Feuille d'exercices n°14

1. Séries de matrices

Exercice 1.

Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Démontrer que la série $\sum A^n$ converge, et donner la valeur de $\sum_{n\geq 0} A^n$.

Exercice 3.

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $\exp(tA)$.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Exercice 5.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

2. Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Exercice 6.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 7.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 9.

Étudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes sur les intervalles proposés :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \arctan(x + \dfrac{1}{n})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (1 - x)^n \sin(x)$ sur $[0, 1]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. Convergence simple des séries de fonctions

Exercice 10.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12.

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n.

Exercice 13.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1.

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a < b$ deux réels. Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[a, b]$.