Chapitre IV

Géométrie et nombres complexes

Table des matières

Partie A : Applications des nombres complexes à la géométrie **2**
1. Interprétation géométrique des complexes de la forme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ 2
2. Géométrie et nombres complexes 2
3. Exercices 4

Partie B : Racines de l'unité **5**
1. Le cercle unité 5
2. Les racines n-ièmes de l'unité 6
3. Exercices 8

Partie A

Applications des nombres complexes à la géométrie

1. Interprétation géométrique des complexes de la forme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

a. Module de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Proposition 1.

Soit A, B, C des points du plans complexes d'affixes respectives z_A, z_B, z_C avec A et B distincts. Alors :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}.$$

b. Argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Proposition 2.

Soit A, B, C des points du plans complexes d'affixes respectives z_A, z_B, z_C avec A, B et C distincts. Alors :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi].$$

c. Exercices

Exercice 1.

8,9,11 p105 et 26,27,28 p106

Exercices résolus 1 et 2 p97

2. Géométrie et nombres complexes

Proposition 3. *Colinéarité*

Soit $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ des vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 avec $\overrightarrow{w_1} \neq \overrightarrow{0}$. Alors :

les vecteurs $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Exercice 2.

1. Démontrer la proposition précédente.
2. Soit A, B, C, D des points tous distincts du plan complexe d'affixe respectives z_A, z_B, z_C, z_D. Donner des conditions nécessaires et suffisantes en terme d'affixe pour :
   (a) les points A, B et C sont alignés.
   (b) $ABCD$ est un trapèze.
   (c) $ABCD$ est un parallèlogramme. Puis en déduire que les diagonales d'un parallèlogramme se croisent en leur milieux.

Proposition 4. *Cercle*

Soit C un point du plan complexe d'affixe z_0 et $R \geq 0$. Alors :

$M(z)$ est sur le cercle de centre C et de rayon R si, et seulement si, $|z - z_0| = R$.

Exercice 3.

1. Démontrer la proposition précédente.
2. En s'aidant d'une representation graphique, conjecturer les solutions du système $\begin{cases} |z-1| = \sqrt{2} \\ |z+1| = \sqrt{2} \end{cases}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ puis le résoudre.

Proposition 5. *Produit scalaire*

Soit $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ des vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2. Alors :

— $$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} = \frac{1}{2}(z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2)$$

— Les vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux si, et seulement si,

$$z_1.\overline{z_2} \text{ est imaginaire pur.}$$

Exercice 4.

1. Démontrer la proposition précédente.
2. Soit A, B, C, D des points du plan complexe d'affixe respectives z_A, z_B, z_C, z_D. Donner une condition nécessaire et suffisante en terme d'affixe pour $ABCD$ est un rectangle.

3. Exercices

Exercice 5.

17,18 p105 ; 49,53,55,57 p108 et 64 p110

Partie B

Racines de l'unité

1. Le cercle unité

Définition 1.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 i.e.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

On appelle **cercle unité** l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe est dans $\mathbb{U}$.

Proposition 6.

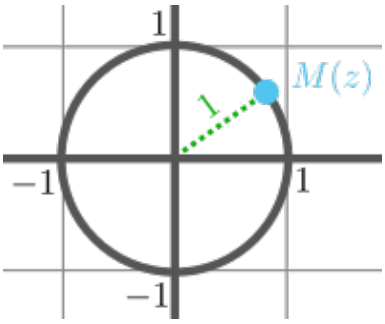
Le cercle unité est le cercle de centre O et de rayon 1 du plan complexe.

Démonstration.

Pour tout $M(z)$ du plan complexe, on a :

$$\begin{gathered} M(z) \text{ appartient au cercle unité} \\ \Leftrightarrow \\ z \in \mathbb{U} \\ \Leftrightarrow \\ |z| = 1 \\ \Leftrightarrow \\ |z - 0| = 1 \\ \Leftrightarrow \\ OM = 1 \\ \Leftrightarrow \\ M(z) \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1. \end{gathered}$$

□



Proposition 7.

Pour tous $z, z' \in \mathbb{U}$, $-z$, $\overline{z}$, zz' et $\frac{z}{z'}$ appartient à $\mathbb{U}$.

Démonstration.

