Corrigé de la feuille d'exercices n°16

1. Exercices basiques

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 1.

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
2. Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n z^n$?

Correction.

1. La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\pi^n}$ convient.
2. Si $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = 1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant $a_n = o(b_n)$.
3. C'est le même ! on a $|a_n\rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$ pour tout $\rho \geq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n\cdot 2^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1}\big(\exp(1/n)-1\big)x^n$
4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a>0$ **5.** $\sum_n z^{n!}$ **6.** $\sum_n n^{\ln n} z^n$

Correction.

On notera pour chaque exemple $a_n x^n$ le terme général de la série.

1. Posons $u_n = \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n.2^n}$. Alors
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n|1+i||z|^3}{2(n+1)} \to \frac{\sqrt{2}|z|^3}{2} = \frac{|z|^3}{\sqrt{2}}.$$
Ainsi, si $|z|^3 < \sqrt{2}$, la série de terme général $|u_n|$ est convergente d'après le critère de d'Alembert, alors qu'elle est divergente si $|z|^3 > \sqrt{2}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt[6]{2}$.
2. En effectuant un développement limité, on trouve que $a_n \sim \frac{1}{n}$ d'où $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$. La suite

$(|a_n z^n|)$ est donc bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Le rayon de convergence de la série est 1.

3. On a $a_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, donc $|a_n z^n| \sim \frac{|z|^n}{n}$ et la suite $(|a_n z^n|)$ est bornée si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de la série est donc égal à 1.
4. On applique à nouveau la règle de d'Alembert à $u_n = a^{\sqrt{n}}|z|^n$. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$
Or,
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\big((1+1/n)^{1/2} - 1\big) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0.$$
Ainsi, on obtient que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to |z|a^0 = |z|.$$
On en déduit que la série des modules converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1.
5. Pour $|z| < 1$, on remarque que $|z|^{n!} \leq |z|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|z| \geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.
6. Pour $u_n = n^{\ln n}|z|^n$, on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :
$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\ln n/n}|z| = \exp\big((\ln n \times \ln n)/n\big)|z| \to |z|.$$
La série est donc convergente pour $|z| < 1$ et divergente pour $|z| > 1$. Son rayon de convergence vaut 1.

Exercice 3.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Correction.

Soit $0 < r < \rho$. Par le lemme d'Abel, on sait que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$|a_n r^n| \leq M.$$
Soit maintenant $R > 0$. Alors on a
$$\frac{|a_n|R^n}{n!} = |a_n|r^n \times \frac{(R/r)^n}{n!}.$$
Par croissance comparée des suites puissances et factorielle, il existe $C > 0$ tel que $|(R/r)^n|/n! \leq C$. Il vient, pour tout $n \geq 0$,
$$\frac{|a_n|R^n}{n!} \leq MC.$$
La suite $(a_n R^n)$ est bornée pour tout n, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

Exercice 4.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Correction.

Il suffit de remarquer que la suite $(a_n^\alpha r^n)$ est bornée si et seulement la suite $(a_n r^{n/\alpha})$ (obtenue en prenant la puissance $1/\alpha$ de la première) est bornée. Ainsi, si $r < \rho^\alpha$, alors $r^{1/\alpha} < \rho$ et donc les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ sont bornées. De même, si $r > \rho^\alpha$, de sorte que $r^{1/\alpha} > \rho$, alors les suite $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$ est égal à ρ^α.

Exercice 5.

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Correction.

Supposons d'abord que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors S est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que S est paire, et posons $T(x) = S(-x)$. Alors, on sait que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$T(-x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque S est paire, T et S coïncident sur $]-R, R[$. C'est donc que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = (-1)^n a_n$. Ceci impose que $a_n = 0$ dès que n est impair.

Exercice 6.

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1 - \delta, 1[$, alors
$$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière
$$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$

Démontrer que cette série converge normalement sur $[0,1]$.

(b) En déduire que $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=0$.

Correction.

