Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°4

Exercices obligatoires : 2 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13

Exercices en groupes :

- exo n°1 Groupe 1 : Maxence ; Daniel ; Tredy ; Constant ;
- exo n°4 Groupe 2 : Adrien ; Thibault ; Camil ; Ernest ;
- exo n°5 Groupe 3 : Lucas ; Clément ; Rayan ; Malarvijy ;
- exo n°11 Groupe 4 : Raphaël ; Michèle ; Ingrid ; Sébastien ;
- exo n°15 Groupe 5 : Luca ; Ambroise ; Augustin ; Maxime ;

1. Exercices basiques

a. Boules / Distances

Exercice 1.

On considère l'espace vectoriel normé $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Déterminer la distance de la suite u constante en 1 au sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{R})$ des suites à valeurs réelles convergeant vers 0.
2. Déterminer la distance de la suite $v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites à valeurs réelles convergentes.

Exercice 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x, y \in E$. Démontrer que $x + B_f(y, r) = B_f(x + y, r)$.
Remarque : $x + B_f(y, r)$ est l'ensemble $\{x + z \mid z \in B_f(y, r)\}$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel et $N : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que :

i) N est positive sur E ;

i) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;

iii) pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

Montrer que N est une norme si, et seulement si, $B_f = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Exercice 4.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Montrer que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$ et déterminer $d(0_E, A)$.

Exercice 5.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0\}$ et $x, x' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer $B_f(x,r) = B_f(x',r')$ si, et seulement si, $x = x'$ et $r = r'$.

Indication.

Une implication est évidente, montrer l'implication réciproque par contraposée en commençant par le cas : $x = x'$ et $r \neq r'$.
Ensuite, dans le cas $x \neq x'$, faire un dessin !

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in E$ et $r > 0$, on note $\bar{B}(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. On fixe $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. On suppose que $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,s)$. Démontrer que $\|a - b\| \leq s - r$.
2. On suppose que $\bar{B}(a,r) \cap \bar{B}(b,s) = \varnothing$. Montrer que $\|a - b\| > r + s$.

b. Comparaison de normes

Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 8.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P =$

$\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$N_1(P)=\sum_{i=0}^{p}|a_i|,\ N_2(P)=\left(\sum_{i=0}^{p}|a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P)=\max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Exercice 9.

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt,\ \|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2\right)^{1/2}\text{ et } \|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 10.

Sur $E=\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}|P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P)=\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n=\frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

2. Exercices d'entraînement

a. Norme p d'une autre manière

Exercice 11.

Soient $(x,y,p,q)\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $1/p+1/q=1$, et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ $2n$ réels strictement positifs.

1. Montrer que
$$xy\le\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$
2. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p=\sum_{i=1}^n b_i^q=1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_ib_i\le 1$.

3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

4. On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$

5. On définit pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b. Comparaison de normes

Exercice 12.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Exercice 13.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ ;\ \forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}.$$

Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.

3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Exercice 14.

Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. La comparer à la norme euclidienne.
3. Expliquer.

Exercice 15.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.