Chapitre III

Équations polynomiales de la variable complexe.

Table des matières

Partie A : Équations polynomiales du second degré **2**
1. Équation $z^2 = z_0$ 2
2. Équations polynomiales du second degré 3

Partie B : Formule du binôme de Newton **4**
1. Triangle de Pascal et formule du binôme de Newton 4
2. Exercices 7

Partie C : Factorisation des fonctions polynomiales **8**
1. Définitions et premières propriétés 9
2. Racines et factorisation d'une fonction polynomiale 9
3. Degré et racines 11
4. Exercices 11

Partie A

Équations polynomiales du second degré

1. Équation $z^2 = z_0$

Proposition 1.

Soit z_0 un nombre complexe. On considère l'équation de la variable complexe z :

$$z^2 = z_0$$

— Si $z_0 = 0$, alors l'équation admet pour unique solution $z = 0$.
— Si $z_0 \neq 0$ et si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ est sa forme exponentielle, les solutions de l'équation sont :

$$z = \sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}} \text{ et } z = -\sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}}$$

Correction.

— si $z_0 = 0$, comme un produit de nombre complexe nul implique qu'un des facteur est nul, on a $z^2 = 0$ implique $z = 0$.
— On suppose $z_0 \neq 0$ et on considère sa forme exponentielle $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. On a :

$$\left(\pm\sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}}\right)^2 = (\pm 1)^2 \sqrt{r_0}^2 \left(e^{i\frac{\theta_0}{2}}\right)^2 = r_0 e^{i\theta} = z_0$$

donc $\pm\sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}}$ sont solutions de l'équation.
De plus, si z est solution de $z^2 = z_0$, alors :

$$|z|^2 = |z^2| = |z_0| = r_0 \text{ et } 2\arg(z) = \arg(z^2) = \arg(z_0) = \theta_0 \ [2\pi].$$

Ainsi, $|z| = \sqrt{r_0} \neq 0$ et $\arg(z) = \frac{\theta_0}{2} \ [\pi]$; donc z est non nul et de forme géométrique $z = \sqrt{r_0} e^{i(\frac{\theta_0}{2} + k\pi)}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Or, pour $k \in \mathbb{Z}$, $e^{ik\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k = \pm 1$, et ainsi, $z = \pm\sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}}$ est une des deux solutions décrites initialement.

Il en résulte que les deux solutions trouvées sont les seules solutions de l'équation.

Remarque 1.

On remarque que si on trouve une solution δ de l'équation $z^2 = z_0$ avec $z_0 \neq 0$ alors les solutions sont $z = \delta$ et $z = -\delta$.

Corollaire 1.

Soit a un réel non nul. L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions :

$$z = \pm\sqrt{a} \text{ si } a > 0 \quad \text{et} \quad z = \pm i\sqrt{-a} \text{ si } a < 0$$

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes et donner la forme algébrique des solutions :

1. $z^2 = 16$
2. $z^2 = -4$
3. $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Correction.

1. $16 = (\pm 4)^2$ donc les solutions sont $z = 4$ et $z = -4$
2. $$-4 = 4e^{i\pi} = \left(\pm 2e^{i\frac{pi}{2}}\right)^2 = (\pm 2i)^2.$$
   donc les solutions sont $z = 2i$ et $z = -2i$
3. On a
   $$2 - 2i\sqrt{3} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(\pm 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \left(\pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right)^2$$
   donc les solutions sont $z = \sqrt{3} - i$ et $z = -\sqrt{3} + i$

2. Équations polynomiales du second degré

Définition 1.

Soit a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$ et la fonction polynomiale $p : z \mapsto az^2 + bz + c$. On appelle **discriminant** de p et on note Δ le nombre complexe :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 1.

Soit a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et on note Δ le discriminant de la fonction polynomiale associée.

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet pour unique solution $z = \dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta \neq 0$ et δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors l'équation admet deux solutions distinctes :

$$z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Correction.

On remarque que $z^2 + \frac{b}{a}z$ est le "début du carré" $(z + \frac{b}{2a})^2$ (il manque donc le terme $\frac{b^2}{4a^2}$) ; ainsi, on a :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

On pose $z' = z + \frac{b}{2a}$. Ainsi, $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si,

$$z'^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \ (*)$$

— Si $\Delta = 0$, alors $z' = 0$ est l'unique solution de $(*)$ et donc $z + \frac{b}{2a} = 0$ i.e. $z = -\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta \neq 0$ et δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les solutions de $(*)$ sont $z' = \frac{\delta}{2a}$ et $z' = -\frac{\delta}{2a}$. Ainsi :

$$z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Théorème 2.

