

Feuille d'exercices n°5

Exercices obligatoires : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 8 ; 10

1. Exercices importants**Exercice 1.**

1. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $m|n$ (m divise n) si, et seulement si $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.
2. a) Décrire les ensembles $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z}$;
b) Plus généralement, caractériser le sous-groupe $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$.
 - a) Montrer que
$$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{nu + mv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$
est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$;
 - b) Caractériser ce sous-groupe.

Exercice 2. Théorème de LagrangeSoit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah; h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. Soient $a, b \in G$. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.
3. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G .

2. Exercices basiques**a. Ordre d'un élément dans un groupe****Exercice 3.**Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?**Exercice 4.**Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre n . Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 5.

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

3. Exercices d'entraînement**a. Ordre d'un élément dans un groupe****Exercice 6.**

Soit G un groupe de cardinal $2n$.

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

est une relation d'équivalence sur G .

2. En déduire que G admet des éléments d'ordre deux.

Exercice 7.

Soient G et H deux groupes.

1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H , alors (g, h) est d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

Exercice 8.

Soit G un groupe admettant un nombre fini de sous-groupes.

1. Démontrer que tout élément de G est d'ordre fini.
2. En déduire que G est fini.

Exercice 9.

Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G .
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous groupe $\langle a \rangle$ engendré par a .
3. Déterminer un ensemble minimal de générateurs de $(G, \cdot)$.
4. $(G, \cdot)$ est-il un groupe cyclique ?
5. Déterminer tous les sous-groupes de G et, pour chaque sous-groupe, préciser un ensemble de générateurs.
6. Parmi les sous-groupes de $(G, \cdot)$, lesquels sont isomorphes à un groupe additif $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

4. Exercices d'approfondissement

a. Ordre d'un élément dans un groupe

Exercice 10.

Soit G un groupe abélien, x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q .

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Démontrer que xy est d'ordre pq .
2. Importance des hypothèses - 1 : Si $H = GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifier que A et B sont d'ordre fini, mais que AB n'est pas d'ordre fini.
3. Importance des hypothèses - 2 : Si p et q ne sont pas supposés premiers entre eux, démontrer que le produit xy n'est pas nécessairement d'ordre pq , ou d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
4. Une application :
 - (a) Soit d un diviseur de p . Démontrer qu'il existe un élément d'ordre d dans G .
 - (b) En déduire que G admet des éléments d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
 - (c) On suppose de plus que G est fini. Démontrer que G admet un élément dont l'ordre est le ppcm de l'ordre des éléments de G .

Exercice 11.

Soit G un groupe cyclique et soit H un sous-groupe de G . Démontrer que H est cyclique.

Exercice 12.

1. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G d'ordre des entiers premiers. Démontrer que $H = K$ ou que $H \cap K = \{e\}$.
2. Démontrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.