Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°1

Exercices obligatoires : 1, 14, 18, 21, 24, 36, 44

1. Exercices de révision : fonctions convexes

Exercice 1.

1. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a. \ln b}$.

Correction.

1. On calcule la dérivée seconde de f qui vaut :
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 \ln^2(x)}.$$
Cette fonction est négative sur $]1, +\infty[$. Donc la fonction est concave.
2. Par concavité de f, on a :
$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}(\ln \ln a + \ln \ln b) = \ln\left(\sqrt{\ln a \ln b}\right).$$
On compose par la fonction exponentielle qui est croissante pour obtenir le résultat.

Exercice 2.

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a
$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Correction.

Puis $(\sin)'' = -\sin$, la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$. Sa courbe représentative est donc, sur cet intervalle, en-dessous de sa tangente en 0, et au-dessus de la corde joignant $(0, \sin 0)$ à $(\pi/2, \sin(\pi/2))$. Or, l'équation de cette tangente est $y = x$, et l'équation de cette corde est $y = \frac{2}{\pi}x$. On obtient exactement le résultat demandé.

Exercice 3.

Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction.

1. f est deux fois dérivable sur $[-1,+\infty[$. De plus, pour tout $x \geq -1$, on a
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \text{ et } f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0.$$
Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq -1$. On en déduit que f est convexe sur $[-1,+\infty[$.
2. Puisque $f'(0) = n$, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(0, f(0))$ est $y - f(0) = f'(0)(x-0)$ soit $y = 1+nx$. La fonction étant convexe, sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. Donc, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 4.

Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp(\lambda x) \leq \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda).$$

Correction.

Nous allons appliquer la définition de la convexité à la fonction exp, avec des points et des coefficients bien choisis. Pour comprendre d'où viennent ces points et ces coefficients, remarquons que l'inégalité que l'on cherche à prouver est équivalente à
$$\exp(\lambda x) \leq \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} + x\frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$
qui est encore équivalente à
$$\exp(\lambda x) \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)e^\lambda + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{-\lambda}.$$
On pose alors $t = \frac{1+x}{2} \in [0,1]$ de sorte que $1-t = \frac{1-x}{2}$ et on applique la définition de la convexité de la fonction exponentielle avec les points λ et $-\lambda$, et avec t. On obtient directement l'inégalité demandée, sous la forme équivalente obtenue ci-dessus.

Exercice 5.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors on a par convexité de f :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Par croissance de g, on en déduit que

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big).$$

La convexité de g permet de conclure à

$$g \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g \circ f(x) + (1-\lambda) g \circ f(y)$$

ce qui signifie bien que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 6.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est toujours convexe ?
2. Est-ce que $\min(f, g)$ est toujours convexe ?

Correction.

Il faut commencer par faire des dessins pour deviner la réponse !

1. Oui ! En effet, soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ et posons $h = \max(f, g)$. On a d'une part

   $$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq th(x) + (1-t)h(y)$$

   et d'autre part

   $$g\big(tx + (1-t)y\big) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \leq th(x) + (1-t)h(y).$$

   On en déduit bien que

   $$h\big(tx + (1-t)y\big) \leq th(x) + (1-t)h(y),$$

   c'est-à-dire que h est convexe.
2. Non ! Choisissons par exemple $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, qui sont convexes car affines. Alors $\min(f, g)(x) = -|x|$, et cette fonction n'est bien sûr pas convexe (par exemple, la courbe représentative est au-dessus de la corde reliant $(-1, -1)$ à $(1, -1)$).

Exercice 7.

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 1$, on a

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Correction.

1. Notons f cette fonction. La fonction f est clairement de classe C^∞ et sa dérivée seconde vérifie
$$f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x+1)^3}.$$
La fonction exponentielle étant croissante, f'' est du signe de $2x - x = x$. Ainsi, $f'' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $f'' \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$. Ainsi, f est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.
2. Posons, pour $i = 1, \dots, n$, $y_i = \ln(x_i) \geq 0$. Appliquons l'inégalité de Jensen à f, aux y_i, avec pour coefficients $1/n$. On obtient
$$f\left(\frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\ln(x_k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}.$$
On conclut en remarquant que
$$\frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right).$$

Exercice 8.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :
$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Correction.

Par concavité du logarithme :
$$\ln\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n}.$$
Or,
$$\frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\right).$$
On conclut en utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante.

Exercice 9.

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que
$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Correction.

La corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Pour les points d'abscisse comprise entre a et b, la courbe représentative de f est au-dessous de cette corde, c'est-à-dire que

$$f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

pour $t \in [a, b]$. On intègre cette inégalité entre a et b et on trouve

$$\int_a^b f(t)dt \leq \big(f(b) - f(a)\big)\frac{(b - a)}{2} + f(a)(b - a) = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Cette inégalité a aussi une interprétation (et une preuve!) géométrique simple si f est plus positive. Notons A, B, C et D les points $A(a, 0)$, $B(a, f(a))$, $C(b, f(b))$, $D(b, 0)$. Alors

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \times (b - a)$$

est égal à l'aire du trapèze $ABCD$. Comme la fonction f est convexe, et donc que la courbe représentative de f est sous le segment $[AB]$, l'aire de ce trapèze est supérieure ou égal à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f, et les droites $x = a$, $x = b$. L'aire de ce domaine est exactement $\int_a^b f(x)dx$. Pour prouver l'autre inégalité, il suffit de remarquer que la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $(a + b)/2$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) \geq f'\left(\frac{a + b}{2}\right)\left(t - \frac{a + b}{2}\right) + f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Intégrer cette inégalité entre a et b donne exactement

$$\int_a^b f(t)dt \geq (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Exercice 10.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x - a)(b - x)}{2} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x - a)(b - x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. Déterminer le signe de g et de h sur $[a, b]$. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)| \leq M\frac{(x - a)(b - x)}{2}.$$

Correction.