1. Puisque $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, on démontre par exemple par le critère de d'Alembert que le rayon de convergence vaut 1.
2. Par croissance de la fonction sinus entre 0 et $\pi/2$, la suite $\big(\sin(1/\sqrt{n})\big)$ est décroissante, et positive. D'après le critère des séries alternées, la série converge en -1. En 1, la série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$ est divergente, par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_n 1/\sqrt{n}$ (on compare bien des séries à termes positifs).
3. (a) La série $\sum_n \sin(1/\sqrt{n})$, qui est à termes positifs, est divergente. Il existe donc un entier $N\geq 1$ tel que
$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq M+1.$$
De plus, cet entier N étant fixé, la fonction $h:x\mapsto\sum_{n=1}^{N}\sin(1/\sqrt{n})x^n$ est continue en 1. Ceci donne l'existence de $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1]$,
$$h(x)\geq h(1)-1.$$
Ceci est exactement le résultat voulu.

   (b) Puisqu'on a une série à termes positifs, la série majore toutes ses sommes partielles. Ainsi, pour tout $M>0$, on peut trouver $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1[$,
$$f(x)\geq M.$$
Ceci signifie exactement que f tend vers $+\infty$ en 1^-.
4. (a) Il est clair que, pour tout $x\in[0,1]$, on a
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n\right|\leq\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|.$$
D'après, par exemple, l'inégalité des accroissements finis,
$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right|\leq\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right|\leq\frac{C}{n^{3/2}}.$$
La série (numérique) de terme général $n^{-3/2}$ étant convergente, ceci prouve la convergence normale de la série définissant g sur $[0,1]$.

   (b) Un calcul aisé montre que
$$(1-x)f(x)=\sin(1)+g(x).$$
Or, g étant continue en 1, on trouve
$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x)=\sin(1)+g(1)=\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]=0.$$

Exercice 7.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$. On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^N b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que
$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$
où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Correction.

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| \leq (l+1)|b_n|.$$
Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$|a_n| r^n \leq (l+1)|b_n| r^n$$
et donc, si la suite $(|b_n|r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n|r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ étant en effet donné par
$$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n|r^n) \text{ est bornée }\}.$$
2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$. On a $P(1) = 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de P en 1.
3. Soit $M > 0$ et soient N, δ donnés par la question précédente. Alors, puisque b_n est positif pour tout n, on a, pour chaque $x \in]0, 1[$,
$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n.$$
En particulier, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a
$$g(x) \geq M.$$
Ceci prouve bien que g tend vers $+\infty$ en 1.

4. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n + \sum_{n=0}^{N} b_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n) x^n$ et $c_n = b_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.

5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose f comme précédemment. D'une part, on a $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ et donc, multipliant par x^n et sommant pour $n = 0, \dots, +\infty$, on déduit que

$$(l-\varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l+\varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque P est un polynôme, donc est continu en 1, et que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que

$$\frac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que f/g tend vers l en 1.

Exercice 8.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que

pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x \cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}x^n \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}. \end{aligned}$$

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2) = n^2 - n - 2 = n(n-1) - 2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n - 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}x^n - 2e^x \\ &= x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n - 2e^x = (x^2-2)e^x. \end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n = 1$), on obtient

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n} = 1 - \exp(-x^2/2).$$

Exercice 9.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Correction.

1. Il est d'abord clair que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq S_n \leq n$. Donc, pour $\rho > 0$, on a
$$\rho^n \leq S_n \rho^n \leq n\rho^n.$$
Ainsi, si $\rho \in]0,1[$, la suite $(S_n \rho^n)$ est bornée (on peut même dire qu'elle tend vers 0), et si $\rho > 1$, la suite $(S_n\rho^n)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de S vaut 1.
2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :
$$\begin{aligned}(1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1}\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n - S_{n-1})\, x^n\\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\\ &= -\ln(1-x).\end{aligned}$$
3. Ayant reconnu le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, on en déduit que
$$F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 10.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n=\frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x\cdot x^n}{n!}-e^x=(x-1)e^x.$$
2. Posons $u_n=\frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n\to 1$, la suite $|u_nz^n|$ est bornée si $|z|<1$ et tend vers $+\infty$ si $|z|>1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire
$$\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$
ce qui donne
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n&=\sum_{n\geq 0}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^n\\&=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=\frac{1}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$
Même si cette dernière fonction semble ne pas être définie en 0, elle se prolonge bien sûr par continuité en ce point.
3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1,n,n(n-1),n(n-1)(n-2),\cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a
$$(n+1)(n-2)=n^2-n-2=n(n-1)-2.$$
On a donc
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n&=\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n\\&=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-2)!}x^n-2e^x\\&=x^2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n-2e^x=(x^2-2)e^x.\end{aligned}$$
4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^nx^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n=1$), on obtient
$$S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^nn!}x^{2n}=1-\exp(-x^2/2).$$

