Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°13

Exercices obligatoires : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 20 ; 23 ; 26.

1. Révision de Sup' sur les séries numériques

Exercice 1.

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}$ **3.** $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

4. $u_n = \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **5.** $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ **6.** $\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Exercice 2.

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$ **2.** $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\frac{1}{n} - 1}$.

3. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 3.

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 4.

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$.

Exercice 5.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum_n u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum_n u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum_n u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

Exercice 6.

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

1. Prouver que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Démontrer que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 8.

Soit (u_n) une suite positive et décroissante. Prouver que si la série $\sum_n u_n$ est convergente, alors (nu_n) tend vers 0.

2. Séries : techniques de Spé

a. Exercices basiques

Exercice 9.

Étudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ **2.** $u_n = \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ **3.** $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.

Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Démontrer que la série $\sum A^n$ converge, et donner la valeur de $\sum_{n\geq 0} A^n$.

Exercice 12.

Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$.

Exercice 13.

Étudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n^2}$ **2.** $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

3. $u_n = \dfrac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$

Exercice 14.

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 15.

Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Exercice 16.

On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Traiter le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$.
   (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.
   (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est bornée, alors que si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
   (c) Conclure pour la série de terme général u_n, lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 17.

1. En remarquant que $\frac{1}{n} \sim_{+\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$, donner un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2. En remarquant que $\frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, donner un équivalent du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 18.

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 19.

Écrire un algorithme sous Python donnant un encadrement à 10^{-5} près de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$.

Exercice 20.

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Exercice 21.

Pour $n \geq 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Exercice 22.

Soit, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Vérifier que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ ne converge pas.
3. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\sigma(3p) = 2p$, $\sigma(3p+1) = 4p+1$, $\sigma(3p+2) = 4p+3$. Vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$?

b. Exercices d'entraînement

Exercice 23.

1. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq N$, $b_N a_n \leq a_N b_n$.
   (b) En déduire que
      i. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
      ii. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.
2. Soit $\alpha > 0$ et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier que
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
3. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ avec
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
   (a) On suppose $\beta > 1$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait, en gardant les mêmes notations pour (b_n),
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$
   En déduire que $\sum_n a_n$ converge.
   (b) Démontrer que si $\beta < 1$, alors $\sum_n a_n$ diverge.
   (c) Application : Soit $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Démontrer que $\sum_n a_n$ diverge.

Exercice 24.

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $a > 1$. Soit $b \in]1, a[$ et posons $v_n = \frac{1}{n^b}$. Comparer u_n et v_n. En déduire que $\sum_n u_n$ converge si $a > 1$.
2. Démontrer que $\sum_n u_n$ diverge si $a < 1$.
3. En utilisant les séries de Bertrand, montrer que le cas $a = 1$ est douteux.
4. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $v_n = \ln(nu_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Montrer que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$ et que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 25.

Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 26.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n \to +\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$

   Vérifier alors que

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t)dt = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 27.

Le but de l'exercice est de déterminer un équivalent du reste de certaines séries alternées. On considère $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs décroissant vers 0, et on considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ dont on rappelle qu'elle est convergente. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ son reste. On suppose de plus que la suite (u_n) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$.
2. Démontrer que la suite $(|R_n|)$ est décroissante.
3. En déduire que $R_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}u_n}{2}$.

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 28.

Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$

   Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$

   On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.
3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.
4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Exercice 29.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_n u_n$ diverge. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. A l'aide d'une comparaison à une intégrale, démontrer que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_n \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 30.

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n).$$
Démontrer que $\sum_n u_n$ est absolument convergente.
2. Démontrer que la série numérique $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.
3. Application : étudier la nature de $\sum_n \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.