Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°1

Exercices obligatoires : 1, 14, 18, 21, 24, 36, 44

1. Exercices de révision : fonctions convexes

Exercice 1.

1. Montrer que $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire que $\forall a, b > 1,\ \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a . \ln b}$.

Exercice 2.

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 3.

Soit $n \geq 2$.

1. Étudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4.

Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\lambda x) \leq \mathrm{ch}(\lambda) + x\mathrm{sh}(\lambda).$$

Exercice 5.

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f et g soient convexes, et g est croissante. Démontrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 6.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. Est-ce que $\max(f, g)$ est toujours convexe ?

2. Est-ce que $\min(f, g)$ est toujours convexe ?

Exercice 7.

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

Exercice 8.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Exercice 9.

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 10.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1. Justifier l'existence de M.
2. Montrer que g est convexe et que h est concave.
3. Déterminer le signe de g et de h sur $[a, b]$. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Exercice 11.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Exercice 13.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Démontrer que f est continue sur I. Le résultat subsiste-t-il si I n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 14.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$, alors
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{1/n}.$$
3. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, alors
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
3. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ?

Exercice 16.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que
$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Exercice 17.

Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a
$$x^n - 1 \geq n\left(x^{(n+1)/2} - x^{(n-1)/2)}\right).$$

2. Exercices de révision : intégrale sur un segment

Exercice 18.

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$k(x) = \cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x) = \frac{1}{x\ln x} \qquad m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 19.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$ **2.** $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3},\ I =]-\infty, -2[$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$ **4.** $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[.$

Exercice 20.

Soient u,v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, dont la dérivée est continue.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, on a
$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x).$$
2. En déduire que
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exercice 21.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 xe^x dx$ **2.** $J = \int_1^e x^2 \ln x dx$

Exercice 22.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \arctan(x)$ **2.** $x \mapsto (\ln x)^2$ **3.**$x \mapsto \sin(\ln x)$.

Exercice 23.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad I=\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt \quad \mathbf{2.}\quad J=\int_0^1 x(\arctan x)^2dx \qquad \mathbf{2.}\quad K=\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$$

Exercice 24.

Pour $n\geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Exercice 25.

Soient $(\alpha,\beta,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$. Calculer

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt.$$

Exercice 26.

Pour (n,p) éléments de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p}=\int_0^1 x^n(\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Exercice 27.

1. Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)}g=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b)-f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\big)+(-1)^n\int_a^b fg^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x)=(1-x^2)^n$ et $P_n(x)=Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n, puis prouver que $\int_{-1}^1 QP_n=0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Exercice 28.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{1.}\quad \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt \qquad \mathbf{2.}\quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

Exercice 29.

En effectuant un changement de variables, calculer

$$\mathbf{1.}\quad \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx,\ n\in\mathbb{N} \qquad \mathbf{2.}\quad F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t-1}}dt,\ x>0$$

Exercice 30.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x\in[a,b]$, on a $f(a+b-x)=f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Exercice 31.

En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1.}\quad x\mapsto\frac{\ln x}{x} \qquad \mathbf{2.}\quad x\mapsto\cos(\sqrt{x})$$

Exercice 32.

On demande de calculer

$$I=\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2(x)}.$$

Sur une copie d'un étudiant, on lit <div class=citation>

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\tan^2 x}} \\ &= \int_0^\pi \frac{(1+\tan^2 x)dx}{2+\tan^2 x}. \end{aligned}$$

Je pose $t=\tan x$, d'où $dt=(1+\tan^2 x)dx$, et j'obtiens

$$I=\int_{\tan 0}^{\tan\pi}\frac{1}{2+t^2}dt=0.$$

Exercice 33.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$,
$$\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}.$$
2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$.

Exercice 34.

Soit $f(x)=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x\in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 35.

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ **2**.$f(x)=\frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$
3. $f(x)=\frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$ **4**.$f(x)=\frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2,1/3[$

Exercice 36.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4}$ **2**. $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+4x+5}$
3. $x\mapsto\dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 37.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto\dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ **2**. $x\mapsto\dfrac{2x}{x^2-x+1}$
3. $x\mapsto\dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

Exercice 38.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2-4}{|x+2|+1}$. Déterminer la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0)=0$.

Exercice 39.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-7x+6}$ **4.** $x \mapsto \dfrac{4x^2}{x^4-1}$

Exercice 40.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Exercice 41.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$

Exercice 42.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$

3. $x \mapsto \dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x$ **4.** $x \mapsto \dfrac{1}{\cosh x(1+\sinh x)}$

Exercice 43.

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin^5 x$ **2.** $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$ **3.** $x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x$.

Exercice 44.

1. Démontrer par récurrence que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a
$$\int_0^{\pi} \cos^n(x)\cos(mx)dx = 0$$

- on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

2. En déduire que

$$\int_0^{\pi} \cos^n(x)\cos(nx)dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Exercice 45.

Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{\cos^6 x}$ sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 46.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}dt$ **2.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx.$

Exercice 47.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}.$

Exercice 48.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}dx$ **2.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}.$

Exercice 49.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{x+2}}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

3. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}.$

Exercice 50.

On se propose de calculer $I = \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2+2x+8}dx$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I.

Exercice 51.

Calculer $\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}dx$.

Exercice 52.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$	**2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	**4.** $x \mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$
6. $x \mapsto \sin^5(x)$	**6.** $x \mapsto \arctan(x)$