

## Feuille d'exercices n°8

Exercices obligatoires : 1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 14, 19.

## 1. Exercices basiques

### a. Continuité des applications linéaires

#### Exercice 1.

Déterminer si l'application linéaire  $T : (E, N_1) \rightarrow (F, N_2)$  est continue dans les cas suivants :

1.  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $T : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ ,  $f \mapsto fg$  où  $g \in E$  est fixé.
2.  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de  $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$  et  $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P \mapsto P'$ .
3.  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni de  $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$  et  $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P \mapsto P'$ .
4.  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de  $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} k! |a_k|$  et  $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P \mapsto P'$ .
5.  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ ,  $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$ ,  $f \mapsto fg$  où  $g \in E$  est fixé.

#### Exercice 2.

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur  $E$ . Soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Justifier la terminologie : " $\phi$  est un endomorphisme de  $E$ ."
2. Démontrer que  $\phi$  est continue.
3. Pour  $n \geq 0$ , on considère  $f_n$  l'élément de  $E$  défini par  $f_n(x) = ne^{-nx}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Calculer  $\|f_n\|_1$  et  $\|\phi(f_n)\|_1$ .
4. On pose  $\|\phi\| = \sup_{f \neq 0 \in E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$ . Déterminer  $\|\phi\|$ .

**Exercice 3.**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ . On pose

$$A = \left\{ f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que  $A$  est une partie fermée de  $E$ .

**Exercice 4.**

Soit  $E$  un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie  $A$  de  $E$  est un fermé de  $E$ .

**Exercice 5.**

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur l'espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si et seulement si  $Id : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$  et  $Id : (E, N_2) \rightarrow (E, N_1)$  sont continues.

**b. Norme subordonnée****Exercice 6.**

Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  définie, pour tout  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ , par :

$$\|A\| = \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

Démontrer que l'application trace  $\text{Tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, et calculer sa norme subordonnée.

**Exercice 7.**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1])$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$  et  $F = \mathcal{C}^1([0, 1])$  muni de  $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ . Soit  $T : E \rightarrow F$  défini par  $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Démontrer que  $T$  est continue et calculer sa norme subordonnée.

**Exercice 8.**

On munit  $\mathbb{R}[X]$  de la norme suivante :

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \sup\{|a_k|; 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour  $c \in \mathbb{R}$ , on définit la forme linéaire  $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $P \mapsto P(c)$ . Pour quelles valeurs de  $c$  la forme linéaire  $\phi_c$  est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme subordonnée de  $\phi_c$ .

### c. Compacité

#### Exercice 9.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.

#### Exercice 10.

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^4 = 1\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^5 = 2\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 \leq 1\} & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\} \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x(1 - 2x)\}. \end{aligned}$$

#### Exercice 11.

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n(x) = e^{inx}$ .

1. Calculer  $\|f_n - f_p\|_2$  pour  $p, n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire que  $\bar{B}(0, 1)$  n'est pas compacte.

#### Exercice 12.

Soit  $K$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé  $E$  contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe  $r < 1$  tel que  $K$  soit contenu dans  $\bar{B}(0, r)$ .

#### Exercice 13.

Soient  $K, L$  deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé  $E$ . Démontrer que  $d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0$ .

#### Exercice 14.

Soit  $F$  un fermé, et  $C$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $G = F + C = \{x + y; x \in F \text{ et } y \in C\}$ . Montrer que  $G$  est fermé.

#### Exercice 15.

Soit  $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ . Soit également  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue telle que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathcal{C}$ . Démontrer que  $\inf_{x \in \mathcal{C}} f(x) > 0$ .

**Exercice 16.**

Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum.

**Exercice 17.**

Soit  $A$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est localement bornée : pour tout  $x \in A$ , il existe  $r > 0$  et  $M > 0$  tels que, pour tout  $y \in B(x, r) \cap A$ ,  $|f(y)| \leq M$ . Démontrer que  $f$  est bornée sur  $A$  tout entier.

**2. Exercices d'entraînement****a. Continuité des applications linéaires****Exercice 18.**

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ , muni de la norme  $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$ .

