Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°23

1. Dérivées partielles

Exercice 1.

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Correction.

Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y.$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(xy) - y(x^2+y^2)\sin(xy),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy).$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto (2+2t, t^2)$ est de classe C^1, car polynômiale, donc g est de classe C^1 par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on

note $u(t) = 2 + 2t$ et $v(t) = t^2$, alors

$$g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)),$$

soit

$$g'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2).$$

2. La fonction $(u, v) \mapsto (uv, u^2 + v^2)$ est de classe C^1 car polynômiale, donc h est de classe C^1. Notons $r(u, v) = uv$ et $q(u, v) = u^2 + v^2$. Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v), q(u, v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v), q(u, v)).$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

Exercice 3.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Correction.

D'une part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{1/4}.$$

Ainsi, f se prolonge par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$. Du fait que $f(0, t) = 0$ pour tout réel t, f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0, 0)$ qui vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. D'autre part, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = |t|^{-1/2}.$$

Ceci tend vers $+\infty$ si t tend vers 0, et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0, 0)$.

Exercice 4.

Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction.

1. Prouvons d'abord que f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, on a
$$f(e^{-n^2}, 1/n) = -1,$$
qui ne tend pas vers 0 si n tend vers l'infini. Fixons maintenant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, et démontrons que f admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$. Soit $t \neq 0$. On a
$$\frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} tb^2\big(\ln|t| + \ln|a|\big) & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Lorsque t tend vers 0, ceci tend vers 0 (en particulier, parce que $t \ln|t|$ tend vers 0 en 0). Ainsi, f admet en $(0,0)$ une dérivée suivant le vecteur (a,b) qui est nulle.
2. De même, démontrons que g n'est pas continue en observant que
$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0).$$
D'autre part, fixons $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et prouvons que g admet une dérivée suivant (a,b) en $(0,0)$. On a, pour $t \neq 0$,
$$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} = \frac{t^3 a^2 b}{t \times (t^4 a^4 + t^2 b^2)} = \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2}.$$
Si $b = 0$, ceci est nul, sinon
$$\frac{g(ta,tb) - g(0,0)}{t} \xrightarrow{t \to 0} \frac{a^2}{b}.$$
Dans tous les cas, on a prouvé que g admet une dérivée en $(0,0)$ suivant le vecteur (a,b) qui vaut $\frac{a^2}{b}$ si $b \neq 0$, et qui vaut 0 si $b = 0$.

Exercice 5.

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Correction.

Il suffit de démontrer que la fonction admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, et que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. D'une part, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, et on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2y^2\frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
D'autre part, montrons que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. On a en effet :
$$f(x,0) - f(0,0) = 0,$$
ce qui prouve que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable valant
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$
De même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable. Il reste à démontrer que ces dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. Mais on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\left|\frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2|xy|\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)}\right)^2 \leq 2|xy|,$$
ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ si (x,y) tend vers $(0,0)$. De même, puisque $2|xy| \leq x^2+y^2$, on a :
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{4}\left|3x^2+y^2\right|.$$
On a également continuité de la dérivée partielle par rapport à la seconde variable en $(0,0)$.
2. On commence par étudier la continuité de f en $(0,0)$ (même si ce n'est pas utile pour appliquer le théorème mentionné). On a
$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &\leq x^2y^2|\ln(x^2+y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2|\ln(x^2+y^2)| \\ &\leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)\times(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|. \end{aligned}$$
Du fait que $u\ln u$ tend vers 0 lorsque u tend vers 0^+, on en déduit que f est continue en $(0,0)$. Ensuite, remarquons que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable ailleurs qu'en $(0,0)$ donnée par
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}.$$
Pour étudier l'existence d'une dérivée partielle par rapport à la première variable en $(0,0)$, on étudie le taux d'accroissement
$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \to 0.$$
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On va maintenant prouver la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Le même raisonnement que pour la continuité de f (en utilisant par exemple $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$) prouve que $2xy^2\ln(x^2+y^2)$ tend vers 0 si (x,y) tend vers $(0,0)$. D'autre part,
$$\left|\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}\right| \leq x^2|y|$$

ce qui prouve également que $\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, et par suite sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, par symétrie des variables x et y, ce que l'on vient de démontrer est aussi valable pour les dérivées partielles par rapport à la deuxième variable. Ainsi, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles de classe C^1 ?

1. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
3. $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Correction.

