Feuille d'exercices n°12

1. Encore de la réduction pratique + sous-espaces caractéristiques

Exercice 1.

Réduire (i.e. diagonaliser/trigonaliser) les matrices suivantes et déterminer leurs sous-espaces caractéristiques :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -1 & 8 & -1 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 2 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ -1 & 8 & -1 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Réduction et polynômes annulateurs

Exercice 2.

Soit M une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose que P est un polynôme annulateur de A et que Q est un polynôme annulateur de B. Déterminer un polynôme annulateur de M.

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

2. Déterminer une telle famille.

Exercice 4.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A et Q celui de A^{-1}. Quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Exercice 5.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 7.

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array}\right)$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. A l'aide d'un polynôme annulateur de A, démontrer que A est diagonalisable.
3. Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de A, donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de A, puis donner les valeurs propres elles-mêmes ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A.

Exercice 8.

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
3. Diagonaliser U.

Exercice 9.

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On note $\mathcal{C}_f$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.

3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 10.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

Exercice 11.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Démontrer le résultat si A ou B est inversible.
2. Dans le cas général, on considère les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Exercice 12.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E et soit F, G deux sous-espaces de E supplémentaires stables par u. On note π_u le polynôme minimal de u, π_F le polynôme minimal de $u_{|F}$ et π_G le polynôme minimal de $u_{|G}$. Démontrer que

$$\pi_u = \text{ppcm}(\pi_F, \pi_G).$$

Exercice 14.

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?

Exercice 15.

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{array}{rcl} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array}$$

   Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. On suppose que f est diagonalisable. Démontrer que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. Réciproquement, on suppose que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, et on note $u \in E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$.
   (a) Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A. Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.

Soit $n \geq 2$ et A la matrice définie par $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, les autres coefficients étant tous nuls.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$?

Exercice 19.

Soit $n \geq 1$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, V le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$, et T_0 le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

1. Quelle est la dimension de T_0 ?
2. Démontrer que $V \subset T_0$.
3. Pour $j \in \{2, \ldots, n\}$, on note $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$. Calculer F_j^2. En déduire que $G_j \in V$.
4. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'éléments de V constituée par les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$ et par les matrices G_k, $k = 2, \ldots, n$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

5. En déduire que $V = T_0$.

Exercice 20.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Exercice 21.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente. Prouver que si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Prouver que $A_1 \cdots A_n = 0$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que les matrices commutent ?

Exercice 22.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si, pour tout $p \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.