1. Est-ce que l'application linéaire  $\phi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P(X) \mapsto P(X+1)$  est continue sur  $E$ ?
2. Est-ce que l'application linéaire  $\psi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P(X) \mapsto AP$ , où  $A$  est un élément fixé de  $E$ , est continue sur  $E$ ?

**Exercice 19.**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  de nombres complexes telle que  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge. On pose, pour  $a = (a_n) \in E$ ,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $E$ .
2. On pose  $F = \{a \in E; \sum_{n \geq 1} a_n = 1\}$ .  $F$  est-il ouvert? fermé? borné?

**Exercice 20.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $\mathcal{L}_c(E)$  l'ensemble des applications linéaires continues sur  $E$ . Pour  $u \in \mathcal{L}_c(E)$ , on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur  $\mathcal{L}_c(E)$ .
2. Démontrer que, pour tout  $x \in E$  et tout  $u \in \mathcal{L}_c(E)$ , on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous  $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$ , alors  $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$ .

**Exercice 21.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que  $u$  est continue si et seulement si  $\{x \in E; \|u(x)\| = 1\}$  est fermé.

**Exercice 22.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant, pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| \leq \|x\|$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k.$$

1. Simplifier  $v_n \circ (u - Id)$ .
2. Montrer que  $\ker(u - Id) \cap \text{Im}(u - Id) = \{0\}$ .
3. On suppose désormais que  $E$  est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \text{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit  $p$  la projection sur  $\ker(u - Id)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - Id)$ . Démontrer que, pour tout  $x \in E$ ,  $v_n(x) \rightarrow p(x)$ .

**Exercice 23.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé (sur  $\mathbb{R}$ ) et soit  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire non identiquement nulle. Le but de l'exercice est de démontrer que  $\phi$  est continue si et seulement si le noyau de  $\phi$  est fermé.

1. Démontrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose que le noyau de  $\phi$ , noté  $H$ , est fermé. On fixe  $y \in E$  tel que  $\phi(y) = 1$ .
  - (a) Démontrer que  $\phi^{-1}(\{1\})$  est fermé.
  - (b) En déduire qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ .
  - (c) Démontrer que  $x \in B(0, r) \implies |\phi(x)| \leq 1$ .
  - (d) Conclure.

**b. Compacité****Exercice 24.**

Soient  $K, L$  deux parties compactes d'un espace vectoriel normé  $E$ . On pose  $K + L = \{x + y; x \in K, y \in L\}$ . Démontrer que  $K + L$  est une partie compacte de  $E$ .

**Exercice 25.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension  $n$ . Si  $F$  est un sous-ensemble quelconque de  $E$ , on appelle enveloppe convexe de  $F$ , et on note  $\text{Conv}(F)$ , le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant  $F$ . On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$  et on admet que  $\text{Conv}(F)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ , où  $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$ . Le but de l'exercice est de démontrer que si  $K$  est une partie compacte de  $E$ , alors  $\text{Conv}(K)$  est aussi une partie compacte de  $E$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{H}$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .
2. Définir une application continue  $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \rightarrow E$  telle que  $\text{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$ .
3. Conclure.

**Exercice 26.**

Soit  $E = \mathbb{R}^d$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , et  $A$  une partie non vide de  $E$ . On définit la distance d'un élément  $x_0$  de  $E$  à une partie  $A$  de  $E$ , notée  $d(x_0, A)$ , par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons  $A$  compact. Montrer que pour tout  $x_0 \in E$  il existe  $y \in A$  tel que  $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$ .
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que  $A$  est fermé. (On remarquera que pour toute partie  $B$  de  $A$  on a  $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$ .)
3. Montrer que l'application qui à  $x_0$  associe  $d(x_0, A)$  est continue sur  $E$  (sans aucune hypothèse sur  $A$ ).
4. En déduire que si  $A$  est un fermé de  $E$  et  $B$  un compact de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \quad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints.

**Exercice 27.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $(K_n)$  une suite de parties compactes de  $E$  telle que, pour chaque entier  $n$ , on  $K_{n+1} \subset K_n$ . On pose  $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$ .