1. f'' est continue sur le segment $[a,b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
2. On calcule les dérivées secondes qui sont $g''(x) = f''(x) + M \geq 0$ et $h''(x) = f''(x) - M \leq 0$. Ceci prouve bien que g est convexe et que h est concave.
3. Par convexité de g, et puisque $g(a) = g(b) = 0$, on sait que la courbe représentative de g est sous la corde reliant $(a, g(a))$ à $(b, g(b))$ et donc

$$g(x) \leq 0 \implies f(x) \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

De même, la courbe représentative de h est au-dessus de ses cordes, et donc

$$h(x) \geq 0 \implies f(x) \geq -M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Les deux inégalités réunies donnent exactement l'inégalité demandée.

Exercice 11.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

Correction.

Soit $y_1, y_2 \in f(I)$ et $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Soit aussi $t \in [0,1]$. Alors

$$f^{-1}\big(ty_1 + (1-t)y_2\big) = f^{-1}\big(tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\big).$$

Par convexité de f,

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Puisque f^{-1} est croissante (la réciproque d'une fonction croissante est croissante), on en déduit que

$$f^{-1}\big(ty_1 + (1-t)y_2\big) \geq f^{-1}\big(f(tx_1 + (1-t)x_2)\big) = tx_1 + (1-t)x_2 = tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2).$$

Ainsi, f^{-1} est concave.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Correction.

Supposons f non constante. On peut trouver $x_1 < x_2$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$. Soit $y = ax + b$ l'équation de la corde passant par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, avec donc $a > 0$. Pour $x > x_2$, l'inégalité des pentes assure que le point de la courbe représentative de f d'abscisse x est au-dessus du point de la corde de même abscisse. Autrement dit, pour tout $x \geq x_2$, on a $f(x) \geq ax + b$.

Ceci prouve que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 13.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Correction.

Soit $x_0 \in I$. On va démontrer que f est continue à droite en x_0. La preuve serait identique pour la continuité à gauche. Prenons $a < x_0$ et $b > x_0$ tels que $a, b \in I$. Alors, d'après l'inégalité des pentes, pour tout $x \in]x_0, b]$, on a

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

ce qui donne

$$(x - x_0)\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Le résultat devient faux si $I = [0, 1]$ par exemple. En effet, la fonction non continue en 0 et en 1 définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 14.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)^{1/n}.$$

3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Correction.

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est $x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est une fonction positive.

2. Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. La convexité de f entraîne que

$$\ln\left(1+e^{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}\right)\leq\frac{\ln\left(1+e^{a_1}\right)+\cdots+\ln\left(1+e^{a_n}\right)}{n}$$

ce qui par les propriétés fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle donne

$$\ln\left(1+\left(\prod_{k=1}^n e^{a_k}\right)^{1/n}\right)\leq\ln\left(\left(\prod_{k=1}^n(1+e^{a_k})\right)^{1/n}\right).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit

$$1+\left(\prod_{k=1}^n e^{a_k}\right)^{1/n}\leq\left(\prod_{k=1}^n(1+e^{a_k})\right)^{1/n}.$$

C'est exactement le résultat voulu, pourvu que l'on choisisse $a_k=\ln x_k$.

3. En factorisant, on trouve

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}=\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(1+\left(\prod_{k=1}^n\frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right).$$

On applique l'inégalité de la fonction précédente à $x_k=b_k/a_k$, et on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}\leq\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

Il suffit de tout mettre au dénominateur dans le dernier terme pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 15.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ?

Correction.

1. Supposons que f n'est pas décroissante. Alors il existe $a<b$ tel que $f(b)>f(a)$. La droite passant par $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ a pour équation

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

et on sait que pour les points d'abscisse supérieure ou égale à b, la courbe représentative de

f est au-dessus de cette droite. On a donc, pour $x \geq b$,

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Par théorème de comparaison, ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, une contradiction.

2. Puisque f est décroissante, $f' \leq 0$. Puisque f est convexe, f' est croissante. Elle admet donc une limite $\ell \leq 0$ en $+\infty$. Si $\ell < 0$, et puisque f' est croissante, on sait que $f'(x) \leq \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, avec l'inégalité des accroissements finis,

$$f(x) - f(0) \leq \ell \times x.$$

Le théorème de comparaison nous dit cette fois que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est aussi une contradiction.

3. Non ! Prenons par exemple $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$. Alors

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$$

et cette fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$, puisque $f'(\sqrt{2n\pi}) = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Correction.

On va approcher f par sa somme de Riemann. Précisément, introduisons

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors, puisque f est continue, par le théorème des sommes de Riemann, on sait que (u_n) converge vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. De plus, par convexité de g, on a

$$g(u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g \circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Par continuité de $g \circ f$, le terme de droite converge vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt$. Passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient bien l'inégalité dite de Jensen.

Exercice 17.

Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a
$$x^n - 1 \geq n\left(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2)}\right).$$

Correction.

Si on simplifie par $x - 1 > 0$, on trouve que l'inégalité est équivalente à
$$1 + x + \cdots + x^{n-1} \geq nx^{(n-1)/2}.$$

Pour démontrer cette inégalité, on pose, ($x > 1$ est fixé) $f(y) = \exp(y \ln x)$. f est une fonction convexe. En particulier, on a
$$\frac{1}{n}\big(f(0) + \cdots + f(n-1)\big) \geq f\left(\frac{1}{n}(0 + 1 + \cdots + (n-1))\right).$$

Mais le membre de gauche est $\frac{1}{n}(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ tandis que celui de droite est
$$f\left(\frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right) = f((n-1)/2) = x^{(n-1)/2}.$$

On obtient donc bien l'inégalité voulue.

