Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°2

Exercices obligatoires

- Pour la semaine du 15 Septembre : 1, 4, 8, 10, 17, 20.
- Pour la semaine du 22 Septembre : 24, 25.

Exercices en groupes :

- exo n°3 Groupe 1 : Maxence ; Thibault ; Clément ; Maxime ;
- exo n°11 Groupe 2 : Augustin ; Michèle ; Camil ; Rayan ;
- exo n°14 Groupe 3 : Raphaël ; Ambroise ; Tredy ; Malarvijy ;
- exo n°23 Groupe 4 : Lucas ; Luca ; Daniel ; Ingrid ;
- exo n°12 (1 et 2) Groupe 5 : Adrien ; Ernest ; Constant ; Sébastien ;

1. Convexité

Exercice 1.

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1 + C_2 = \{x + y;\ x \in C_1,\ y \in C_2\}$. Démontrer que $C_1 + C_2$ est convexe.

Correction.

Soit $z_1,\ z_2 \in C_1 + C_2$ et $t \in]0,1[$. Alors $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$. On a alors $(1-t)z_1 + tz_2 = x + y$ avec $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in C_1$ et $y = (1-t)y_1 + ty_2 \in C_2$ par convexité respective de C_1 et C_2. Ainsi, $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 2.

Soit $\mathscr{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$).

Correction.

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tous réels α et β et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$,

$$((1-\lambda)\alpha+\lambda\beta)^2 \leqslant (1-\lambda)\alpha^2+\lambda\beta^2.$$

Soient $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\frac{((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)^2}{a^2}+\frac{((1-\lambda)y_1+\lambda y_2)^2}{b^2} &\leqslant \frac{(1-\lambda)x_1^2+\lambda x_2^2}{a^2}+\frac{(1-\lambda)y_1^2+\lambda y_2^2}{b^2}\\ &=(1-\lambda)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)\\ &\leqslant (1-\lambda)+\lambda \text{ (car } 1-\lambda\geqslant 0 \text{ et } \lambda\geqslant 0)\\ &=1.\end{aligned}$$

On a montré que pour tous $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathscr{E}^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2) \in \mathscr{E}$. Donc, $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1+(1-s)C_2 = \{sx+(1-s)y;\ x\in C_1,\ y\in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Correction.

Soit $z_1, z_2 \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$ tels que

$$z_1 = sx_1+(1-s)y_1,\ \ z_2 = sx_2+(1-s)y_2.$$

Mais alors
$$tz_1+(1-t)z_2 = s(tx_1+(1-t)x_2)+(1-s)(ty_1+(1-t)y_2).$$

Par convexité respective de C_1 et C_2, $tx_1+(1-t)x_2 \in C_1$ tandis que $ty_1+(1-t)y_2 \in C_2$. On en déduit que C est bien une partie convexe de E.

Exercice 4.

1) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

1) Les matrices I_n et $-I_n$ sont deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$. Mais $\frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}(-I_n) = 0_n$ n'est pas un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices stochastiques et soit $\lambda \in [0,1]$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $(1-\lambda)A + \mu B$ est $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}$.

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \geqslant 0$, $b_{i,j} \geqslant 0$ et on a aussi $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$. Donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geqslant 0$.

• Puisque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_{i,j} \geqslant 1$ et $b_{i,j} \geqslant 0$ et que $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
on a $(1-\lambda)a_{i,j} \leqslant 1-\lambda$ et $\lambda b_{i,j} \leqslant \lambda$ puis $(1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \leqslant 1-\lambda+\lambda = 1$.

• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\sum_{j=1}^{n} ((1-\lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1-\lambda+\lambda = 1.$$

On a montré que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de E l'ensemble

$$K(E) = \bigcap_{A\in\mathcal{E}(E)} A$$

où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E.

1. Démontrer que $K(E)$ est convexe.
2. Déterminer $K(E)$ lorsque E est la courbe de la fonction $y = \tan x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Correction.