Soit a, b, c des nombres **réels** tels que $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et on note Δ le discriminant de la fonction polynomiale associée.

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle $z = \dfrac{-b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (et donc non réelles) :

$$z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercice 2.

Exercices 3, 9, 10, 11, 12 p84

Exercices résolus 1 et 2 p77

Partie B

Formule du binôme de Newton

1. Triangle de Pascal et formule du binôme de Newton

Lemme 1. *Formule du triangle de Pascal*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

□

Théorème 3. *Formule du Binôme de Newton*

Soit $x, y \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration.

Soit $x, y \in \mathbb{C}$. Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$"$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$" est vraie.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a :
  — $(x+y)^0 = 1$ et ;

— $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^k y^{0-k} = \binom{0}{0}x^0y^0 = 1\times 1\times 1 = 1.$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

- **<u>Hérédité :</u>** Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) \text{ par H.R.} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $k' = k-1$ dans la première somme

$$= \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}x^{k'}y^{n-(k'-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}$$

k' étant une variable muette, on la renomme k

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}$$

On "élague" les termes $n+1$ et 0 des deux sommes pour pouvoir les réunir

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}x^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}$$

Une fois les sommes réunies, on utilise la formule du triangle de Pascal

$$= \underbrace{1}_{=\binom{n+1}{0}}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}}x^k y^{n+1-k} + \underbrace{1}_{\binom{n+1}{n+1}}x^{n+1}$$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

Il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

□

Moyen mnémotechnique pour la formule du binôme :
On veut développer $(x+y)^n$.

— On commence par calculer les binômes $\binom{n}{k}$ grâce au triangle de Pascal jusqu'à sa n ième ligne (obtenue à partir de la formule du triangle).

— On fait la somme des $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ de la façon suivante :

- On commence par le terme en $k=0$,

$$\binom{n}{0}x^0 y^n$$

- Puis, pour le terme suivant, on se met en tête la rengaine **"on augmente de 1 la puissance de x et on diminue de 1 la puissance de y"**, ce qui donne $x^1 y^{n-1}$. Puis on multiplie par le binôme correspondant (ici $\binom{n}{1}$), ce qui donne :

$$\binom{n}{1}x^1 y^{n-1}$$

- Et on continue : **"on augmente de 1 la puissance de x et on diminue de 1 la puissance de y"**, ce qui donne $x^2 y^{n-2}$ puis

$$\binom{n}{2}x^2 y^{n-2}$$

- Etc.. $x^3 y^{n-3}$, $x^3 y^{n-3}$, ...

2. Exercices

Exercice 3.

Déterminer la forme algébrique de $(-1+2i)^4$.

Correction.

On a, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(-1+2i)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k (2i)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0}(-1)^0(2i)^4 + \binom{4}{1}(-1)^1(2i)^3 + \binom{4}{2}(-1)^2(2i)^2 + \binom{4}{3}(-1)^3(2i)^1 \\
&= +\binom{4}{4}(-1)^4(2i)^0 \\
&= 1 \times 1 \times \underbrace{2^4}_{=16} \underbrace{i^4}_{=(-1)^2} + 4 \times (-1) \times \underbrace{2^3}_{=8} \underbrace{i^3}_{=(-1)i} + 6 \times 1 \times \underbrace{2^2}_{=4} \underbrace{i^2}_{=(-1)} \\
&= +4 \times (-1) \times 2i + 1 \times 1 \times 1 \\
&= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 \\
(-1+2i)^4 &= -7 + 24i
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Faire les exercices 54, 55 et 58 p21

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble avec n éléments. Combien y a t-il de sous-ensembles de E ?

Correction.

On note S le nombre de sous-ensembles de E.
On dénombre les sous-ensembles de E selon leur nombre d'éléments. Pour k entre 0 et n, on "fabrique" un sous-ensemble de E à k éléments en choisissant k éléments de E parmi les n qu'il contient : il y a donc en tout $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E avec exactement k élements.