Comme $z, z' \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$ et $|z'| = 1$. Ainsi, on a, d'après les propriétés du module :

$$|-z| = |z| = 1 \text{ et } |\overline{z}| = |z| = 1$$

$$|zz'| = |z|.|z'| = 1 \times 1 = 1 \text{ et } \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Par suite, $-z$, $\overline{z}$, zz' et $\frac{z}{z'}$ appartient à $\mathbb{U}$. □

Proposition 8.

On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$.

Démonstration.

On note $\mathbb{U}' = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. On procède par double inclusion :

— Montrons que $\mathbb{U}' \subset \mathbb{U}$. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi,

$$|z| = |e^{i\theta}| = 1$$

donc $z \in \mathbb{U}$.
Il en résulte que $\mathbb{U}' \subset \mathbb{U}$.

— Montrons que $\mathbb{U} \subset \mathbb{U}'$. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $|z| = 1$ d'où $z \neq 0$ et ainsi, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que z s'écrit sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. Or $r = |z| = 1$, donc $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
Il en résulte que $\mathbb{U}' \subset \mathbb{U}$.

Par suite, $\mathbb{U} = \mathbb{U}'$. □

2. Les racines n-ièmes de l'unité

Définition 2. *Racines n-ièmes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racines n-ièmes de l'unités** les solutions de l'équation $z^n = 1$
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité i.e.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Proposition 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ i.e. les racines n-ièmes de l'unité sont de module 1.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $z^n = 1$. On a alors :

$$|z|^n = |z^n| = |1| = 1$$

Comme $|z|$ est un réel positif, on a alors $|z| = 1$ car l'équation $x^n = 1$ a 1 pour unique solution dans $\mathbb{R}_+$. Par suite, $z \in \mathbb{U}$.
Il en résulte que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. □

Proposition 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

En particulier, $\mathbb{U}_n$ possède exactement n éléments.

Démonstration.

On note $\mathbb{U}'_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Montrons que $\mathbb{U}'_n = \mathbb{U}_n$. On procède par double inclusion :

— Montrons que $\mathbb{U}'_n \subset \mathbb{U}_n$. Soit $z \in \mathbb{U}'_n$. Alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]\}$ tel que $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Ainsi, on a :

$$z^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{ni\frac{2k\pi}{n}} = e^{i2k\pi} = 1.$$

Donc z appartient à $\mathbb{U}_n$. D'où $\mathbb{U}'_n \subset \mathbb{U}_n$.

— Montrons que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}'_n$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. D'après la proposition précédente, $z \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
Comme $z \in \mathbb{U}_n$, on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n = z^n = 1$; or $e^{i\alpha} = 1$ si, et seulement si, $\alpha = 0[2\pi]$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n\theta = 2k\pi \text{ i.e. } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

On note r le reste de la division euclidienne de k par n. Alors $r \in [\![0, n-1]\!]$ et il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = nq + r$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ &= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{2(nq+r)\pi}{n}} \\ &= e^{\left(i2q\pi + i\frac{2r\pi}{n}\right)} \\ &= \underbrace{e^{i2q\pi}}_{=1} e^{i\frac{2r\pi}{n}} \\ z &= e^{i\frac{2r\pi}{n}} \end{aligned}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{U}'_n$. $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}'_n$.

Il en résulte que $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}'_n$. □

Exercice 6.

Décrire $\mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$; placer les points correspondants dans le plan complexe et relier les points successifs. Que conjecture-t-on quand au cas de $\mathbb{U}_n$ pour $n \geq 3$?

Proposition 11.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Les points du plan complexe dont les affixes sont dans $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygône régulier convexe à n sommets.

Exercice 7.

Programmer une fonction `polygone(n)` en Python qui permet de tracer un polygône régulier convexe à `n` sommets.
On pourra utiliser les modules `matplotlib.pyplot` pour le tracé et `numpy` ou `math` pour les fonctions sin, cos et une approximation de π.

3. Exercices

Exercice 8.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Que vaut la somme des racines n-ième de l'unité ?

Exercice 9. *cosinus et sinus de $\frac{\pi}{5}$*

1. Montrer, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $z_1, ...z_n \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(z_k\right) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\left(z_k\right)$$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = 0$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = -1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

4. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 10.

Exercices 31, 34 et 46 p107