement d'indices $p = n - 1 - k$ dans la somme $\sum_{k=0}^{n-1} k$, on a $S = \sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{p=0}^{n-1}(n-1-p)$ et donc :

$$\begin{aligned}
2S &= S + S \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{p=0}^{n-1}(n-1-p) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1}(n-1-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k + n - 1 - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-1) \\
2S &= n(n-1)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
p_n &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&= e^{i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k\pi}{n}} \text{ d'après } (\star) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k} \text{ par factorisation} \\
&= e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} \text{ d'après } (\star\star\star) \\
&= e^{i(n-1)\pi} \text{ par simplification} \\
&= \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} \text{ d'après } (\star\star) \\
p_n &= (-1)^{n-1} \text{ car } e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1.
\end{aligned}$$

2) *En regroupant par produits qui valent* 1.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\omega^k.\omega^{n-k} = \omega^n = e^{i2\pi} = 1.$$

Ainsi, dans le produit p_n, on va regrouper les ω^k avec les ω^{n-k} !

- Si $n = 2q$ est pair avec $q \in \mathbb{N}^*$, alors on a $k \in [\![q+1, n-1]\!]$ si, et seulement si, $n-k \in [\![1, q-1]\!]$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}
p_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k \\
&= \omega^0 \times \prod_{k=1}^{q-1} \omega^k \times \omega^q \times \prod_{k=q+1}^{n-1} \omega^k \\
&= \omega^0 \times \prod_{k=1}^{q-1} \omega^k \times \omega^q \times \prod_{k=1}^{q-1} \omega^{n-k} \\
&= \underbrace{\omega^0}_{=1} \times \prod_{k=1}^{q-1} \underbrace{(\omega^k.\omega^{n-k})}_{=1} \times \underbrace{\omega^q}_{=-1} \\
p_n &= -1.
\end{aligned}$$

- Si $n = 2q+1$ est impair avec $q \in \mathbb{N}$, alors on a $k \in [\![q+1, n-1]\!]$ si, et seulement si, $n-k \in [\![1, q]\!]$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}
p_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k \\
&= \omega^0 \times \prod_{k=1}^{q} \omega^k \times \prod_{k=q+1}^{n-1} \omega^k \\
&= \omega^0 \times \prod_{k=1}^{q} \omega^k \times \prod_{k=1}^{q} \omega^{n-k} \\
&= \underbrace{\omega^0}_{=1} \times \prod_{k=1}^{q} \underbrace{(\omega^k.\omega^{n-k})}_{=1} \\
p_n &= 1.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $p_n = (-1)^{n-1}$.

Par suite, le produit des racines n-ièmes de l'unité vaut $(-1)^{n-1}$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note S_p la somme à calculer. Comme $\omega^{pk} = (\omega^p)^k$, on reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison ω^p et de premier terme 1.
Déterminons une formule pour exprimer cette somme. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} \\
&= (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n) - (z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + z^n + z^{n+1}) \\
(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k &= 1 - z^n.
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (**).$$

De plus, on a $z = \omega^p = 1$ si, et seulement si, n divise p. En effet, si $n|p$, alors $p = nq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et ainsi :

$$\omega^p = (\omega^n)^q = (e^{2i\pi})^q = 1^q = 1;$$

et réciproquement, si $\omega^p = 1$, $e^{i\frac{2p\pi}{n}} = 1 = e^{i0}$ d'où $\frac{2p\pi}{n} = 0\ [2\pi]$ i.e. il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{2p\pi}{n} = 2q\pi$ et donc $p = nq$. D'où $n|p$.

Ainsi, on a donc les deux cas suivants :

— <u>1er cas :</u> si $n|p$, alors $\omega^p = 1$ et donc :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

— <u>2ème cas :</u> si $n \not| p$, alors $\omega^p \neq 1$ et donc, d'après la formule $(**)$:

$$S_p = \frac{1-(\omega^p)^n}{1-\omega^p} = \frac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^p} = \frac{1-1^n}{1-\omega^p} = 0.$$