2. Exercices de révision : intégrale sur un segment

Exercice 18.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x) = \frac{1}{x \ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

Correction.

1. On reconnait que $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2 > 0$. Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
2. On reconnait que $g(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{3x} > 0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1 + e^{3x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
3. On reconnait que $h(x) = u'(x) \times u(x)$, avec $u(x) = \ln x$. Les primitives de h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Remarquons que de telles fonctions ne sont définies que sur $]0, +\infty[$.
4. On reconnait que $k(x) = \frac{1}{3}u'(x)(u(x))^2$, avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.
5. En écrivant $l(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, on reconnait que $l(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$. Les primitives

de cette fonction, sur l'intervalle $]1,+\infty[$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(\ln x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

6. On reconnait que $m(x) = \frac{3}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1 + x^2)^{3/2}$.

Exercice 19.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty,-2[$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty,0[$

4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1,+\infty[$.

Correction.

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$, de sorte que $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x-1)$. On a donc
$$f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)u(x)^3.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4.$$
2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 1$ de sorte que $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1 - x^2)$. On en déduit que
$$f(x) = \frac{-1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3 - 3x + 1)^2}.$$
3. Posons $u(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$. On a $u'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$. On en déduit que
$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$
Une primitive de f est donc la fonction
$$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$
4. Il faut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2\ln x$. On a alors
$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)},$$
avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x).$$

Exercice 20.

Soient u,v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$, dont la dérivée est continue.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$
2. En déduire que
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Correction.

1. La formule de dérivation d'un produit nous dit que, pour tout $x \in [a,b]$, on a
$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
C'est le résultat demandé, en changeant de côté le terme $u'(x)v(x)$.
2. On intègre la relation précédente. Par linéarite de l'intégrale, on obtient le résultat demandé, en particulier puisque
$$\int_a^b (uv)'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Exercice 21.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I = \int_0^1 xe^x dx \qquad \textbf{2.}\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Correction.

1. On intègre par parties en posant :
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^x & & v(x) & = & e^x \end{array}$$
On obtient donc
$$\int_0^1 xe^x dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx.$$
Comme on sait calculer cette dernière intégrale, on trouve finalement
$$\int_0^1 xe^x dx = e - e + 1 = 1.$$
2. On intègre par parties en posant :
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln x & \quad & u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v'(x) & = & x^2 & & v(x) & = & \frac{x^3}{3} \end{array}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3-1) \\ &= \frac{2e^3+1}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 22.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \arctan(x)$ **2.** $x \mapsto (\ln x)^2$ **3.**$x \mapsto \sin(\ln x)$.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lllllll} u(x) & = & \arctan x & \quad & u'(x) & = & \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \int \frac{t}{t^2+1}dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{lllllll} u(x) & = & (\ln x)^2 & \quad & u'(x) & = & 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2\int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0,+\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{lllllll} u(x) & = & \sin(\ln x) & \quad & u'(x) & = & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v_1'(x) & = & 1 & & v_1(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big).$$

Exercice 23.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ **2.** $J = \displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$ **2.** $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Correction.

1. On commence par intégrer par parties pour obtenir

$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}dt = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}.$$

   On calcule la dernière intégrale en réalisant une intégration par parties. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

   Ainsi il vient

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$

   Finalement, on trouve

$$I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2).$$

2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)(\arctan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{aligned}J &= \frac{\pi^2}{16}-\big[x\arctan x\big]_0^1+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx\\ &= \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\big[\ln(x^2+1)\big]_0^1\\ &= \frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0,1]$ en posant $f(0)=0$, ce qui donne un sens à K. Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a>0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $K(a)=\int_a^1\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{array}{rr} u(x)=(\ln x) & v'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}\\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=-\frac{1}{2(x^2+1)}\end{array}$$

ce qui donne

$$K(a)=\left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right]_a^1+\frac{1}{2}\int_a^1\frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

de sorte que

$$\int_a^1\frac{dx}{x(x^2+1)}=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1=-\frac{1}{2}\ln 2-\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$

On obtient donc que

$$K(a)=\frac{\ln a}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}-\frac{\ln a}{2}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$K(a)=\frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Comme $a^2\ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$K=-\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 24.

Pour $n\geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Correction.

Notons f_n une telle primitive. Intégrant par parties (en dérivant $\ln^n x$ et en intégrant 1), on trouve

$$f_n = \int \ln^n x dx = x\ln^n x - nf_{n-1}.$$

On itère alors les intégrations par parties, pour trouver

$$\begin{aligned}
f_n &= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)f_{n-2} \\
&= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)x\ln^{n-2} x - n(n-1)(n-2)f_{n-3} \\
\vdots &\quad \vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)x\ln^{n-k} x \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x\ln^{n-k} x.
\end{aligned}$$

Exercice 25.

Soient $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt.$$

Correction.

On pose, pour $(\alpha, \beta, n, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$,

$$I_{m,n} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m (t-\beta)^n dt.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \left[(t-\alpha)^m \frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1} \right]_\alpha^\beta - \frac{m}{n+1} \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{m-1}(t-\beta)^{n+1} dt \\
&= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_\alpha^\beta (t-\beta)^p dt = -\frac{(\alpha-\beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \frac{m(m-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 26.

Pour (n,p) éléments de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p}=\int_0^1 x^n(\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Correction.

Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, l'application $x\mapsto x^n(\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0,1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n>0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a>0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0}=\frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p>0$. On pose donc

$$I_{n,p}(a)=\int_a^1 x^n(\ln x)^p dx$$

puis

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x)&=&(\ln x)^p & & v'(x)&=&x^n\\ u'(x)&=&\frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & & v(x)&=&\frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a)=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^p\right]_a^1-\frac{p}{n+1}\int_a^1 x^n(\ln x)^{p-1}dx=\frac{-a^{n+1}}{n+1}-\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0, et on trouve :

$$I_{n,p}=-\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p}=\frac{(-p)\times(-(p-1))\times\cdots\times(-1)}{(n+1)\times(n+1)\times\cdots\times(n+1)}I_{n,0}=\frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\times\frac{1}{n+1}=\frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Exercice 27.

1. Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)}g=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b)-f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right)+(-1)^n\int_a^b fg^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x)=(1-x^2)^n$ et $P_n(x)=Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n, puis prouver que $\int_{-1}^1 QP_n=0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Correction.

1. Procédons par récurrence sur n. La formule est vraie pour $n=1$ (c'est la formule d'intégration par parties classique). Supposons la vraie au rang $n-1$ et prouvons-la au rang n. Soit $h=f'$, qui est de classe C^{n-1}. La formule au rang $n-1$ appliquée à h et g donne

$$\int_a^b h^{(n-1)}g=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\big(h^{(n-1-k-1)}(b)g^{(k)}(b)-h^{(n-1-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\big)+(-1)^{n-1}\int_a^b hg^{(n-1)}$$

soit

$$\int_a^b f^{(n)}g=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\big(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b)-f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\big)+(-1)^{n-1}\int_a^b f'g^{(n-1)}.$$

Il suffit alors d'intégrer par parties le dernier terme,

$$\int_a^b f'g^{(n-1)}=f(b)g^{(n-1)}(b)-f(a)g^{(n-1)}(a)-\int_a^b fg^{(n)}$$

pour obtenir le résultat.

2. Q_n est un polynôme de degré $2n$, donc P_n, sa dérivée n-ième, est un polynôme de degré n. De plus, 1 et -1 sont racines n-ièmes de Q_n, et donc pour tout $k\leq n-1$, on a $Q^{(k)}(1)=Q^{(k)}(-1)=0$. Pour Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_nQ &= \int_{-1}^1 Q_n^{(n)}Q\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(Q_n^{(n-k-1)}(1)Q^{(k)}(1)-Q_n^{(n-k-1)}(-1)Q^{(k)}(1)\big)+(-1)^n\int_{-1}^1 Q_nQ^{(n)}.\end{aligned}$$

Mais $Q^{(n)}\equiv 0$ car Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et pour $k\leq n-1$, $n-k-1\leq n-1$ et donc $Q_n^{(n-k-1)}(1)=Q_n^{(n-k-1)}(-1)=0$. On en déduit bien que l'intégrale recherchée est nulle.

Exercice 28.

En effectuant un changement de variables, calculer

1. $\displaystyle\int_1^4\frac{1-\sqrt t}{\sqrt t}dt$ **2.** $\displaystyle\int_1^2\frac{e^x}{1+e^x}dx$

Correction.

1. La fonction $t\mapsto\sqrt t$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u=\sqrt t$. Lorsque $t=1$, $u=1$ et lorsque $t=4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt t}{\sqrt t}=\frac{1-u}{u}$$

et

$$u=\sqrt t\implies t=u^2\implies dt=2udu.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu\\ &= \int_1^2 (2-2u)du\\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2\\ &= -1\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e,e^2]$. Effectuons le changement de variables $u=e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du=e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \left[\ln|1+u|\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

Exercice 29.

En effectuant un changement de variables, calculer

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n\in\mathbb{N}$ **2.** $\displaystyle F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt,\ x>0$

Correction.

1. La fonction $x\mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1,e]$ sur $[0,1]$. On pose donc $u=\ln x$ de sorte que $du=\frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e, u vaut 1. On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx &= \int_0^1 u^n du\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x>0$. La fonction $t\mapsto \sqrt{e^t-1}$ est une bijection de $[1,x]$ sur $[\sqrt{e-1},\sqrt{e^x-1}]$. Posant $u=\sqrt{e^t-1}$, on a

$$du=\frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}dt$$

et

$$3+e^t=u^2+4$$

d'où

$$F(x)=2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{du}{u^2+4}=\arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right)-\arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$

Exercice 30.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Correction.

La fonction $x \mapsto (a+b-x)$ est une bijection continue strictement décroissante de $[a, b]$ sur lui-même, envoyant a en b et b en a. Effectuant le changement de variables $u = a+b-x$, on trouve donc

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du \\
&= \int_a^b (a+b-u)f(u)du \\
&= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx.
\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat demandé. Pour l'application, posons $a = 0$, $b = \pi$ et $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Alors $f(\pi - x) = f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variables $u = \cos x$. En effet, la fonction $x \mapsto \cos x$ réalise une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. De $du = -\sin x dx$, on déduit

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\big(\arctan(1) - \arctan(-1)\big) \\
&= \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 31.

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ **2.** $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on fait le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}dx &= \int udu\\ &= \frac{1}{2}u^2 + C\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2udu$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\int \cos(\sqrt{x})dx &= 2\int u\cos(u)du\\ &= 2[u\sin u] - 2\int \sin(u)du\\ &= 2u\sin u + 2\cos u + C\\ &= 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties).

Exercice 32.

On demande de calculer

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2(x)}.$$

Sur une copie d'un étudiant, on lit <div class=citation>

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}}\\ &= \int_0^\pi \frac{(1+\tan^2 x)dx}{2+\tan^2 x}.\end{aligned}$$

Je pose $t = \tan x$, d'où $dt = (1+\tan^2 x)dx$, et j'obtiens

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{1}{2+t^2}dt = 0.$$

Correction.

1. On intègre une fonction continue strictement positive : l'intégrale ne peut pas être nulle !
2. Le problème est que la fonction tan ne réalise pas du tout une bijection entre l'intervalle $[0,\pi]$ et l'intervalle $[\tan(0),\tan(\pi)]$: elle n'est pas définie en $\pi/2$, et on doit couper l'intervalle en deux !