1. Soit $x, y \in K(E)$ et $t \in]0,1[$. Soit A un convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant E. Alors $x \in A$ et $y \in A$. Par convexité de A, on en déduit que $tx + (1-t)y \in A$. Comme ceci est vrai pour tous les convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E, on a bien $tx + (1-t)y \in K(E)$, et ce dernier ensemble est convexe. Plus précisément, l'enveloppe convexe de E est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant E.
2. On va prouver que l'enveloppe convexe de E est l'ensemble $F = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$. En effet, F est convexe et contient E. Réciproquement, prenons un point $M = (x_0, y_0)$ de F. Si $y_0 = \tan(x_0)$ alors $M \in E \subset K(E)$. Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $\tan(x_0) < y_0$. Considérons $x_1 < x_0$ tel que $x_1 > -\pi/2$ et considérons A le point de E de coordonnées $(x_1, \tan(x_1))$. La droite (AM) a pour équation $y - \tan(x_1) = m(x - x_1)$ où m est le coefficient directeur de la droite (on peut bien sûr le calculer, mais sa valeur n'a pas d'importance). Considérons alors la fonction définie sur $[x_1, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - m(x - x_1) - \tan(x_1)$. Alors, puisque M est sur la droite (AM), on a $y_0 = m(x_0 - x_1) + \tan(x_1)$ et donc $f(x_0) = \tan(x_0) - y_0 < 0$. D'autre part, $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue, il existe $x_2 \in]x_0, \pi/2[$ tel que $f(x_2) = 0$. Autrement dit, le point $B = (x_2, \tan(x_2))$ est à la fois sur E et sur la droite (AM). On a donc M qui appartient au segment $[AB]$ avec A et B des points de E. Ceci implique que $M \in K(E)$.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Correction.

Soit $x_0 \in I$. On va démontrer que f est continue à droite en x_0. La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a < x_0$ et $b > x_0$ tels que $a, b \in I$. Alors, d'après l'inégalité des pentes, pour tout $x \in]x_0, b]$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

ce qui donne

$$(x - x_0)\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Le résultat devient faux si $I = [0, 1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A. On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A.

Correction.

1. Soit A_1, A_2 deux parties convexes de E. Soit $u, v \in A_1 \cap A_2$. Alors, par convexité, $[u, v] \subset A_1$ et $[u, v] \subset A_2$; donc $[u, v] \subset A_1 \cap A_2$. Par suite $A_1 \cap A_2$ est convexe.

   Il en est de même dans le cas général : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de convexe où I est un ensemble d'indice quelconque. Soit $u, v \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Alors, par convexité, pour tout $i \in I$, $[u, v] \subset A_i$. Donc $[u, v] \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.

   Concernant la réunion de deux convexes, le résultat n'est pas convexe en général : prendre deux singletons distincts par exemple dans un espace vectoriel de dimension au moins 1.
2. Soit C l'intersection de tous les convexes contenant A. Alors C est convexe d'après la ques-

tion précédente et il contient A. Or si C' est un convexe contenant A, alors par définition, on a $C \subset C'$. Donc C est le plus petit convexe contenant a pour l'inclusion.

3. Soit Γ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A.
   — Alors A est inclus dans Γ (il suffit de voir chaque point a de A comme le barycentre de $(a, 1)$ par exemple). Montrons que de plus Γ est convexe.
   Soit $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $g' = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ appartenant à Γ (on a supposé, quitte à diviser par les sommes de pondérations respectives, que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$).
   Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $tg + (1-t)g' = \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-t)\mu_i y_i$ est le barycentre à coefficients positifs de la famille de points de A pondérés $((x_1, t\lambda_1), ..., (x_n, t\lambda_n), (y_1, (1-t)\mu_1), ..., (y_m, (1-t)\mu_m))$ (il faut aussi remarquer que $t1 + (1-t)1 = 1$), donc, par définition, c'est un élement de Γ. Par suite, Γ est convexe.