Exercice 11.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n \to x^2$. Ainsi, si $|x| < 1$, la série est convergente et si $|x| > 1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$
Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
et donc, pour $x \neq 0$,
$$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
De plus, $S(0) = 1$.
2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3} = x^3\exp(x).$$
De même, on a
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2\exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!}x^n = x\exp(x).$$
On conclut que
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}x^n = (x^3 + 3x^2 + x)\exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x)=\frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x\in]-1,1[$,
$$f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$
En dérivant, il vient
$$-\frac{x}{(1+x)^2}=xf'(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^n,$$
soit finalement
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}n x^{2n+1}=x\times\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve
$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1}.$$
Posons $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x\neq 0$, on a
$$f(x)=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que
$$\begin{aligned}g(x)&=-1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^2x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1}\\&=-1+x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\&=-1+x^2f(x).\end{aligned}$$
Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x\neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,
$$S(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x^2-1}{4x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
Il est aussi clair que $S(0)=-1$.

2. Exercices d'entraînement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 12.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1}a_nx^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell\neq 0$;

2. la suite (a_n) est périodique, et non identique nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Correction.

1. Puisque la suite (a_n) est convergente, elle est bornée et donc la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1. De plus, au voisinage de l'infini, on a $a_n r^n \sim \ell r^n$. Si $r > 1$, ceci tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence de la série entière est donc exactement égal à 1.
2. Puisque la suite (a_n) est périodique, elle est bornée et un raisonnement identique à celui de la question précédente donne que le rayon de convergence est au moins égal à 1. De plus, puisque la suite (a_n) est périodique et non identiquement nulle, elle ne converge par vers 0. Ainsi, la série $\sum_n a_n 1^n$ est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1.
3. Il suffit de remarquer que $1 \leq a_n \leq n$, ce qui entraine
$$|x|^n \leq |a_n x^n| \leq n|x|^n.$$
Ainsi, pour $|x| < 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ converge, et pour $|x| > 1$, elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.
4. La suite (a_n) est une suite qui prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 9\}$ donc elle est bornée. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, (a_n) prend une infinité de fois une valeur dans $\{1, \dots, 9\}$. En particulier, (a_n) ne tend pas vers 0. Raisonnant comme ci-dessus, on trouve que le rayon de convergence vaut exactement 1.

Exercice 13.

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

1. $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ **2.** $a_n z^{2n}$ **3.** $a_n z^{n^2}$.

Correction.

1. Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$. Puisque $|a_n| e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$, on a $R_1 \leq R$. Soit maintenant $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors, pour tout $\rho \in [0, r[$, on a
$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$
et comme $e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$ est bornée. On en déduit que $R \leq R_1$ et donc finalement que $R = R_1$.
2. Il est clair que $(a_n r^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (r^2)^n)$ est bornée (c'est la même suite écrire de deux façons différentes). Le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{2n}$ est donc égal à $\sqrt{R}$.
3. Supposons d'abord $R > 0$ et $R < +\infty$. On va alors prouver que le rayon de convergence de

$\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. En effet, soit r tel que $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout $\rho < 1$, on a $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ et cette quantité est bornée car $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers 0 (on a choisi $\rho < 1$). Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est supérieur ou égal à 1. De façon similaire, on prouve que, si r est tel que $a_n r^n$ n'est pas bornée, alors pour tout $\rho > 1$, on a $a_n \rho^{n^2}$ qui n'est pas borné. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. Lorsque $R = +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ sera élément de $[1, +\infty]$, mais toutes les valeurs peuvent être prises : <ul class="rien">

4. Si $a_n = 1/n!$, alors le rayon vaut 1.
5. Si $a_n = 1/n!^2$, alors le rayon vaut $+\infty$.
6. Si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, avec $\lambda > 1$, le rayon de convergence vaut λ. De même, si $R = 0$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ peut être n'importe quel réel dans $[0, 1]$.

Exercice 14.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Correction.