3. On écrit
$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2(x)}\text{ et }I_2=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2(x)}.$$
La fonction tan réalise une bijection entre $[0,\pi/2[$ et $[0,+\infty[$, et on a donc
$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2+x^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$
De même, tan réalise une bijection entre $]\pi/2,0]$ et $]-\infty,0]$, et on a
$$I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{2+x^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\infty}^{0}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$
Finalement,
$$I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
Bien sûr, il aurait aussi fallu justifier l'existence de I !

Exercice 33.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$,
$$\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}.$$
2. En déduire la valeur de $\int_1^2\frac{x}{x+1}dx$.

Correction.

1. On met tout au même dénominateur :
$$a+\frac{b}{x+1}=\frac{ax+(a+b)}{x+1}.$$
Le choix de $a=1$ et $b=-1$ fonctionne.
2. On écrit
$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{x}{x+1}dx&=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=[x-\ln(x+1)]_1^2\\&=2-\ln(3)-1+\ln(2)\\&=1+\ln(2/3).\end{aligned}$$

Exercice 34.

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que
$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$
2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Correction.

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a
$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) + c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}\\ &= \frac{x^2(a+b) + x(6a+2b+c) + (9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.\end{aligned}$$
L'égalité demandée sera vérifiée dès que
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 5\\ 6a+2b+c &=& 21\\ 9a-3b-c &=& 22\end{array}\right.$$
On résoud ce système en commençant par remarquer que $a = 5-b$. Il est donc successivement équivalent à
$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 5-b\\ -4b+c &=& -9\\ -12b-c &=& -23\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 5-b\\ c &=& -9+4b\\ -16b &=& -32\end{array}\right.$$
On trouve finalement comme unique solution $a = 3$, $b = 2$ et $c = -1$, de sorte que
$$f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$
2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions
$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} + d.$$
La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation
$$3\ln(1) + 2\ln 5 + \frac{1}{5} + d = 0.$$
La primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par
$$F(x) = 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2\ln 5 - \frac{1}{5}.$$

Exercice 35.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ **2.** $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$
3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$ **4.** $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2, 1/3[$

Correction.

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme
$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$
En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve
$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-2a+b) + (a-b+c)}{(x-1)^2}.$$
Par identification, on trouve $a = 2$, $b = 1$ et $c = 3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ sont les fonctions
$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + d,$$
où d est une constante.
2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire
$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$
Par identification (par exemple...), on trouve que $a = 2$ et $b = -3$. Une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction est donc
$$x \mapsto 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1}.$$
3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = (x^2-4)$. Une primitive est donc donnée par
$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$
4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$
En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ 8a+4b+6c &=& 18 \\ -a+4b+c+3d &=& 10 \\ -a+b-c-d &=& -9. \end{array}\right.$$
On résoud ce système et on trouve comme solution $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est
$$x \mapsto 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

Exercice 36.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

Correction.

1. On remarque simplement que $x^2+4 = x^2+2^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est donc $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$. La méthode précédente donne
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2).$$
3. Le dénominateur se factorise en $(1-x)(1+x)$. On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$
En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve
$$a = -1/2,\ b = 1/2.$$
Une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ est donc $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|$.

Exercice 37.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$

3. $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

Correction.

1. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.
$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = \frac{3}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}.$$
On intègre alors. Pour la première partie, c'est facile, car :
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1|.$$
Pour la seconde, on se ramène à écrire le dénominateur sous la forme $X^2+\omega^2$, ce qui nécessite en plus un changement de variables. Ici, on a $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ soit, avec

le changement de variables $u = x + 1/2$,

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement, une primitive de la fonction recherchée est

$$x \mapsto \frac{3}{2} \ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On procède exactement comme à la question précédente :

$$\frac{2x}{x^2-x+1} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc

$$x \mapsto \ln|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Ici, il n'y a rien à faire car le numérateur est déjà la dérivée du dénominateur ! Une primitive de la fonction recherchée est donc tout simplement

$$x \mapsto \ln|x^2+x-3|.$$

Exercice 38.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-4}{|x+2|+1}$. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.

Correction.

Remarquons d'abord que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Le cours nous dit qu'il existe une unique primitive de F, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $F(0) = 0$. Le problème est de trouver sa forme explicite, car f est définie de façon explicite "par morceaux". Pour $x \geq -2$, on a

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+3} = x - 3 + \frac{5}{x+3}.$$

Ainsi, si F est la primitive recherchée, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \geq -2$,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 5\ln(x+3) + C.$$

De même, si $x < -2$, on a

$$f(x) = \frac{-x^2+4}{x+1} = -x + 1 + \frac{3}{x+1}.$$

Ainsi, il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < -2$,

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1| + D.$$

On sait aussi que F doit être continu en -2. Ainsi, les limites à gauche et à droite doivent coïncider. On trouve donc que

$$C+8=D-4.$$

Enfin, la condition $F(0)=0$ se traduit par $C=-5\log 3$. Donc finalement la fonction F est donnée par

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-3x+5\ln(x+3)-5\log 3 & \text{si } x\geq -2\\ -\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+1|+12-5\log 3 & \text{si } x<-2.\end{cases}$$

Exercice 39.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ **2.** $x\mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$

3. $x\mapsto \dfrac{1}{x^3-7x+6}$ **4.** $x\mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$

Correction.