   Il en résulte que $\mathrm{Conv}(A) \subset \Gamma$.

   — On a $A \subset \mathrm{Conv}(A)$ donc tout élément Γ est en particulier un barycentre de points de $\mathrm{Conv}(A)$. Or $\mathrm{Conv}(A)$ est convexe, donc d'après la caractérisation des convexes par les barycentres, tout barycentre à coefficients positifs de points de $\mathrm{Conv}(A)$ est dans $\mathrm{Conv}(A)$. Il en résulte que $\Gamma \subset \mathrm{Conv}(A)$.

   On en conclut que $\mathrm{Conv}(A) = \Gamma$.

2. Intégrales généralisée

Exercice 8.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

Correction.

1. La fonction ln est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geq e$, $\ln(t) \geq 1$; or $\int_e^{+\infty} 1\ dt$ diverge donc par comparaison $\int_e^{+\infty} \ln(t) dt$ diverge et donc $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ également.
   On pouvait également remarquer qu'on connait une primitive de ln, à savoir $x \mapsto x \ln x - x$. On a donc
   $$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t - t]_1^x = x \ln x - x + 1$$
   qui tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$. Ainsi l'intégrale diverge.
2. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remar-

quer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0.$$

Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (critère de Riemann en $+\infty$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. En $+\infty$, $\frac{1}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$. Or $e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o} \frac{1}{t^2}$ car $t^2e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$; donc d'après le critère de Riemann en $+\infty$, on a, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$ est convergente.

4. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$

par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$ est convergente.

Exercice 9.

Quelle est la nature de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$$

Correction.

La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a

$$e^{-\sqrt{\ln t}}t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t}+\alpha\ln t} \to +\infty.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$.

Exercice 10.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0. Pour le traiter, on peut : <ul class="rien">
2. remarquer qu'on connait une primitive de ln, à savoir $x \mapsto x\ln x - x$. On a donc
$$\int_X^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_X^1 = -X\ln X + X - 1$$
qui tend vers -1 si X tend vers 0.
3. comparer : On sait que $\sqrt{x}\ln x \to 0$ quand $x \to 0$. Ceci signifie que $\ln x = o(1/\sqrt{x})$ en 0. Puisque $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, on en déduit par critère de comparaison que $\int_0^1 \ln x dx$ converge.
4. Ici, on ne connait pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0.$$
Autrement dit, $e^{-x^2} = o(1/x^2)$. Ainsi, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
5. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$, $|xe^{-x}\sin x| \leq xe^{-x}$. D'autre part, puisque $x^3 e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on en déduit que $xe^{-x}\sin(x) = o(1/x^2)$. Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.
6. La fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$, fonction négative au voisinage de 0 et intégrable. Par comparaison, $\int_0^1 \ln t e^{-t} dt$ converge. Au voisinage de l'infini, on remarque que $t^2 \ln t e^{-t}$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Ainsi, $\ln t e^{-t} =_{+\infty} o(1/t^2)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$ converge. Ainsi, on a prouvé la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$.
7. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1). Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt$ diverge.

Exercice 11.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, $\frac{1}{e^t-1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^1 \frac{dt}{e^t-1}$ est divergente. A fortiori, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$ est divergente.
2. La fonction $t \mapsto \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$, on a
$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} = \lim_{t\to+\infty} te^{-\sqrt{t}} = 0$$
par croissance comparée des fonctions polynomiales et exponentielles. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt$ est convergente.
3. La fonction $t \mapsto \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, on a
$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$
Puisque $\int_0^1 1dt$ converge (ce n'est même pas une vraie intégrale généralisée), on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(1/t)dt$ est aussi convergente.

Exercice 12.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, elle est équivalente à $\ln t$ qui est intégrable au voisinage de 0. En $+\infty$, on écrit simplement que
$$\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0.$$
Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ converge.

