Feuille d'exercices n°16

1. Exercices basiques

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 1.

1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
2. Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ?
3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n z^n$?

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n\cdot 2^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1}\big(\exp(1/n)-1\big)x^n$
4. $\sum_n a^{\sqrt{n}} z^n,\ a>0$ **5.** $\sum_n z^{n!}$ **6.** $\sum_n n^{\ln n} z^n$

Exercice 3.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 4.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Exercice 5.

Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 6.

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.
3. (a) Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors

   $$\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \geq M.$$

   (b) En déduire la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
4. (a) On considère la série entière

   $$g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right] x^n.$$

   Démontrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$.

   (b) En déduire que $\lim_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = 0$.

Exercice 7.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$. On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$. On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon) b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que

   $$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

   où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon) b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon) b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que

   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 8.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Exercice 9.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n\geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n\geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.
3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 10.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Exercice 11.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

2. Exercices d'entraînement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 12.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. la suite (a_n) est périodique, et non identique nulle ;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n ;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 13.

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

$$\mathbf{1}.\ a_n e^{\sqrt{n}} z^n \qquad \mathbf{2}.\ a_n z^{2n} \qquad \mathbf{3}.\ a_n z^{n^2}.$$

Exercice 14.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 15.

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 16.

Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_n a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$
3. Application : on suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 17.

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 18.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Rayon de convergence et séries entières

Exercice 19.

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1, \rho) \leq R$.

Exercice 20.

Soit (a_n) une suite de réels qui converge vers l.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
2. On note f la somme de la série entière précédente. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} f(x)$.

Exercice 21.

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que

$a_n = o(1/n)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on note

$$A_n(x) = S(x) - \ell,\ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n,\ C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N(x) + B_N(x) - C_N(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Exercice 22.

Soit f une fonction développable en série entière, non identiquement nulle, dont le rayon de convergence vaut $+\infty$. Démontrer que l'ensemble A des zéros de f (sur $\mathbb{C}$) est un fermé constitué de points isolés ?