1. Le dénominateur se factorise en $(x-1)(x^2+x+1)$. On cherche alors à écrire
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$
Par identification (par exemple...) on trouve $a=1/3$, $b=-1/3$ et $c=-2/3$, soit
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\times\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$
On cherche alors à faire apparaître la dérivée de x^2+x+1 pour faciliter l'intégration, et on trouve
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+x+1}.$$
Pour intégrer le dernier terme, on écrit
$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
ce qui donne finalement qu'une primitive de la fonction est
$$x\mapsto\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$
2. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve que
$$x^3+2x=(x-1)(x^2+x+1)+2x+1$$
d'où
$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Une primitive est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + x + 1|.$$

3. On a la factorisation suivante :

$$x^3 - 7x + 6 = (x+3)(x-1)(x-2).$$

On sait qu'on peut écrire

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

et on trouve

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}.$$

Une primitive est donc

$$x \mapsto \frac{1}{20}\ln|x+3| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x-2|.$$

4. Le dénominateur se factorise en

$$x^4 - 1 = (x^2+1)(x-1)(x+1).$$

La décomposition attendue a la forme

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}.$$

On trouve facilement (multipliant par $x-1$ et faisant $x=1$, puis multipliant par $x+1$ et faisant $x=-1$) que $c=1$ et $d=-1$. On en déduit qu'on doit avoir $a=0$ et finalement $b=2$. On en déduit donc

$$\frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc

$$x \mapsto 2\arctan x + \ln|x-1| - \ln|x+1|.$$

Exercice 40.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Correction.

Une intégration par parties donne, en posant $u(x) = (x^2+1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$,

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}.$$

Regroupant les termes, on trouve

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

Sachant que $I_1 = \frac{\pi}{4}$, on trouve

$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \text{ et } I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

Exercice 41.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$

Correction.

1. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x\big(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)\big).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ lorsque $a=2$, $3a+b=3$, $2b+c=5$ et $c+d=1$, soit $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=-4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x(2x^3-3x^2+5x-4)+C.$$

L'intégrale recherchée vaut donc

$$F(1)-F(0) = 4.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve que l'intégrale vaut

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-x}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1-e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)dx.$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)dx &= \Re e\left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x}dx\right)\\
&= \Re e\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\right]_0^{2\pi}\right)\\
&= \Re e\left(\frac{1}{5}(2i+1)(1-e^{-2\pi})\right)\\
&= \frac{1}{5}(1-e^{-2\pi}).
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$I = \frac{2}{5}(1-e^{-2\pi}).$$

3. Notons I l'intégrale. I est égale à $\Re e(J)$ avec $J = \int_0^\pi x^2 e^{(1+i)x}dx$ (on a posé $\cos x = \Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
J &= \left[\frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx\\
&= -\frac{\pi^2e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx.
\end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx &= \left[\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{1}{1+i}\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx\\
&= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^\pi\\
&= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2}(-1-e^\pi).
\end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J = -\pi^2e^\pi\frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2}(-1-e^\pi),$$

soit

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1-\pi^2}{2}e^\pi.$$

Exercice 42.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$

3. $x \mapsto \dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}e^x$ **4.** $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x(1+\sinh x)}$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cosh x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Une primitive est par exemple la fonction F définie par
$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\cosh t}dt = \int_0^x \frac{2e^t}{1+e^{2t}}dt.$$
On calcule cette intégrale à l'aide du changement de variables $u = e^t$ (la fonction $t \mapsto e^t$ est une bijection de classe C^1 de $[0,x]$ sur $[1,e^x]$, de bijection réciproque $u \mapsto \ln u$). On en déduit que
$$F(x) = \int_1^{e^x} \frac{2du}{1+u^2} = \left[2\arctan(u)\right]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$
2. On réalise là-aussi le changement de variables $u = e^x$, $du = e^x dx$ soit $dx = du/u$ et on trouve :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{1}{u(1+u)}du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du \\ &= \ln\left(\frac{u}{1+u}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C.\end{aligned}$$
3. On pose $u = e^x$, de sorte que
$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}e^x dx &= \int \frac{u^2-2u+1}{u^2+2u+1}du \\ &= \int du - \int \frac{4u}{(u+1)^2}du \\ &= u - \int \frac{4}{u+1} + \int \frac{4}{(u+1)^2} \\ &= u - 4\ln(1+u) - \frac{4}{1+u} + C \\ &= e^x - 4\ln(1+e^x) - \frac{4}{1+e^x} + C.\end{aligned}$$
4. Le changement de variables le plus malin ici est $u = \sinh x$, de sorte que
$$\frac{dx}{\cosh x} = \frac{\cosh x dx}{\cosh^2 x} = \frac{du}{1+u^2}.$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cosh x(1+\sinh x)}dx &= \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \int \frac{-u/2+1/2}{u^2+1}du + \int \frac{1/2}{1+u}du \\ &= \frac{-1}{4}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{1}{2}\frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{2}\ln|1+u| \\ &= \frac{-1}{4}\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}\arctan(u) + \frac{1}{2}\ln|1+u| + C \\ &= \frac{-1}{2}\ln(\cosh x) + \frac{1}{2}\arctan(\sinh x) + \frac{1}{2}\ln|1+\sinh x| + C.\end{aligned}$$

Exercice 43.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ **2.** $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ **3.** $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-5e^{3ix}+5e^{-3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}\right)\\ &= \frac{\sin(5x)}{16}-\frac{5\sin(3x)}{16}+\frac{5\sin(x)}{8}.\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80}+\frac{5\cos(3x)}{48}-\frac{5\cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x\sin^2 x = \cos^4 x - \cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x}+e^{-i4x}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6\right)\\ &= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right).\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}\big(2\cos(6x)+12\cos(4x)+30\cos(2x)+20\big).$$

On a donc

$$\cos^4 x-\cos^6 x = -\frac{1}{32}\cos(6x)-\frac{1}{16}\cos(4x)+\frac{1}{32}\cos(2x)+\frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192}\sin(6x)-\frac{1}{64}\sin(4x)+\frac{1}{64}\sin(2x)+\frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $\big(\cos(3x)+3\cos(x)\big)/4$. Avec la formule

$$\cos p\cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\big)$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\cos^3 x &= \frac{1}{8}\int \big(1+\cos(6x)+3\cos(4x)+3\cos(2x)\big)dx\\ &= \frac{x}{8}+\frac{\sin(6x)}{48}+\frac{3\sin(4x)}{32}+\frac{3\sin(2x)}{16}+C.\end{aligned}$$

Exercice 44.