2. La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. En 1, on sait que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \implies \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x-1}} = 1$$

et donc

$$\frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 1. En l'infini, l'idée est que le $\sqrt{\ln x}$ ne compte presque pas par rapport à $x^{3/2}$. Précisément, on écrit que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{5/4} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{1/4}} = 0.$$

Ainsi, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction est intégrable sur $]1,+\infty[$.

3. La difficulté de cette question est qu'il est plus difficile d'avoir une intuition sur la façon dont se comporte $e^{-\sqrt{\ln t}}$. Soit $\alpha > 0$. On va comparer la fonction à $\frac{1}{t^\alpha}$. On a

$$e^{-\sqrt{\ln t}} t^\alpha = e^{-\sqrt{\ln t}+\alpha \ln t} \to +\infty.$$

Ainsi, en choisissant $\alpha = 1$, $\frac{1}{t} = o(e^{-\sqrt{\ln t}})$. Puisqu'on travaille avec des fonctions positives, et que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$.

Exercice 13.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Correction.

1. Soit $\gamma \in]1,\alpha[$. Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \to 0$$

et donc, en notant f la fonction, on a

$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f$.

2. Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $u'u^{-\beta}$. Elle admet donc une primitive de la forme $\frac{1}{-\beta+1}u^{-\beta+1}$ si $\beta \neq 1$, et de la forme $\ln|\ln u|$ si $\beta = 1$. Pour $\beta \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1}\left((\ln X)^{-\beta+1} - 1\right)\end{aligned}$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, ceci admet une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Dans le cas où $\beta = 1$, la primitive se calcule un peu différemment :

$$\int_e^X \frac{dt}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_e^X = \ln|\ln X| - \ln|\ln e| = \ln\ln X.$$

Ceci tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale n'est pas convergente.

3. On remarque que

$$\frac{\frac{1}{t}}{f(t)} = t^{\alpha-1}(\ln t)^\beta \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t} =_{+\infty} o\big(f(t)\big).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f(t)dt$.

En conclusion, l'intégrale étudiée converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 14.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.
2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Correction.

1. Posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors les hypothèses nous disent que F admet une limite ℓ en $+\infty$. Or,

$$\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt = F(y_n) - F(x_n) \to \ell - \ell = 0.$$

2. Posons $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = (2n+2)\pi$. Alors si $t \in [x_n, y_n]$, on a $t\sin t \leq 0$ et donc $e^{-t\sin t} \geq e^0 = 1$. On en déduit que $\int_{x_n}^{y_n} e^{-t\sin t}dt \geq 1$. En particulier, cette quantité ne tend pas vers zéro, et donc l'intégrale est divergente.

Exercice 15.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt \qquad \textbf{2.}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})\, dx$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction se prolonge par continuité en 0, puisque $t \ln t \to 0$ lorsque t tend vers 0. De plus, au voisinage de $+\infty$, la fonction est équivalente à $\frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$. On distingue alors deux cas :
   - Si $\alpha \leq 1$, alors $2\alpha - 1 \leq 1$, et donc $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, on en déduit que l'intégrale est divergente.
   - Si $\alpha > 1$, alors $2\alpha - 1 > 1$. L'idée est que le terme le plus important est le dénominateur, $\frac{1}{t^{2\alpha-1}}$. Le logarithme au numérateur nous ennuie un peu, mais on va le traiter en réduisant un peu l'exposant du dénominateur. Précisément, soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < 2\alpha - 1$. Alors on a
   $$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{-\delta} \ln t \to 0$$
   avec $-\delta = \gamma - (2\alpha - 1) < 0$. On en déduit que
   $$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$
   Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ et par suite de $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$.