1. Démontrer que  $K \neq \emptyset$ .
2. Soit  $U$  un ouvert contenant  $K$ . Démontrer qu'il existe un entier  $n$  tel que  $K_n \subset U$ .

**Exercice 28.**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Démontrer qu'il existe toujours une suite exhaustive de compacts  $(K_j)_{j \geq 1}$  qui vérifie

1.  $\forall j \geq 1, K_j \subset \Omega$
2.  $\forall j \geq 1, K_j \subset K_{j+1}$

3.  $\Omega = \cup_{j \geq 1} K_j$ .

### Exercice 29.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\forall M > 0, \exists R > 0$  tel que  $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$ .
2. Pour toute partie bornée  $B$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(B)$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .
3. Pour toute partie compacte  $K$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercice 30.

Une fonction  $f$  définie sur une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout  $x \in A$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  et une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall (y, z) \in A \cap V_x, \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  est en fait lipschitzienne.

### Exercice 31.

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace vectoriel normé  $E$ ,  $f : A \rightarrow B$  une application et  $G = \{(x, f(x)); x \in A\}$  son graphe.

1. On suppose que  $f$  est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que  $B$  est compact et que le graphe de  $f$  est fermé. Démontrer que  $f$  est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

## 3. Exercices d'approfondissement

### a. Continuité des applications linéaires

#### Exercice 32.

Soit  $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ . On considère l'opérateur de dérivation  $D : E \rightarrow E, f \mapsto f'$ . Montrer que, quelle que soit la norme  $N$  dont on munit  $E$ ,  $D$  n'est jamais une application linéaire continue de  $(E, N)$  dans  $(E, N)$ .

### b. Norme subordonnée

**Exercice 33.**

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On munit  $\mathcal{C}(I)$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On dit qu'une forme linéaire  $u : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  est positive si  $u(f) \geq 0$  pour tout  $f \in \mathcal{C}(I)$  vérifiant  $f(x) \geq 0$  si  $x \in I$ .

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire  $u : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  positive,  $|u(f)| \leq u(|f|)$ .
2. Soit  $e$  la fonction définie par  $e(x) = 1$  pour tout  $x \in I$ . Dédurre de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer  $\|u\|$  en fonction de  $u(e)$ .

**c. Compacité****Exercice 34.**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $B$  la boule unité fermée de  $E$  et  $S$  la sphère unité. Démontrer que  $B$  est compact si et seulement si  $S$  est compact.

**Exercice 35.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $K$  une partie compacte de  $E$ . Pour tout  $r > 0$ , on pose  $K_r = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$ . Démontrer que  $K_r$  est une partie compacte de  $E$ .

**Exercice 36.**

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $A_n = \{u_p; p \geq n\}$ . Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est :

$$V = \bigcap_{n \geq 1} \overline{A_n}.$$

En déduire que si la suite est bornée,  $V$  (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

**Exercice 37.**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $(x_n)$  une suite convergente de  $E$  et soit  $x$  sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

**Exercice 38.**

Soit  $E$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et  $f : E \rightarrow E$  une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe (que l'on notera  $\alpha$ ).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement  $E$  fermé ?



**Exercice 39.**

Soit  $A$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et  $f : A \rightarrow A$  vérifiant  $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$  pour tous  $x, y \in A$ . Le but de l'exercice est de démontrer que  $f$  est une isométrie surjective.

1. Soit  $a, b \in A$ , et  $(a_n), (b_n)$  les suites de  $A$  définies par  $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = f(a_n)$  et  $b_{n+1} = f(b_n)$ . Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $p \geq 1$ , il existe  $k \geq p$  tel que  $\|a - a_k\| < \varepsilon$  et  $\|b - b_k\| < \varepsilon$ . En déduire que  $f$  est à image dense.
2. On pose  $u_n = \|a_n - b_n\|$ . Montrer que  $(u_n)$  est une suite stationnaire.
3. En déduire que  $f$  est une isométrie.
4. Démontrer que  $f$  est surjective.