1. On remarque d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0. En effet, au voisinage de 0, on a
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2} \sim_0 \frac{t^4}{t^2} = t^2$$
et la fonction se prolonge par 0 en 0. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ qui est intégrable car 2>1. La fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\frac{1-e^{-t^4}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!}.$$
Par intégration de cette série entière, on trouve
$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{4n-2}}{n!} dt = \int_0^x \frac{1-e^{-t^4}}{t^2} dt.$$
Ainsi, f admet une limite en $+\infty$ égale à $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^4}}{t^2} dt$.

Exercice 15.

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que $a_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell=\sum_{n\geq 0}a_n$.

Correction.

1. Pour $a_n=(-1)^n$, on a $S(x)=\frac{1}{1+x}$ qui tend vers $1/2$ si x tend vers 1^-, alors que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. Remarquons d'abord que S est croissante (puisque chaque $x\mapsto a_nx^n$ est croissante). Ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, on a $S(x)\leq\ell$. Mais alors, pour chaque $N\in\mathbb{N}$, on a encore
$$\sum_{n=0}^N a_nx^n\leq S(x)\leq\ell.$$
Si on fait tendre x vers 1^-, on obtient que
$$\sum_{n=0}^N a_n\leq\ell.$$
Les sommes partielles de la série $\sum_n a_n$, qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\leq\ell$. Fixons ensuite $\varepsilon>0$ et $x\in[0,1[$ tel que $S(x)\geq\ell-\varepsilon$. Il vient,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\geq\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\geq\ell-\varepsilon.$$
Ceci prouve le résultat demandé.

Exercice 16.

Soit $f(z)=\sum_n a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et soit $r\in]0,R[$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta\mapsto\sum_n a_nr^ne^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$.
2. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$2\pi r^ka_k=\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$
3. Application : on suppose que $R=+\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Correction.

1. Puisque $r < R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum_n |a_n|r^n$ est convergente. Puisque $|a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n|r^n$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0, 2\pi]$.
2. On a
$$f(re^{i\theta})e^{-ik\theta} = \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}.$$
Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta = \sum_n a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta.$$
La dernière intégrale est égale à 0 si $k \neq n$, et à 2π sinon. On en conclut que
$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta = 2\pi a_k r^k.$$
3. Pour $k \geq 1$, on a
$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$
Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors on a
$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$
Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_k = 0$ pour $k \geq 1$, ce qui entraîne que f est constante.

Exercice 17.

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a
$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x - 1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$
2. En déduire que
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Correction.

1. On commence par couper la somme en n et par remarquer que

$$f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}a_k=\sum_{k=0}^{n}a_k(x^k-1)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k-R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme $a_k=R_{k-1}-R_k$ (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour $m\geq n+1$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{m}a_kx^k=\sum_{k=n+1}^{m}(R_{k-1}-R_k)x^k=\sum_{k=n+1}^{m}R_k(x^{k+1}-x^k)+R_nx^{n+1}-R_mx^{m+1}.$$

Puisque (R_p) tend vers 0, on peut faire tendre m vers ∞ et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k=(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}R_kx^k+R_nx^{n+1},$$

ce qui donne bien

$$f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}a_k=\sum_{k=0}^{n}a_k(x^k-1)+(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}R_kx^k+R_n(x^{n+1}-1).$$

2. On va d'abord fixer n pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de x dans $[0,1[$, puis on va faire tendre x vers 1. Soit donc $\varepsilon>0$. Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que, pour $k\geq n$, on a $|R_k|\leq\varepsilon$. On en déduit, pour tout $x\in[0,1[$,

$$\left|(x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}R_kx^k\right|\leq\varepsilon|x-1|\times\sum_{k=N+1}^{+\infty}x^k\leq\varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de n,

$$\left|R_n(x^{n+1}-1)\right|\leq 2\varepsilon.$$

Cette valeur de n étant fixée, la fonction $x\mapsto\sum_{k=0}^n a_k(x^k-1)$ est continue en 0, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1[$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(x^k-1)\right|\leq\varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $x\in]1-\delta,1[$, on a

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k\right|\leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