   En conclusion, l'intégrale est convergente ssi $\alpha > 1$.
2. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il peut y avoir éventuellement deux problèmes, l'un en 0, l'autre en $+\infty$. Pour $\alpha \geq -1$, on a au voisinage de $+\infty$
   $$f(x) \geq x^\alpha \geq 0.$$
   Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ diverge (on a supposé $\alpha \geq -1$), il en est de même de $\int_0^{+\infty} f$. On peut donc se concentrer sur le cas $\alpha < -1$. Séparons alors l'étude en 0 et celle en $+\infty$.
   (a) En 0. On a $e^{\alpha x} \to 1$ et donc $\ln(1 + e^{\alpha x}) \to 0$. Pour en savoir un peu plus, il faut faire un développement limité. Utilisant $e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + o(x)$, on trouve
   $$f(x) = x^\alpha \ln\big(1 + (\alpha+1)x + o(x)\big) = x^\alpha\big((\alpha+1)x + o(x)\big) = (\alpha+1)x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1}).$$
   On en déduit que $f \sim_0 (\alpha+1)x^{\alpha+1}$ (remarquons que $\alpha + 1 \neq 0$ puisque $\alpha < -1$). Puisqu'on a affaire à des fonctions qui gardent un signe constant, on en déduit que $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\int_0^1 x^{\alpha+1} dx$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$ soit $\alpha > -2$.
   (b) En $+\infty$. On fait un développement limité de $\ln(x + e^{\alpha x})$. Puisque $\alpha < -1$, on sait que $e^{\alpha x}$ tend vers 0 en $+\infty$, d'où
   $$\ln(x + e^{\alpha x}) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{\alpha x}}{x}\right) = \ln(x) + o(1).$$

On en déduit que

$$f(x) \sim_{+\infty} x^\alpha \ln x.$$

On se ramène à une intégrale de Bertrand. Rappelons pourquoi dans le cas particulier de l'exercice elle est convergente. Puisque $\alpha < -1$, on peut choisir $\gamma \in]\alpha, -1[$. Mais alors,

$$x^\alpha \ln x = o(x^\gamma) \text{ (faire le quotient des deux quantités)}$$

et comme $\int_1^{+\infty} x^\gamma dx$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} f$.

En conclusion, on a prouvé que l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha \in]-2, -1[$.

Exercice 16.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right) dt$

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx,\ a \in \mathbb{R}.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt.$

Correction.

1. La fonction $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1[$. Le problème de convergence de l'intégrale est donc en 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité en 1 en posant $x = 1+u$. Lorsque x tend vers 1, u tend vers 0. De plus,

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{x} &= 1-\sqrt{1+u} \\ &= 1-\big(1+u/2+o(u)\big) \\ &= -u/2+o(u) \\ &\sim_0 (1-x). \end{aligned}$$

La fonction est donc équivalente en 1 à $\frac{1}{1-x}$. Cette dernière fonction n'est pas intégrable (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$ est divergente.

2. La fonction que l'on cherche à intégrer est continue sur $[0,+\infty[$. Il faut étudier le problème en $+\infty$. Puisque $\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, il y a une forme indéterminée et le problème n'est pas trivial. On va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) &= -\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit, en notant f la fonction, que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(t) = 1 - 1 + \frac{1}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \implies f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t}.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

3. On factorise par le terme dominant dans la racine, puis on effectue un développement limité de $(1+u)^\alpha$:

$$(x^4 + x^2 + 1)^{1/2} = x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2}.$$

On effectue le développement limité jusqu'aux termes en $1/x^4$. Posant

$$u = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

on a

$$u^2 = \frac{1}{x^4} + o(1/x^4)$$

et donc

$$\begin{aligned} x^2\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} &= x^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

De même, on prouve que

$$x\sqrt[3]{x^3 + ax} = x^2 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En soustrayant les deux développements limités, et en notant f la fonction, on obtient que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} + \left(\frac{3}{8} + \frac{a^2}{9}\right)\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On distingue alors deux cas :

— Si $a \neq 3/2$, alors la fonction est équivalente à $\frac{1}{2} - \frac{a}{3}$, et donc l'intégrale est divergente.

