

## Feuille d'exercices n°19

**1. Endomorphismes des espaces euclidiens****a. Endomorphismes autoadjoints / Matrices symétriques réelles****Exercice 1.**

Justifier que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, et trouver  $P \in O_3(\mathbb{R})$  tel que  $P^T A P$  soit diagonale.

**Exercice 2.**

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, et soient  $u, v$  deux endomorphismes autoadjoints de  $E$ .

1. Démontrer que  $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = E$ .
2. Démontrer que  $u \circ v$  est autoadjoint si et seulement si  $u \circ v = v \circ u$ .

**Exercice 4.**

Déterminer les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

**Exercice 5.**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ ,  $a$  un vecteur unitaire de  $E$  et  $\lambda$  un réel.

1. Démontrer que

$$f(x) = x + \lambda \langle x, a \rangle a$$

définit un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

2. Déterminer les valeurs propres de  $f$  et les sous-espaces propres correspondants.

**Exercice 6.**

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$  vérifiant, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle = 0$ . Que dire de  $u$  ?

**Exercice 7.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique. On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ . Que vaut  $A$  ?

**Exercice 8.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Est-ce que la matrice  $A + iI_n$  est inversible ?

**Exercice 9.**

Soit  $u : E \rightarrow E$  tel que, pour tous  $x, y \in E$ , on a  $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ . Démontrer que  $u$  est linéaire.

**Exercice 10.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$  et soient  $(e_i)$ ,  $(f_j)$  deux bases orthonormales de  $E$ .

1. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u(f_i)\|^2.$$

2. Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique réelle, et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres. Démontrer que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

**Exercice 11.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Soit  $(u, v)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  défini par

$$f(x) = \langle u, x \rangle u - \langle v, x \rangle v.$$

1. Démontrer que  $f$  est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
3. Déterminer les valeurs propres de  $f$  ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

**Exercice 12.**

Soit  $H$  la matrice  $H = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,\dots,n}$ , et soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Exprimer  $\langle HX, X \rangle$  à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que  $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2} dx$ ).
2. En déduire que la matrice  $H$  est définie positive.

**Exercice 13.**

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 14.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme autoadjoint  $u \in S(E)$  est dit *positif* si pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(u(x), x) \geq 0$ . Il est dit *défini positif* si pour tout  $x$  de  $E$  non nul,  $(u(x), x) > 0$ . On notera  $S^+(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, et  $S^{++}(E)$  l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

1. Soit  $u \in S(E)$ . Montrer que  $u$  appartient à  $S^+(E)$  si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de  $u \in S(E)$  pour que  $u \in S^{++}(E)$ .
2. Soit  $u \in S^+(E)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres (distinctes), et  $E_i = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ . On définit  $v_i$  par  $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$  si  $x \in E_i$ , et  $v_i(x) = 0$  si  $x \in E_i^\perp$ . On note enfin  $v = v_1 + \dots + v_p$ . Justifier que  $v^2 = v \circ v = u$ , et que  $v$  est positif.
3. Soit  $w$  un autre élément de  $S^+(E)$  tel que  $w^2 = u$ .
  - (a) Montrer que  $wu = uw$ .
  - (b) En déduire que  $w(E_i) \subset E_i$ .
  - (c) Soit  $w_i$  l'endomorphisme induit par  $w$  sur  $E_i$ . Vérifier que  $w_i$  est autoadjoint positif, puis diagonaliser  $w_i$ .
  - (d) En déduire que  $w = v$ .
4. Soit  $f \in GL(E)$ .
  - (a) Montrer que  $f \circ f^* \in S^{++}(E)$ .
  - (b) Montrer qu'il existe un unique couple  $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$  tel que  $f = h \circ g$ . Cette factorisation s'appelle décomposition polaire de  $f$ .

**b. Isométries vectorielles / Matrices orthogonales****Exercice 15.**

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

**Exercice 16.**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ . On considère l'endomorphisme de  $E$  défini par  $\phi(P)(X) = P(-X)$ . Démontrer que  $\phi$  est une symétrie orthogonale.

**Exercice 17.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, et  $a \in E \setminus \{0\}$ . On pose

$$s_a(x) = x - 2 \frac{(a, x)}{(a, a)} a,$$

Montrer  $s_a$  est une isométrie vectorielle. Calculer  $\ker(s_a - id)$ ,  $\ker(s_a + id)$ . Décrire alors géométriquement  $s_a$ .

**Exercice 18.**

On considère la matrice  $M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $M$  est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que  $M$  est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

**Exercice 19.**

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 20.**

Caractériser l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 21.**

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $S = a + b + c$  et  $\sigma = ab + bc + ca$ , et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que  $M \in O_3(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\sigma = 0$  et  $S = \pm 1$ .
2. Démontrer que  $M \in SO_3(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\sigma = 0$  et  $S = 1$ .

#### Exercice 22.

Soient  $E$  un plan euclidien orienté,  $r$  une rotation de  $E$  et  $s$  une symétrie orthogonale de  $E$ .

1. Déterminer l'isométrie vectorielle  $s \circ r \circ s$ .
2. Déterminer l'isométrie vectorielle  $r \circ s \circ r$ .
3. A quelle condition a-t-on  $s \circ r = r \circ s$ ?

#### Exercice 23.

Soit  $E$  un plan vectoriel euclidien orienté, et soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs unitaires de  $E$ . Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient  $u$  sur  $v$ .

#### Exercice 24.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3, et soit  $f \in O^-(E)$ . Démontrer que  $f$  est la composée d'une rotation d'axe une droite  $D$  et de la réflexion par rapport à  $D^\perp$ .

#### Exercice 25.

Déterminer les réels  $a, b, c, d, e$  tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Exercice 26.

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est noté  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le vecteur  $(1, 1, 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  est noté  $\vec{v}$ . Dans cet exercice, on souhaite calculer la matrice  $M$  dans la base canonique de la rotation  $r$  d'axe  $\mathbb{R}\vec{v}$  et d'angle  $2\pi/3$ .

1. Méthode 1 : en étudiant la restriction de  $r$  au plan affine  $P$  d'équation  $x + y + z = 1$ , déterminer la matrice  $M$ .
2. Méthode 2 : En utilisant la matrice de  $r$  dans une base orthonormée directe donc le premier vecteur est le vecteur  $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$ , déterminer  $M$ .

**Exercice 27.**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  diagonalisable. Démontrer que  $u$  est une symétrie.

**c. Divers****Exercice 28.**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$ . Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que  $u$  est antisymétrique si et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle x, u(x) \rangle = 0$ .
2. Montrer que  $u$  est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.
3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que  $\text{Im}(u) = (\ker u)^\perp$ .
4. Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Démontrer que  $F^\perp$  est stable par  $u$ .
5. Montrer que  $\ker(u) = \ker(u^2)$ .
6. Démontrer que le spectre de  $u$  est soit vide, soit restreint à  $\{0\}$ .
7. Montrer que  $u^2$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.
8. Soit  $F$  un espace euclidien,  $v \in \mathcal{L}(F)$  antisymétrique tel que  $v^2 = -\alpha^2 \text{Id}_F$ , où  $\alpha > 0$ . Démontrer qu'il existe une base orthonormale de  $F$  telle que la matrice de  $v$  dans cette base soit de la forme

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$

où

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  a pour forme

$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$