Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°2

Exercices obligatoires

— Pour la semaine du 15 Septembre : 1, 4, 8, 10, 17, 20.

— Pour la semaine du 22 Septembre : 24, 25.

Exercices en groupes :

— exo n°3 Groupe 1 : Maxence ; Thibault ; Clément ; Maxime ;
— exo n°11 Groupe 2 : Augustin ; Michèle ; Camil ; Rayan ;
— exo n°14 Groupe 3 : Raphaël ; Ambroise ; Tredy ; Malarvijy ;
— exo n°23 Groupe 4 : Lucas ; Luca ; Daniel ; Ingrid ;
— exo n°12 (1 et 2) Groupe 5 : Adrien ; Ernest ; Constant ; Sébastien ;

1. Convexité

Exercice 1.

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $C_1+C_2=\{x+y;\ x\in C_1,\ y\in C_2\}$. Démontrer que C_1+C_2 est convexe.

Exercice 2.

Soit $\mathscr{E}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$ (on utilisera la convexité de la fonction $x\mapsto x^2$).

Exercice 3.

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s\in[0,1]$. On pose $C=sC_1+(1-s)C_2=\{sx+(1-s)y;\ x\in C_1,\ y\in C_2\}$. Démontrer que C est convexe.

Exercice 4.

1) $O_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}\geqslant 0$ et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$) est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe convexe de E l'ensemble

$$K(E) = \bigcap_{A \in \mathcal{E}(E)} A$$

où $\mathcal{E}(E)$ désigne l'ensemble des convexes de $\mathbb{R}^n$ contenant E.

1. Démontrer que $K(E)$ est convexe.
2. Déterminer $K(E)$ lorsque E est la courbe de la fonction $y = \tan x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie de E

1. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de E est convexe. Que dire d'une intersection quelconque de parties convexes ? Que dire d'une réunion de convexes ?
2. Montrer qu'il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A. On appelle cet ensemble *enveloppe convexe* de a et on le note $\mathrm{Conv}(A)$.
3. Montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est égal à l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toute famille finies de points de A.

2. Intégrales généralisée

Exercice 8.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

Exercice 9.

Quelle est la nature de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

Exercice 10.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x e^{-x} dx$ **4.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} dt$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Exercice 11.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

3. $\displaystyle\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 12.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$

Exercice 13.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.
3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $1/t$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Exercice 14.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.

2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 15.

Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt \qquad \textbf{2.}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x+e^{\alpha x}\right)dx$$

Exercice 16.

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)dt$

3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)dx,\ a\in\mathbb{R}.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt.$

Exercice 17.

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.

Exercice 18.

Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}dx$ sont convergentes.
2. Démontrer qu'elles sont égales.
3. Application : pour $n \geq 0$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$.

Exercice 19.

1. Démontrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx$.
2. Démontrer que $\lim_{X\to+\infty} \int_X^{X+1} \arctan(x)dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\int_0^1 \arctan(x)dx$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \big(\arctan(x+1)-\arctan(x)\big)dx$

Exercice 20.

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}dt,\ a>0.$

Exercice 21.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$. Pour chaque entier n, on note

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}dt \text{ et } J_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt.$$

1. Justifier que, pour tout $n\geq 0$, I_n et J_n sont bien définis.
2. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $I_n-I_{n-1}=0$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit $\phi:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\pi/2}\phi(t)\sin\big((2n+1)t\big)dt$ tend vers 0.
4. Démontrer que la fonction $t\mapsto\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.
5. En déduire que $J_n-I_n\to 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que $J_n\to I$.
7. En déduire la valeur de I.

Exercice 22.

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et $b>a>0$ deux réels.

1. On suppose que $f(0)=0$. Démontrer que
$$\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt=0.$$
2. Déterminer $\lim_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}dt$ si on ne suppose plus que $f(0)=0$.

Exercice 23.

Déterminer la limite, lorsque $x\to 0^+$, de $\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt$.

Exercice 24.

Donner un équivalent de $\int_1^x\frac{\arctan t}{t}dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 25.

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.