On somme alors le nombre de sous-ensembles à k éléments pour k allant de 0 jusqu'à n (en effet, les sous-ensembles de E ont entre 0 et n éléments) pour obtenir S :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Or, pour tout k, $1 = (1)^k$ et $1 = (-1)^{n-k}$, donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (-1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Il y a donc 2^n sous-ensembles de E.

Partie C

Factorisation des fonctions polynomiales

1. Définitions et premières propriétés

Définition 2.

Soit $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que p est une **fonction polynomiale** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n$ des nombres complexes tels que, pour $z \in C$:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

Dans ce cas, les nombres a_k sont appelés les **coefficients** de p. Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** de p et on note $\deg(p) = n$.
On convient que la fonction nulle est de degré $-\infty$.

Proposition 2.

Soit p une fonction polynomiale. Alors p est la fonction nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Corollaire 2.

Soit p, q des fonctions polynomiales.
- $p = q$ si, et seulement si, p et q ont les mêmes coefficients.
- si $p = q$ alors $\deg(p) = \deg(q)$.

Définition 3.

Soit p une fonction polynomiale et $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est une racine de p si $p(z_0) = 0$.

Exemple 1.

On considère la fonction $p : z \mapsto z^2 + 1$.
- p est une fonction polynomiale de degré 2 dont les coefficients sont $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.
- i et $-i$ sont des racines de p.

2. Racines et factorisation d'une fonction polynomiale

Proposition 3.

Soit z, z_0 des nombres complexes et n un entier non nul. On a :

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}.$$

Théorème 4.

Soit p une fonction polynomiale et z_0 un nombre complexe. Alors z_0 est racine de p si, et seulement si, il existe une fonction polynomiale q tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) = (z - z_0)q(z).$$

Correction.

Comme p est une fonction polynomiale, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que $p : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

($\Rightarrow$) On suppose que z_0 est racine de p i.e. $p(z_0) = 0$. Par suite, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
p(z) &= p(z) - p(z_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(z^k - z_0^k\right) \\
&\text{comme } z^0 = 1 = z_0^0 \text{ le terme } k = 0 \text{ est nul ;} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^k - z_0^k\right) \\
&\text{donc d'après la proposition précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (z - z_0) \left(\sum_{i=0}^{k-1} z^i z_0^{k-1-i}\right) \\
&= (z - z_0) \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} z^i z_0^{k-1-i}\right) \\
&= (z - z_0)q(z)
\end{aligned}$$

où $q(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} z^i z_0^{k-1-i}\right)$. Comme $q(z)$ s'écrit comme une somme de "$\alpha z^?$", q est une fonction polynomiale (on pourrait réarranger les termes pour prouver que c'est

le cas ou montrer qu'une combinaison linéaire de fonctions polynomiale est une fonction polynomiale mais nous n'allons pas aloudir notre propos).

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe une fonction polynomiale q tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Ceci étant vrai pour $z = z_0$, on a :

$$p(z_0) = (z_0 - z_0)q(z_0) = 0 \times q(z_0) = 0,$$

donc z_0 est racine de p.

Exercice 6.

On considère $p : z \mapsto z^3 - 2z^2 + z - 2$. Chercher une racine évidente de p puis factoriser p en produit de fonction polynomiale de degré 1.

Proposition 4. *Factorisation d'une fonction polynomiale du second degré*

Soit $p : z \mapsto az^2 + bz + c$ une fonction polynomiale du second degré i.e. $a \neq 0$. Si z_1, z_2 sont les racines de p (avec $z_1 = z_2$ si, et seulement si $\Delta = 0$), alors :

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

3. Degré et racines

Théorème 5.

Soit n un entier naturel. Si p est une fonction polynomiale de degré n alors p admet au plus n racines.

Corollaire 3.

Soit n, k des entiers naturels et p une fonction polynomiale tel que $\deg(p) \leq n$. Si p admet k racines avec $k > n$ alors p est égal à la fonction nulle.

Théorème 6. *Théorème de D'Alembert-Gauss (Hors Programme)*

Si p est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $\deg(p) \geq 1$ alors p admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque 2.

Ce théorème n'est pas valable dans $\mathbb{R}$: la fonction polynomiale $p : x \mapsto x^2 + 1$ de degré 2 n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$

4. Exercices

Exercice 7.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $z^n - 1$ par $z - 1$.
2. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ si $|z| < 1$.

Exercice 8.

Exercices 32,35,36 p86

Exercices résolus 1 et 2 p79

Exercice 9.

Exercices 62, 63 p88