1. Démontrer par récurrence que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(mx)dx = 0$$

- on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

2. En déduire que

$$\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Correction.

1. On va procéder par récurrence sur n. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) = \text{"}\forall m \geq n,\ \int_0^\pi \cos^n(x)\cos(mx)dx = 0\text{"}.$$

Initialisation : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, pour tout $m > 0$, on a

$$\int_0^\pi \cos(mx)dx = \left[\frac{1}{m}\sin(mx)\right]_0^\pi = 0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $m > n+1$. Alors, on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos(mx)dx = \int_0^\pi \cos^n x \cos(x)\cos(mx)dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = mx$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((m+1)x\big)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((m-1)x\big)dx.$$

Mais comme $m > n+1$, on a $m+1 > n$ et $m-1 > n$ et donc les deux intégrales sont nulles d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. On va également procéder par récurrence. Notons, pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) = \text{"}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx = \frac{\pi}{2^n}\text{"}.$$

Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet,

$$\int_0^\pi \cos^0(x)\cos(0x)dx = \int_0^1 dx = \pi = \frac{\pi}{2^0}.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos\big((n+1)x\big)dx = \int_0^\pi \cos^n x \cos(x)\cos\big((n+1)x\big)dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = (n+1)x$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos\big((n+1)x\big)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((n+2)x\big)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx.$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat de la première question (pour la première intégrale), on trouve bien que

$$\int_0^\pi \cos^{n+1} x \cos\big((n+1)x\big)dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 45.

Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{\cos^6 x}$ sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Correction.

Puisqu'on sait qu'une primitive de $\frac{1}{\cos^2 x}$ est $\tan x$, on est incité à utiliser le changement de variables $t = \tan x$. Utilisant

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ et } 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int (1+t^2)^2 dt \\
&= \int (1 + 2t^2 + t^4)dt \\
&= t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \\
&= \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}.
\end{aligned}$$

Exercice 46.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}dt$ **2.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx.$

Correction.

1. On pose $u = \cos t$, de sorte que $dt = -\cos u du$. Il vient $\sin^3 dt = (\sin^2 t)\sin t dt = -(1 -$

$u^2)du$. De plus, pour $t=0$, $u=1$ et pour $t=\pi/4$, $u=\sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à

$$I=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{1-u^2}{1+u^2}du=-\int_{\sqrt{2}/2}^{1}du+\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{2}{u^2+1}du$$

soit

$$I=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan(\sqrt{2}/2).$$

2. Là aussi, le meilleur changement de variables est $u=\cos x$, de sorte que $du=-\sin x dx$. Pour le faire apparaitre dans l'intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx\\ &= \int_{1/2}^{0}\frac{-du}{1-u^2}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

3. C'est encore le même changement de variables qui est le meilleur !

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3}\big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx &= \int_{1/2}^{1}\frac{1+u}{u}du\\ &= [u+\ln u]_{1/2}^{1}\\ &= \frac{1}{2}+\ln 2.\end{aligned}$$

Exercice 47.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}$.

Correction.

1. On pose

$$w(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x}dx$$

et on remarque que $w(-x)=w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au changement de variables $t=\cos x$. Il vient $dt=-\sin x dx$ et donc

$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{-dt}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que

$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}=\frac{1}{t(t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})}=\frac{-1}{2t}+\frac{1}{6(t-\sqrt{2})}+\frac{2}{3(2t+\sqrt{2})}.$$

On en déduit

$$I=\left[-\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-t)+\frac{1}{3}\ln(2t+\sqrt{2})\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

(il faut prendre garde que $t-\sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :

$$I=\frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{3}\ln(2+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})-\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\ln(2\sqrt{2}).$$

Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

2. Aucune des règles de Bioche ne s'applique, et on est conduit à poser $u=\tan(x/2)$, de sorte que

$$dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x} &= \int_0^1\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\times\frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int_0^1\frac{du}{u^2+u+1}\\ &= \int_0^1\frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1/2}+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 48.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}dx$ **2.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue sur $]0,\pi]$, et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on a $f(x)\sim_0 x/9$). On commence par effectuer le changement de variables $t=x/6$, de sorte que, notant I l'intégrale,
$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos(2t)}{\sin(3t)}6dt=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t}{3\sin t-4\sin^3 t}dt,$$
soit encore, après simplification :
$$I=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin t}{4\cos^2 t-1}dt.$$
On effectue alors le changement de variables $u=\cos t$, de sorte que $du=-\sin t dt$, et
$$I=-12\int_{\sqrt{3}/2}^{1}\frac{du}{4u^2-1}=-6\int_2^{\sqrt{3}}\frac{dv}{v^2-1}.$$
Écrivant $\frac{2}{v^2-1}=\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}$, puis intégrant, on trouve
$$I=-3\left[\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right]_2^{\sqrt{3}}=3\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right).$$

2. La règle de Bioche nous dit que le changement de variables approprié est $u=\cos x$. Pour le faire apparaitre, on écrit
$$\frac{dx}{\sin x+\sin 2x}=\frac{dx}{\sin x(1+2\cos x)}=\frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}.$$
On obtient, notant J l'intégrale,
$$J=\int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$
On décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples :
$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)}=\frac{1/6}{1-u}-\frac{1/2}{1+u}+\frac{4/3}{1+2u}.$$
On peut alors finir le calcul de J :
$$\begin{aligned}J&=\left[-\frac{1}{6}\ln|1-u|-\frac{1}{2}\ln|1+u|+\frac{2}{3}\ln|1+2u|\right]_0^{1/2}\\&=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln 3.\end{aligned}$$

Exercice 49.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{x+2}}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

3. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Correction.