On remarque d'abord que, dans les 3 cas, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

1. On a
$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq |x|,$$
et $|x| \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$. De plus, un calcul facile montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$
En particulier, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = -1$ tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'a aucune chance d'être continue en $(0,0)$ (alors qu'on n'a même pas étudié l'existence d'une dérivée partielle en $(0,0)$!). Ainsi, f n'est pas de classe C^1.
2. On a
$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| \times \frac{x^2}{x^2+y^2} + |y| \times \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| + |y|.$$
Ainsi, f est continue en $(0,0)$. D'autre part, un calcul facile montre que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$
Il vient, pour $t \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut pas être continue en $(0,0)$ et f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. On va commencer par étudier la régularité de la fonction d'une variable réelle g définie par $g(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$, $g(t) = 0$ sinon. Clairement, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. De plus, on a $g'(t) = 0$ si $t < 0$ et $g'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$. On a donc $g'(t) \to 0$ si $t \to 0$. On en déduit, par le théorème de prolongement d'une dérivée, que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) = 0$. Maintenant, $f = g \circ \phi$ avec $\phi(x,y) = x^2+y^2$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par composition, f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$
   (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Correction.

1. La fonction g est C^1 comme composée de fonctions de classe C^1. On a :
   $$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$
2. (a) On peut alors écrire $g(t) = tf(x, y)$, et le calcul de la dérivée de g donne $g'(t) = f(x, y)$. La comparaison avec l'expression obtenue à la question précédente donne le résultat.
   (b) Il suffit d'appliquer la relation précédente pour $t = 0$. On a $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Réciproquement, on vérifie facilement qu'une fonction vérifiant $f(x, y) = \alpha x + \beta y$ vérifie également $f(tx, ty) = tf(x, y)$.

Exercice 8.

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2(x + y)$.
2. $f(x, y) = e^{xy}$.

Correction.

Il suffit de dériver successivement par rapport aux bonnes variables. Remarquons que les fonctions sont clairement de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et donc que les dérivées croisées d'ordre 2 sont égales.

1. On trouve
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x.$$
2. On trouve
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}.$$

Exercice 9.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1. f admet-elle un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$?
2. f admet-elle un prolongement C^1 à $\mathbb{R}^2$?
3. f admet-elle un prolongement C^2 à $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. Utilisant $2|xy| \leq x^2+y^2$, il est facile de voir que $f(x,y) \to 0$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Ainsi, f admet une limite en $(0,0)$ et on peut la prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 0$.
2. Il est clair que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

De plus, $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De

$$|x^4+4x^2y^2+y^4| \leq\leq x^4+4x^2y^2+y^4 \leq 2(x^2+y^2)^2,$$

on tire la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. L'étude de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est totalement similaire, puisque $f(x,y) = -f(y,x)$. On en déduit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. On va prouver que f ne peut pas être de classe C^2 en niant le théorème de Schwarz. En effet, on a

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut -1. Mais on prouve de la même façon que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1. Les deux dérivées partielles croisées n'étant pas égales, la fonction ne peut pas être de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = yx^2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$

Correction.

1. Soit f une solution du système, et soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g(x) = f(x, y)$. Alors la première relation s'exprime aussi par $g'(x) = xy^2$, soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + Cte$. Cette constante dépend de y, qui a été fixé le temps d'intégrer la relation. On en déduit l'existence de $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$
Puisque f est C^1, C est également C^1 et la deuxième relation donne
$$C'(y) = 0,$$
c'est-à-dire C est constante. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ de sorte que
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + A.$$
Réciproquement, une telle fonction est solution du système.
2. On reprend la même méthode, en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en posant $g(x) = f(x, y)$. De $g'(x) = e^x y$, on tire $g(x) = e^x y + cte$. Il existe donc une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^x y + C(y)$. On dérive cette fois par rapport à y, et on trouve $C'(y) = 2y$, soit $C(y) = y^2 + Cte$. Ainsi, si f est solution, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$f(x, y) = e^x y + y^2 + A.$$
Réciproquement, ces fonctions sont solutions.
3. Si on reprend la méthode des questions précédentes, on observe que si f est solution, il existe une fonction $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y + C(y)$. On dérive par rapport à y, et en utilisant la deuxième relation, on trouve que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$C'(y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$
Or, si y est fixé, le membre de gauche est constant, et le membre de droite est un polynôme de degré 3 en x : ceci est impossible et donc l'équation n'a pas de solutions. On aurait pu aussi remarquer que, si on cherchait une fonction de classe C^2, les dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne pouvaient pas être égales, contredisant le théorème de Schwarz.

2. Différentiabilité

Exercice 11.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.
2. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x, y) = (y \sin x, \cos x)$.

Correction.

1. f admet des dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y(x+y)+1)\,e^{xy}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x(x+y)+1)\,e^{xy}.$$
Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est différentiable, et on a :
$$df_{(x,y)}(h,k) = \big(h(y(x+y)+1)+k(x(x+y)+1)\big)e^{xy}.$$
Avec la notation différentielle, on a (ce qu'on peut obtenir aussi en différentiant directement f), on a aussi
$$df = \big(y(x+y)+1\big)e^{xy}dx + \big(x(x+y)+1\big)e^{xy}dy.$$
2. f est clairement C^∞, et est donc différentiable. On a donc
$$df = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz.$$
3. f est clairement C^∞, et est donc différentiable. La différentielle de f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y\cos x, -\sin x)$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\sin x, 0).$$
On en déduit que
$$df_{(x,y)}(h,k) = h\begin{pmatrix} y\cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2-z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}x^2 + y, \ln(1+x^2)\right)$.