Exercice 18.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$

4. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n=\frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n\to x^2$. Ainsi, si $|x|<1$, la série est convergente et si $|x|>1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x\in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$(xS)'(x)=\sum_{n\geq 0}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}.$$
Par intégration, on en déduit que pour tout $x\in]-1,1[$, on a
$$xS(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
et donc, pour $x\neq 0$,
$$S(x)=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
De plus, $S(0)=1$.
2. Posons $u_n=\frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)^3}{n^3}\to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n=x^3\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3}=x^3\exp(x).$$
De même, on a
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n=x^2\exp(x)\text{ et }\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^n=x\exp(x).$$
On conclut que
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n=(x^3+3x^2+x)\exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n.$$

En dérivant, il vient

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n x^n,$$

soit finalement

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x \times \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}.$$

Posons $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que

$$\begin{aligned} g(x) &= -1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^2 x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1} \\ &= -1 + x^2 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -1 + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x \neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Il est aussi clair que $S(0) = -1$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 19.

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1, \rho) \leq R$.

Correction.

1. Remarquons que $a_n = S_n - S_{n-1}$ et donc que $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$. Ainsi, $\sum_n a_n z^n$ est la différence de deux séries entières de rayon de convergence R, son rayon de convergence ρ vérifie $\rho \geq R$.
2. La série $\sum_n S_n z^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n z^n$. Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif ρ et 1. On en déduit que le rayon de convergence R de la série $\sum_n S_n z^n$ vérifie $R \geq \inf(1, \rho)$.

Exercice 20.

Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers l.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
2. On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$.

Correction.

1. Puisque la suite (a_n) est convergente, elle est bornée, disons par $M > 0$. Mais, par application du critère de d'Alembert, la série $\sum_n M x^n / n!$ est convergente pour tout réel x. Le rayon de convergence de la série est donc égal à $+\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que, pour $n \geq N$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + l e^x. \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n + \sum_{N}^{+\infty} \frac{(a_n - l)}{n!} x^n := f_1(x) + f_2(x).$$

Puisque f_1 est un polynôme, on a $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f_1(x) = 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour $x \geq x_0$,

$$e^{-x} |f_1(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, on a, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{-x}|f_2(x)| &\leq \sum_N^{+\infty} \frac{|a_n - l|}{n!} x^n \\ &\leq \sum_N^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \sum_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n!} x^n \\ &\leq \varepsilon e^{-x} e^x = \varepsilon. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité triangulaire on trouve, pour tout $x \geq x_0$,

$$|e^{-x} f(x) - l| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, $e^{-x} f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 21.

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n = o(1/n)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on note

$$A_n(x) = S(x) - \ell,\ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1 - x^n) a_n,\ C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^N a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,
$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Correction.

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.
2. Soit N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq \varepsilon / n$. Pour $N \geq N_0$, il vient
$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir $x = 1 - \frac{1}{N}$, de sorte à avoir une grande valeur de x qui garantisse néanmoins que $|C_N(x)| \leq \varepsilon$. Majorons ensuite les autres

termes. Pour $A_N(x)$, c'est facile. Il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$,

$$|A_N(x)| = \left|S\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t^n$, on a

$$|1 - x^n| \leq n(1 - x) \leq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} na_n.$$

D'après le théorème de Cesaro, puisque (na_n) tend vers 0, on sait que $|B_N(1 - 1/N)|$ tend vers 0, et donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_2$,

$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on trouve

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_n a_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 22.

Soit f une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Démontrer que l'ensemble A des zéros de f (sur $\mathbb{C}$) est un fermé constitué de points isolés ?

Correction.

On règle d'abord le cas où f est identiquement nulle. Dans le cas contraire, prouvons d'abord que A est fermé : si (z_n) est une suite de zéros de f, et si $z_n \to z$, alors par continuité de f en z on a aussi $f(z) = 0$, et donc $z \in A$. En outre, A est constitué uniquement de points isolés, c'est-à-dire que si $z_0 \in A$, il existe un voisinage V de z_0 tel que $V \cap A = \varnothing$. En effet, puisque le rayon de convergence du développement en série entière de f vaut $+\infty$, f est aussi développable en série entière au voisinage de z_0, avec un développement ayant un rayon de convergence égal à $+\infty$. Ce développement s'écrit :

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

où on peut supposer $a_n \neq 0$ (f est non identiquement nulle). On a alors :

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

où g est une fonction continue vérifiant $g(z_0) = a_n \neq 0$. Par continuité, g, donc f, ne s'annule pas dans un voisinage de z_0, sauf en z_0.