Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°3

N'oubliez pas de regarder la fin du TD 2 sur l'intégration des relations de comparaison.
Exercices obligatoires : 2, 3, 4, 9, 14, 17.

Exercices en groupes :

- exo n°15 Groupe 1 : Raphaël ; Ambroise ; Ingrid ; Maxime ;
- exo n°10 Groupe 2 : Lucas ; Sébastien ; Adrien ; Tredy ;
- exo n°6 Groupe 3 : Ernest ; Daniel ; Camil ; Malarvijy ;
- exo n°5 Groupe 4 : Maxence ; Thibault ; Constant ; Rayan ;
- exo n°11 Groupe 5 : Luca ; Michèle ; Clément ; Augustin ;

a. Exercices basiques

Exercice 1.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $N : (x, y) \mapsto |x| + \max(|x|, |y|)$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

L'application N est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) On a $N(x, y) = |x| + \max(|x|, |y|) \geq 2|x| \geq 0$.

ii) (Séparation) On suppose que $N(x, y) = 0$. Les termes d'une somme nulle de nombres positifs sont tous nuls, donc en particulier, $\max(|x|, |y|) = 0$. Or $0 \leq |x| \leq \max(|x|, |y|)$ et $0 \leq |y| \leq \max(|x|, |y|)$, d'où $(x, y) = (0, 0)$.

iii) (Homogénéité) On a :

$$\begin{aligned}
N(\lambda(x,y)) &= N(\lambda x, \lambda y) \\
&= \underbrace{|\lambda x|}_{=|\lambda|.|x|} + \max(\underbrace{|\lambda x|}_{=|\lambda|.|x|}, \underbrace{|\lambda y|}_{=|\lambda|.|y|}) \\
&= |\lambda|(|x| + \max(|x|, |y|)) \\
N(\lambda(x,y)) &= |\lambda|.N(x, y).
\end{aligned}$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a :

$$\begin{array}{rcl} N((x,y)+(x',y')) & = & N(x+x',y+y') \\ & = & \underbrace{|x+x'|}_{\leq |x|+|x'|} + \max(\underbrace{|x+x'|}_{\leq |x|+|x'|}, \underbrace{|y+y'|}_{\leq |y|+|y'|}) \\ & \leq & |x|+|x'|+\max(|x|,|y|)+\max(|x'|,|y'|) \\ N((x,y)+(x',y')) & = & N(x,y)+N(x',y'). \end{array}$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère l'application $N : (x,y) \mapsto 2|x|+|y|$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa sphère unité.

Correction.

L'application N est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) On a $N(x,y) = 2|x|+|y| \geq 0$.

ii) (Séparation) On suppose que $N(x,y) = 0$. Les termes d'une somme nulle de nombres positifs sont tous nuls, donc $|x| = 0$ et $|y| = 0$, d'où $(x,y) = (0,0)$.

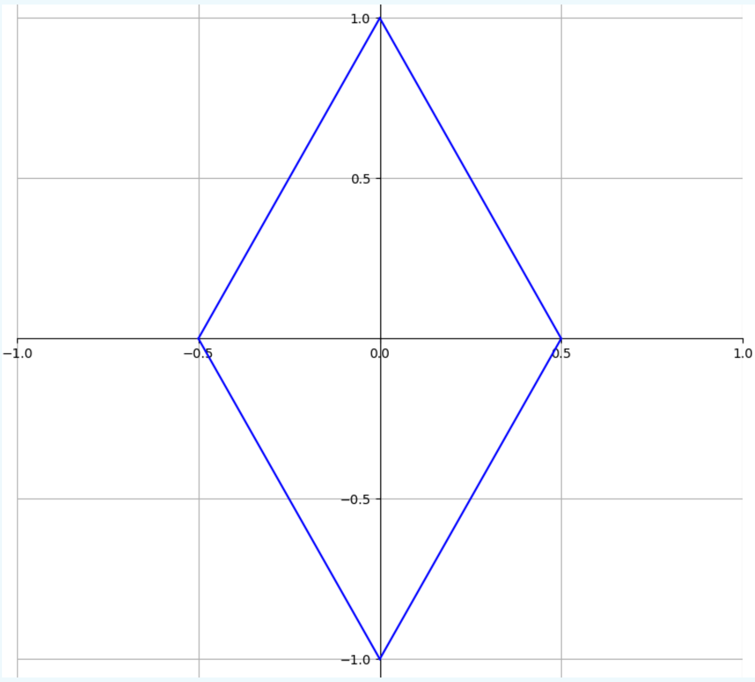
iii) (Homogénéité) On a :