— Si $a = 3/2$, la fonction est équivalente à $\frac{5}{8x^2}$, et donc l'intégrale est convergente.

4. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ est clairement continue sur $]0, +\infty[$. Pour étudier le problème en $+\infty$, il suffit de remarquer que

$$f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$, ce qui montre la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. En 0, on fait un développement limité pour étudier le comportement. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t} &= \frac{1}{t-t^2/2+o(t^2)}-\frac{1}{t}\\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-t/2+o(t)}-1\right)\\
&= \frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)-1\right)\\
&= \frac{1}{2}+o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=1/2$. Ceci achève de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 17.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n=\int_0^1(\ln x)^n dx$.

Correction.

La fonction $x\mapsto(\ln x)^n$ est continue sur $]0,1]$. De plus, au voisinage de 0, on a

$$(\ln x)^n = o(1/\sqrt{x}).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann, l'intégrale est convergente en 0. On va obtenir une formule de récurrence pour exprimer I_n en fonction de I_{n-1} en réalisant une intégration par parties. Pour cela, prenons $a\in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^1(\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_a^1 - n\int_a^1\frac{x(\ln x)^{n-1}}{x}dx\\
&= -a(\ln a)^n - n\int_a^1(\ln x)^{n-1}dx.
\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0 et on obtient, puisque $a(\ln a)^n\to 0$ lorsque $a\to 0$,

$$I_n = -n\int_0^1(\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1}.$$

Par récurrence, on prouve alors facilement que

$$I_n=(-1)^n n! I_0.$$

Or, $I_0=1$, et donc $I_n=(-1)^n n!$.

Exercice 18.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty}\frac{f(1/x)}{1+x^2}dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n\geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$.

Correction.

1. Soit $M>0$ tel que $|f(t)|\leq M$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$. La fonction $x\mapsto\frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0,+\infty[$, et elle vérifie $|\frac{f(x)}{1+x^2}|\leq\frac{M}{1+x^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}dx$ converge. De même, $x\mapsto\frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0,+\infty[$ (attention, on n'a plus obligatoirement continuité en 0). Le problème en $+\infty$ se traite exactement comme précédemment, et en 0, il suffit d'observer que
$$\frac{|f(1/x)|}{1+x^2}\leq M,$$
et comme les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de tout point, on a aussi prouvé la convergence de l'intégrale au voisinage de 0.
2. Effectuons le changement de variables $u=1/x$. On trouve
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{f(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-1}{u^2}du=\int_0^{+\infty}\frac{f(1/x)}{1+x^2}dx.$$
3. On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0,+\infty[$). On trouve
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx:=A.$$
Mais si on effectue la somme de ces deux intégrales, on trouve :
$$2A\ =\ \int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$
Ces deux intégrales sont donc égales à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 19.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty}\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X\to+\infty}\int_X^{X+1}\arctan(x)dx=\frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1\arctan(x)dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty}\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx$

Correction.