1. La fonction est définie et continue sur $[-2,+\infty[\backslash\{-1\}$. Le calcul sera donc valable sur les intervalles $[-2,-1[$ et $]-1,+\infty[$. On effectue le changement de variables $u=\sqrt{x+2}$, puisque la fonction $x\mapsto\sqrt{x+2}$ est bijective et C^∞ sur $]-2,+\infty[$, de sorte que $du=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx=\frac{dx}{2u}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{1-\sqrt{x+2}}dx &= \int\frac{2u}{1-u}du\\
&= 2\int\left(\frac{1}{1-u}-1\right)du\\
&= 2\big(-\ln|1-u|-u\big)+C\\
&= -2\ln\left|1-\sqrt{x+2}\right|-2\sqrt{x+2}+C.
\end{aligned}$$

2. La fonction est définie sur $]-1,1[$, et on effectue le changement de variables $x=\sin u$, avec $u\in[-\pi/2,\pi/2]$, de sorte que $dx=\cos u du$. On trouve :

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int\frac{\cos u}{\cos^2u\cos u}du\\
&= \int\frac{du}{\cos^2u}\\
&= \tan(u)+C\\
&= \frac{\sin u}{\cos u}+C\\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.
\end{aligned}$$

3. On pose $u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, de sorte que $x=\frac{u^2+1}{1-u^2}$ et $dx=\frac{4u}{(1-u^2)^2}$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx &= \int\frac{4u^2}{(1-u^2)}du\\
&= \int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)du\\
&= -\frac{1}{u-1}+\ln|u-1|-\frac{1}{u+1}-\ln|1+u|+C\\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right|-\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}-\ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|+C
\end{aligned}$$

Exercice 50.

On se propose de calculer $I = \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2+2x+8}dx$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I.

Correction.

1. On a tout simplement :

$$-x^2+2x+8 = -(x^2-2x-8) = -\big((x-1)^2-9\big) = 9-(x-1)^2.$$

2. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{5/2} \sqrt{9-(x-1)^2}dx \\ &= 3\int_1^{5/2} \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}dx \end{aligned}$$

On pose alors $u = \frac{x-1}{3}$ de sorte de se ramener à une intégrale du type $\int \sqrt{1-u^2}du$, que l'on sait calculer. On a $dx = 3du$, et le changement de variables est affine, donc bijectif. On en déduit que

$$I = 9\int_0^{1/2} \sqrt{1-u^2}du$$

On pose ensuite $u = \sin t$. La fonction sin réalisant une bijection de l'intervalle $[0, \pi/6]$ sur l'intervalle $[0, 1/2]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} I &= 9\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt \\ &= 9\int_0^{\pi/6} \cos^2(t)dt \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/6} \big(1+\cos(2t)\big)dt \\ &= \frac{9}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{3\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 51.

Calculer $\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}dx$.

Correction.

On commence par écrire le trinôme sous forme canonique :

$$I = \int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}dx = \int_1^2 x\sqrt{(x-1)^2+4}dx.$$

On trouve un terme de la forme $\sqrt{u^2+1}$, pour $(x-1)^2 = 4u^2$. Ceci nous incite à poser $u = \mathrm{sh}(t)$, soit encore $x-1 = 2\mathrm{sh}t$. En posant $\alpha = \mathrm{Argsh}(1/2)$, on obtient

$$I = \int_0^\alpha (1+2\mathrm{sh}t)\times 2\mathrm{ch}t \times 2\mathrm{ch}t dt = \int_0^\alpha 4\mathrm{ch}^2 t + 8\int_0^\alpha \mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}^2(t)dt.$$

Utilisant $2\mathrm{ch}^2(t) = 1+\mathrm{ch}(2t)$, on obtient

$$I = 2\left[t+\frac{\mathrm{sh}(2t)}{2}\right]_0^\alpha + \frac{8}{3}\left[\mathrm{ch}^3 t\right]_0^\alpha = 2\alpha+\mathrm{sh}(2\alpha)+\frac{8}{3}\mathrm{ch}^3\alpha - \frac{8}{3}.$$

Ceci peut encore se simplifier en exprimant $\mathrm{sh}(2\alpha)$ en fonction de $\mathrm{sh}(\alpha)$ et $\mathrm{ch}(\alpha)$, ie $\mathrm{sh}(2\alpha) = 2\mathrm{sh}(\alpha)\mathrm{ch}(\alpha)$, et en remarquant que $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$. On obtient finalement

$$I = 2\alpha + \frac{13\sqrt{5}}{6} - \frac{8}{3}.$$

Exercice 52.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$
6. $x \mapsto \sin^5(x)$
6. $x \mapsto \arctan(x)$

Correction.

1. On remarque simplement que $x^2+4 = x^2+2^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est donc $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$. La méthode précédente donne
$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan(x+2).$$
3. Le dénominateur se factorise en $(1-x)(1+x)$. On sait donc qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}.$$
En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve
$$a = -1/2,\ b = 1/2.$$
Une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ est donc $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|$.

4. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x \mapsto e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x\big(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)\big).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x \mapsto e^x(2x^3 + 3x^2 - x + 1)$ lorsque $a = 2$, $3a + b = -3$, $2b + c = 5$ et $c + d = 1$, soit $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et $d = -4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^x(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) + C.$$

5. On a

$$\begin{aligned} \sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}\right) \\ &= \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5\sin(3x)}{16} + \frac{5\sin(x)}{8}. \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5\cos(3x)}{48} - \frac{5\cos(x)}{8}.$$

6. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \arctan x & & u'(x) & = & \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \int \frac{t}{t^2+1} dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$