$$\begin{array}{rcl} N(\lambda(x,y)) & = & N(\lambda x, \lambda y) \\ & = & \underbrace{2|\lambda x|}_{=|\lambda|.2|x|} + \underbrace{|\lambda y|}_{=|\lambda|.|y|} \\ & = & |\lambda|(2|x|+|y|) \\ N(\lambda(x,y)) & = & |\lambda|.N(x,y). \end{array}$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a :

$$\begin{array}{rcl} N((x,y)+(x',y')) & = & N(x+x',y+y') \\ & = & \underbrace{2|x+x'|}_{\leq 2|x|+2|x'|} + \underbrace{|y+y'|}_{\leq |y|+|y'|} \\ & \leq & 2|x|+|y|+2|x'|+|y'| \\ N((x,y)+(x',y')) & = & N(x,y)+N(x',y'). \end{array}$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$. De plus, en étudiant l'équation $N(x,y) = 1$ sur les quatre cadrants de $\mathbb{R}^2$, on obtient, pour la sphère unité de N :



Exercice 3.

On considère l'espace vectoriel $E = C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et, pour $f \in E$, on considère :

$$\|f\| = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur E.

Correction.

Tout d'abord, montrons que l'application $\|\cdot\|$ est bien définie sur E. Soit $f \in E$.
La fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-t^2}$ est continue (comme produit de fonctions continues), positive sur $[0, +\infty[$.
Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
<u>en $+\infty$:</u> comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \nu \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq M$. Par suite, on a, par croissances comparées :

$$t^2|f(t)|e^{-t^2} \leq Mt^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

d'où :

$$|f(t)|e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ (2>1), donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

De plus, $t \mapsto |f(t)|e^{-t^2}$ étant continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\|f\|$ est bien défini.

Désormais, montrons que $\|\cdot\|$ est une norme sur E. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) Comme $t \mapsto |f(t)|e^{-t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, par positivité de l'intégrale, $\|f\| \geq 0$.

ii) (Séparation) On suppose que $\|f\| = 0$. La fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale nulle, donc, c'est la fonction nulle. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)|\underbrace{e^{-t^2}}_{\neq 0} = 0$,
d'où, $|f(t)| = 0$ et donc $f(t) = 0$.
Par suite, $f = 0$.

iii) (Homogénéité) On a, par linéarité de l'intégrale (convergente) :

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\| &= \int_0^{+\infty} |\lambda f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} |\lambda|.|f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= |\lambda| \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
\|\lambda f\| &= |\lambda|.\|f\|.
\end{aligned}$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a, par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \int_0^{+\infty} \underbrace{|f(t)+g(t)|}_{\leq |f(t)|+|g(t)|} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} (|f(t)|+|g(t)|)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} |g(t)|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
\|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

Exercice 4.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

Correction.

On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P)+N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda|N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t \in [-1,1]$, on en déduit que

$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda|N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.

Exercice 5.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty,\ N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.

Correction.

Remarquons d'abord que N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et prenons $f, g \in E$. Alors on a $N(f) = 0$ si et seulement $f(0) = 0$ et $f' \equiv 0$. La deuxième condition entraîne que f est constante sur $[0,1]$ et la première que f est identiquement nulle. De plus, on a clairement $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$ et

$$N(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$

N est une norme, et la preuve est identique, mais plus simple, pour N'.

Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes. On considère l'application $\|\cdot\|$ définit par :

$$\text{pour } u = (u_n) \in E, \qquad \|u\| = \lim_{n\to\infty} |u_n|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E i.e. $\|.\|$ vérifie tous les axiomes d'une norme excepté l'axiome de séparation.
2. Donner un exemple de suite qui ne satisfait pas à l'axiome de séparation.

Correction.

1. Soit $u = (u_n), v = (v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $U = \lim_{n\to\infty} |u_n|$ et $V = \lim_{n\to\infty} |v_n|$.
   - *Positivité* $\|u\| = \lim_{n\to\infty} |u_n| = |U| \geq 0$.
   - *Homogénéité* $\|\lambda u\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda u_n| = |\lambda||U| = |\lambda|\|u\|$.
   - *Inégalité triangulaire*
   $$\begin{aligned} \|u+v\| &= \lim_{n\to\infty} |u_n + v_n| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} |u_n| + |v_n| \\ &\leq |U| + |V| = \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$
2. *Séparation non vérifiée :* Une suite qui converge vers 0 a une "norme" égale à 0 ! Or si elle possède au moins un terme non nul (on peut prendre par exemple $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$), elle est différente de la suite constante en 0 (qui constitue le vecteur nul de E). Donc l'axiome de séparation n'est pas vérifié.