1. Par l'inégalité des accroissements finis, et puisque la dérivée de arctan est une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$, on sait que, pour tout $x\geq 0$, on a
$$|\arctan(x+1)-\arctan(x)|\leq \frac{1}{1+x^2}\times (x+1-x)=\frac{1}{1+x^2}.$$
Par comparaison à une intégrale de Riemann (convergente), la fonction $x\mapsto \arctan(x+1)-\arctan(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Soit $\varepsilon>0$. La fonction arctan croit vers $\pi/2$ en $+\infty$. Il existe donc un réel A tel que, pour tout $x\geq A$, on a
$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leq \arctan x\leq \frac{\pi}{2}.$$
Mais alors, pour $X\geq A$, en intégrant cette dernière inégalité entre X et $X+1$, on a
$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leq \int_X^{X+1}\arctan(x)dx\leq \frac{\pi}{2}$$
ce qui prouve bien ce que nous voulions démontrer. Une autre méthode est de remarquer que, puisque la fonction arctan est croissante, pour tout $x\in[X,X+1]$, on a
$$\arctan X\leq \arctan x\leq \arctan(X+1).$$
Par intégration, on a
$$\arctan X\leq \int_X^{X+1}\arctan(x)dx\leq \arctan(X+1).$$
Mais $\arctan(X)\to\pi/2$ et $\arctan(X+1)\to\pi/2$ lorsque $X\to+\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\int_X^{X+1}\arctan(x)dx$ tend vers $\pi/2$ également.
3. Calculons cette intégrale par intégration par parties. En effet,
$$\begin{aligned}\int_0^1\arctan(x)dx &= [x\arctan x]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$
4. Posons, pour $X>0$, $F(X)=\int_0^X\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx$. Alors
$$\begin{aligned}F(X) &= \int_0^X\arctan(x+1)dx-\int_0^X\arctan(x)dx\\ &= \int_1^{X+1}\arctan(x)dx-\int_0^X\arctan(x)dx\\ &= \int_X^{X+1}\arctan(x)dx-\int_0^1\arctan(x)dx.\end{aligned}$$
D'après les questions précédentes, en faisant tendre X vers $+\infty$, on en déduit que
$$\int_0^{+\infty}\big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 20.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}dt,\ a>0.$

Correction.

1. Au voisinage de 0, la fonction à intégrer est équivalente à $\ln t$, qui est une fonction intégrable en 0. Au voisinage de 1, on a

$$\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim_1 \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}.$$

La fonction se prolonge donc par continuité en 1, ce qui achève de prouver la convergence de l'intégrale entre 0 et 1. Pour calculer sa valeur, on réalise le changement de variables $u=\sqrt{1-t}$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt &= 2\int_0^1 \ln(1-u^2)du\\
&= 2\int_0^1 \ln(1-u)du + 2\int_0^1 \ln(1+u)du\\
&= 2\int_0^1 \ln(x)dx + 2\int_1^2 \ln(x)dx\\
&= 2\int_0^2 \ln(x)dx\\
&= 2\left[x\ln x - x\right]_0^2\\
&= 4\ln 2 - 4.
\end{aligned}$$

2. Pour la convergence de l'intégrale, il suffit de remarquer que la fonction est continue sur $[0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$, elle est dominée par $\frac{1}{t^2}$. En effet, on a

$$t^2\times te^{-\sqrt{t}} = t^3e^{-\sqrt{t}} = e^{3\ln t-\sqrt{t}} \to 0 \text{ en } +\infty.$$

Pour le calcul de l'intégrale, on commence par effectuer le changement de variables $u=\sqrt{t}$. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} u^3e^{-u}du.$$

On effectue ensuite des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt &= 2\left[-u^3e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 6\int_0^{+\infty} u^2e^{-u}du\\
&= 6\left[-u^2e^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} ue^{-u}du\\
&= 12\left[-ue^{-u}\right]_0^{+\infty} + 12\int_0^{+\infty} e^{-u}du\\
&= 12.
\end{aligned}$$

3. On remarque d'abord que $|\sin(t)e^{-at}|\leq e^{-at}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $a>0$) et donc la fonction $t\mapsto \sin(t)e^{-at}$ est elle-même intégrable. Pour calculer l'intégrale, il suffit d'écrire que $\sin t$ est la partie imaginaire de e^{it}... Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-at} &= \Im m\left(\int_0^{+\infty}e^{(i-a)t}dt\right)\\ &= \Im m\left(\left[\frac{1}{i-a}e^{(i-a)t}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \Im m\left(\frac{1}{a-i}\right)\\ &= \frac{1}{a^2+1}.\end{aligned}$$

Exercice 21.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}dt \text{ et } J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n\geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $I_n-I_{n-1}=0$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.
5. En déduire que $J_n-I_n\to 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n\to I$.
7. En déduire la valeur de I.

Correction.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$. Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur $2n+1$. Ainsi, il n'y a pas de problèmes de convergence en 0. Le raisonnement est identique pour la fonction $t\mapsto\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$.
2. Il suffit de remarquer que $I_0=\frac{\pi}{2}$ et que, pour tout entier $n\geq 1$, on a grâce à une formule de trigonométrie

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\pi/2}2\cos(2nt)dt=0.$$

3. Ceci résulte d'une intégration par parties. En effet,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt &= -\frac{1}{2n+1}\Bigg(\phi(\pi/2)\cos\big((2n+1)\pi/2\big)-\phi(0)\\ &\quad -\int_0^{\pi/2}\phi'(t)\cos\big((2n+1)t\big)dt.\Bigg)\end{aligned}$$

Puisque
$$\left|\int_0^{\pi/2}\phi'(t)\cos\big((2n+1)t\big)dt\right|\leq\int_0^{\pi/2}|\phi'(t)|dt,$$
on en déduit bien la convergence vers zéro souhaitée.

4. Il est facile de voir que $\phi(t)\sim_0 -\frac{t}{6}$, ce qui prouve que ϕ se prolonge par continuité en 0. De plus, on a
$$\phi'(t)=\frac{t^2\cos t-\sin^2 t}{t^2\sin^2 t}.$$
Pour t tendant vers 0, l'utilisation des développements limités prouve facilement que $\phi'(t)$ tend vers $-1/6$. Par le théorème de prolongement d'une dérivée, ceci prouve que ϕ définit une fonction C^1 sur $[0,\pi/2]$.

5. On a
$$I_n-J_n=\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt,$$
avec $\phi(t)=\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}$. D'après les deux questions précédentes, on a bien $I_n-J_n\to 0$.

6. Ceci vient du changement de variables $u=(2n+1)t$:
$$J_n=\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt\to I.$$

7. On a $I=\lim_n J_n=\lim_n I_n=I_0=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 22.

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $b>a>0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0)=0$. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt=0.$$
2. Déterminer $\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt$ si on ne suppose plus que $f(0)=0$.

Correction.

1. Notons, pour $x>0$, $\varepsilon(x)=\sup\{|f(t)|;\ t\in[ax,bx]\}$. Puisque f est continue en 0 et que

$f(0) = 0$, alors $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Mais on peut écrire que

$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt\right| \leq \varepsilon(x) \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon(x) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ceci tend bien vers 0 si x tend vers 0.

2. Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. Alors d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0.$$

Mais, puisque $\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, on en déduit par linéarité que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 23.

Déterminer la limite, lorsque $x \to 0^+$, de $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Correction.

On sait que $\sin t = t + t^2\varepsilon(t)$ où la fonction ε tend vers 0 en 0. On a donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{2x} \frac{dt}{t} + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt = \ln 2 + \int_x^{2x} \varepsilon(t) dt.$$

Puisque la fonction ε est bornée (disons par M) au voisinage de 0, on a

$$\left|\int_x^{2x} \varepsilon(t) dt\right| \leq Mx \to 0,$$

et donc la limite recherchée est $\ln 2$.

Exercice 24.

Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\arctan t}{t} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t}$, qui est une fonction positive et dont l'intégrale diverge au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison, on déduit que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt.$$

Puisque cette dernière intégrale se calcule aisément, on conclut que

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2} \ln x.$$

Exercice 25.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Correction.

On remarque d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge : en effet, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$. On intègre ensuite par parties, en intégrant $t \mapsto e^{-t}$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$. On obtient, pour $x > 1$,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Or, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{e^{-t}}{t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{e^{-t}}{t} \right).$$

Par intégration des relations de comparaison (les fonctions sont positives et intégrables), on trouve

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt =_{+\infty} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \right).$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}.$$