Exercice 7.

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$ et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$, $\lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.
2. $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et x, y deux vecteurs de E tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors $x \in \text{vect}(y)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$. Alors $N : P \mapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.

Correction.

1. Non ! $\lambda B(x, r) = B(\lambda x, \lambda r)$ et la formule proposée ne fonctionne que si $x = 0$.
2. Posons $y = 5$ et $x = -3$. Alors $5x + 3y = 0$, d'où $N(-3, 5) = 0$ sans que $(-3, 5)$ ne soit le vecteur nul. N n'est pas une norme !
3. On va donner un contre exemple avec $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Prenons en effet $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$. Alors $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = 2$ alors que (x, y) est libre.
4. Oui. La seule difficulté est de montrer que $N(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si P est un polynôme de degré un (donc une fonction affine) qui s'annule en 0 et en 1, alors P est identiquement nul.

Exercice 8.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante 2 peut elle être améliorée ?
2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, on a
$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$
En déduire que
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante $\sqrt{2}$ peut elle être améliorée ?

Correction.

1. On écrit
$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$
de sorte que, par l'inégalité triangulaire,
$$\|x\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right).$$
De même, on a
$$\|y\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x+y\| + \|x-y\|\right)$$
et en sommant les deux inégalités, on a l'inégalité demandé. Puisque $\|x+y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$ et que $\|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$, on a finalement aussi
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$
La constante 2 ne peut pas être améliorée, car elle est parfois atteinte avec $\|x\| \neq 0$ et $\|y\| \neq 0$. C'est le cas en effet par exemple pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ lorsque $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.
2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont est issu la norme. Alors
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle,$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle,$$
d'où
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (\|x\|^2 + \|y\|^2)\\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\\ &\geq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$
Puisque $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$, on obtient bien la deuxième inégalité demandée. Enfin, la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être améliorée. Elle est atteinte sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique lorsque $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

Exercice 9.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors si N est une norme, on sait que $N(e_k) = a_k > 0$, et donc il est nécessaire que tous les a_k soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet, N est alors bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il est clair que l'on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ et que, si $N(x) = 0$, alors

$$a_1|x_1| + \dots a_n|x_n| = 0 \implies x = 0$$

puisqu'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul. Enfin, l'inégalité triangulaire se prouve simplement comme pour la norme $\|\cdot\|_1$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{array}{rcl} N(x+y) & = & a_1|x_1+y_1| + \cdots + a_n|x_n+y_n| \\ & \leq & a_1(|x_1| + |y_1|) + \cdots + a_n(|x_n| + |y_n|) \\ & \leq & a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n| + a_1|y_1| + \cdots + a_n|y_n| \\ & \leq & N(x) + N(y). \end{array}$$

Exercice 10.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Démontrer que N est une norme sur E.

Correction.

On vérifie les trois propriétés définissant une norme (on remarque que N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). D'une part, si $N(x) = 0$, alors $N_1(x) = 0$ et donc $x = 0$ puisque N_1 est une norme. Ensuite, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl} N(\lambda x) & = & \max\big(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)\big) \\ & = & \max\big(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x)\big) \\ & = & |\lambda| \max\big(N_1(x), N_2(x)\big) \\ & = & |\lambda| N(x). \end{array}$$

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire pour N. En effet, si x et y sont dans E, alors d'une part

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq N(x) + N(y)$$

et d'autre part

$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq N(x) + N(y).$$

En passant au maximum, on obtient bien

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Exercice 11.

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A)=n\max_{i,j}|a_{i,j}| \text{ si } A=(a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB)\leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Correction.

La démonstration du fait qu'il s'agit une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans $\mathbb{R}^p$. On peut d'ailleurs procéder par isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrons qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en prenant $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en posant $C=AB$. Ecrivons $C=(c_{i,j})$. On a $c_{i,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
n|c_{i,j}| &\leq n\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\\
&\leq n\sum_{k=1}^n \frac{N(A)}{n}\frac{N(B)}{n}\\
&\leq N(A)N(B).
\end{aligned}$$

Exercice 12.

Soit $a,b>0$. On pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N(x,y)=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit nombre $p>0$ tel que $N\leq p\|.\|_2$ et le plus grand nombre q tel que $q\|.\|_2\leq N$.

Correction.

1. Le seul point non immédiat est de vérifier que N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, on s'inspire du même résultat concernant la norme euclidienne usuelle. Prenons en effet $X_1=(x_1,y_1)$ et $X_2=(x_2,y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
N^2(X_1+X_2) &= a^2(x_1+x_2)^2+b^2(y_1+y_2)^2\\
&= a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2a^2x_1x_2+2b^2y_1y_2\\
&= a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2\big((ax_1)(ax_2)+(by_1)(by_2)\big)\\
&\leq a^2x_1^2+a^2x_2^2+b^2y_1^2+b^2y_2^2+2\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2}
\end{aligned}$$

où la dernière ligne est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc obtenu

$$N^2(x_1+y_1,x_2+y_2) \leq \left(\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2}+\sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2}\right)^2 = (N(X_1)+N(X_2))^2$$

ce qui est bien l'inégalité triangulaire voulue. On pouvait aussi remarquer que N est la norme issue du produit scalaire suivant :

$$\phi((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = a^2x_1x_2+b^2y_1y_2.$$

2. (x,y) est dans cette boule si et seulement si $a^2x^2+b^2y^2\leq 1$. On reconnait une ellipse dont les extrémités des axes sont les points $\left(\pm\frac{1}{a},0\right)$ et $\left(0,\pm\frac{1}{b}\right)$.
3. Supposons par exemple $a\leq b$. Alors, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a

$$N(x,y)\leq\sqrt{b^2x^2+b^2y^2}\leq b\|(x,y)\|_2.$$

De plus, pour tous les éléments de la forme $(0,y)$, on a égalité. Le nombre p recherché est donc $\max(a,b)$. Un raisonnement similaire montre que le nombre q recherché est $\min(a,b)$.

Exercice 13.

Sur $E=\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}|P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P)=\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n=\frac{1}{n}X^n$.

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout $k\geq 0$,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)|\leq|P^{(k)}(0)|+|Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q)\leq N_1(P)+N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P)=|\lambda|N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P)=0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P=0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t\in[-1,1]$,

$$|(P+Q)(t)|\leq|P(t)|+|Q(t)|\leq N_2(P)+N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t\in[-1,1]$, on en déduit que

$$N_2(P+Q)\leq N_2(P)+N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P)=|\lambda|N_2(P)$, et si $N_2(P)=0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P=0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.

2. On a
$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$
Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2, mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1.

Exercice 14.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose
$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.

Correction.

1. Posons, pour $f, g \in E$, $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f,f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $f' = 0$ donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilineaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.
2. Soit $x \in [0,1]$. Alors on écrit
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$
On en déduit que
$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt.$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire
$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x |f'(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$
On applique ensuite (encore !) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que
$$|f(x)| \leq \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} \times \left(1^2 + 1^2\right)^{1/2}.$$
Prenant le sup pour $x \in [0,1]$, on en déduit bien que
$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f).$$

b. Exercices d'entraînement

Exercice 15.

Pour tout $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

On va démontrer que N est la norme issue d'un produit scalaire (remarquons que pour le moment, nous n'avons pas encore prouvé que N est toujours définie). Pour cela, on procède par polarisation, et pour $x = (a, b)$, $x' = (a', b')$, on pose

$$\phi(x, x') = aa' + a'b + ab' + 5bb'.$$

ϕ est clairement une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$, il reste à voir qu'elle est définie et positive. Mais on a

$$\phi(x, x) = a^2 + 2ab + 5b^2 = (a + b)^2 + 4b^2$$

(l'idée est ici de reconnaitre dans $a^2 + 2ab$ le début du développement d'un carré). On en déduit que l'on a toujours $\phi(x, x) \geq 0$ et de plus, si $\phi(x, x) = 0$, alors on a $(a + b) = 0$ et $b = 0$, ce qui entraîne bien sûr $a = b = 0$. Ainsi, N est la norme associée au produit scalaire ϕ.

Exercice 16.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera N la norme associée.
2. Démontrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Correction.

1. Il est très facile de vérifie que $\langle ., .\rangle$ définit une forme bilinéaire symétrique. Reste à démontrer qu'elle est définie positive. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $(b_{i,j}) = A^T A$. Alors

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0.$$

On a bien affaire à une forme positive. De plus, si $\langle A, A\rangle = 0$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, n$, on a $a_{k,i} = 0$, et donc $A = 0$: la forme est définie.

2. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de sorte que $AB = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

On a alors

$$N(AB)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right)^2.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$ à la somme sur k. On en déduit que

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{j,k} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}^2 \right) \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

c. Exercices d'approfondissement

Exercice 17. *(∗) Les normes p sur $\mathbb{R}^n$, pour $1 < p < +\infty$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. En déduire que, pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{\frac{1}{q}};$$

puis montrer que cette dernière inégalité est toujours vraie quand $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+$.

Cette inégalité est connue sous le nom de **Inégalité de Hölder**.

3. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'**inégalité de Minkowski**, i.e. pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_+$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et l'application de $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Correction.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^p$. Celle-ci est convexe sur $\mathbb{R}_+$. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto x^{p-1}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$ car $p - 1 > 0$.
Remarque : on aurait pu utiliser la dérivée seconde de f et montrer qu'elle est positive, mais ceci seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et non $\mathbb{R}_+$ dans le cas où $1 < p < 2$ car pour ces valeurs de p, f n'est pas deux fois dérivable en 0.
Soit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on applique l'inégalité de Jensen à la fonction f et à la famille de points pondérés $\left((x_i, \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i})\right)_{1\leq i\leq n}$ (on remarque que la somme des pondérations est bien égale à 1) :
$$\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^p \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p.$$
Ce qui nous donne le résultat demandé en appliquant la racine p-ième (fonction croissante) de l'inéquation puis en la multipliant par $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

2. On obtient le résultat en appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $\lambda_i = b_i^p$ et $x_i = a_i(b_i)^{-\frac{q}{p}}$ pour $i = 1, ..., n$ (il faut également remarquer que $q = \frac{p}{p-1}$).
Maintenant, pour $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_n$; on note $I = \{i \mid b_i \neq 0\}\}$, et on applique l'inégalité précédente aux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$. Alors :
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i\in I} a_i b_i \leq \left(\sum_{i\in I}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i\in I}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. On remarque, pour $i = 1, ..., n$, $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, d'où
$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$
On applique alors l'inégalité de Hölder aux deux sommes obtenus avec $a_i = x_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la première somme et $a_i = y_i$ et $b_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ pour la deuxième somme. Par suite,
$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$
D'où le résultat.

4. Montrons que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Il est clair que $\|\cdot\|_p$ est positive.
Soit $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda_i n\mathbb{R}$.
   - *Séparation :* Si $\|x\|_p=0$, alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^p=0$ donc pour $i=1,...,n$, $x_i=0$. Par suite, $x=(0,...,0)$.
   - *Homogénéité :* On a $\|\lambda x\|_p^p=|\lambda|^p\sum_{i=1}^n |x_i|^p$ donc $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\|x\|_p$.
   - *Inégalité triangulaire :* On a :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{d'après 3)} \\
&\leq \|x\|_p+\|y\|_p
\end{aligned}$$

   Donc $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 18.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A=\sup_{x\in A}|P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Correction.

Une première condition nécessaire sur A apparaît en remarquant qu'il faut que $\|P\|_A<+\infty$ pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$. C'est en particulier vrai pour le polynôme $P(X)=X$ et donc il est nécessaire que A soit bornée. Une seconde condition nécessaire apparaît quand on écrit que $\|P\|_A=0 \implies P=0$. Supposons en effet que $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ soit fini. Alors prenons $P(X)=(X-a_1)\cdots(X-a_n)$. Alors on a $\|P\|_A=0$ et pourtant $P\neq 0$. Réciproquement, prouvons que si A est une partie infinie bornée, alors $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. D'une part, cette quantité est bien finie et positive pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$. D'autre part, vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme :

1. On a toujours, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$, $\sup_{x\in A}|\lambda P(x)|=|\lambda|\times\sup_{x\in A}|P(x)|$ et donc $\|\lambda P\|_A=|\lambda|\times\|P\|_A$.
2. Si $\|P\|_A=0$, alors P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.
3. Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. Alors, pour tout $x\in A$,

$$|P(x)+Q(x)|\leq|P(x)|+|Q(x)|\leq\|P\|_A+\|Q\|_A.$$

   En passant au sup, on obtient que $\|P+Q\|_A\leq\|P\|_A+\|Q\|_A$. En conclusion, $\|\cdot\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A est une partie infinie bornée.