Correction.

Il suffit de vérifier que les fonctions coordonnées sont différentiables, et elles sont clairement C^∞. On a respectivement

1. $$J_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$J_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de f et celle de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

Correction.

1. f et g sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. De plus, en calculant les dérivées partielles, on montre facilement que
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. (a) On a $f \circ g(x,y) = \sin(4xy)$. On en déduit la matrice jacobienne de $f \circ g$ en (x,y).
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy) \end{pmatrix}.$$
Il vient
$$d(f \circ g)((x,y))(u,v) = \mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4uy\cos(4xy) + 4vx\cos(4xy).$$
   (b) D'après la formule de composition des différentielles, on sait que
$$\mathrm{Jac}_{(x,y)}(f \circ g) = \mathrm{Jac}_{g(x,y)}(f) \times \mathrm{Jac}_{(x,y)}(g).$$
Mais,
$$\mathrm{Jac}_{g(x,y)}f = \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos(4xy) & -2(x-y)\cos(4xy) \end{pmatrix}.$$
Le produit des deux matrices redonne alors le résultat précédent.

Exercice 14.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f est-elle continue en $(0,0)$?
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction.

1. Remarquons que $f(x,x) = 1/2$, qui ne tend pas vers 0 si x tend vers 0 : f n'est pas continue en 0.
2. Puisque $f(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe, et vaut 0.
3. f ne peut pas être différentiable puisqu'elle n'est pas continue !

Exercice 15.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. D'une part, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En utilisant par exemple l'inégalité classique $2|xy| \leq x^2+y^2$, puis l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on obtient :

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x^2-y^2|}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$

ce qui prouve la continuité de f en $(0,0)$.

2. Remarquons d'abord que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$, comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'autre part, on a $f(x,0) - f(0,0) = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. On a

alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &\leq \frac{|x|^4|y|+|y|^5+4|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2}\\ &\leq \frac{6(x^2+y^2)^{5/2}}{(x^2+y^2)^2}\\ &\leq 6(x^2+y^2)^{1/2},\end{aligned}$$

où on a utilisé que $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$. Ceci prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par (anti)symétrie des rôles joués par x et y dans l'expression de $f(x,y)$, le même résultat est vrai pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. On a donc prouvé que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Toute fonction de classe C^1 étant différentiable, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrer que ϕ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Correction.

Remarquons avant de commencer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc il est bien possible de calculer la différentielle de ϕ en un élément de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < 1$. Alors

$$(I_n+H)\times\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k H^k\right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}.$$

Puisque $\|H\| < 1$, $H^p \to 0$ et donc

$$(I_n+H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k H^k = I_n - H + H^2\psi(H),$$

où

$$\psi(H) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k H^k.$$

On a

$$\|\psi(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\|H\|^k = \frac{1}{1-\|H\|} \leq 2$$

si $\|H\| \leq 1/2$. Ainsi, $\|H^2\psi(H)\| \leq 2\|H\|^2 = o(\|H\|)$ et on a prouvé que

$$\phi(I_n+H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en I_n et sa différentielle vaut $d\phi_{I_n}(H) = -H$.

2. Prenons maintenant $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$(M+H)^{-1} = \big(M(I_n + M^{-1}H)\big)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(M^{-1}H)^k M^{-1}$$

pourvu que $\|M^{-1}H\| < 1$. Il vient, par un raisonnement identique à celui de la première question,

$$\phi(M+H) = \phi(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en M et $d\phi_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

Exercice 17.

Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que l'application déterminant est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $1 \leq i, j \leq n$ et $f(t) = \det(I_n + tE_{i,j})$. Que vaut f ?
3. En déduire la valeur de $\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)$.
4. En déduire l'expression de la différentielle de det en I_n.
5. Retrouver ce résultat en calculant $\det(I_n + tH)$ en trigonalisant H.
6. Démontrer que si A est inversible, alors $d_A \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}(A)H)$.
7. Démontrer que la formule précédente reste valide pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction.

1. L'expression du déterminant (ou son développement suivant une ligne ou une colonne) montre qu'il s'agit d'un polynôme en les coefficients de la matrice. Donc il s'agit d'une fonction de classe C^∞.
2. Si $i = j$, alors on a $f(t) = 1 + t$ et si $i \neq j$, alors $f(t) = 1$.
3. Par définition de la dérivée partielle du déterminant par rapport à la coordonnée donnée par $E_{i,j}$, on a

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = f'(0)$$

et cette quantité vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.

4. Rappelons que $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Toute matrice H s'écrit $H = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{i,j}E_{i,j}$. On en déduit que :

$$d_{I_n}\det(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{i,j}\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n) = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \mathrm{Tr}(H).$$

5. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de H, on a, par trigonalisation, où PHP^{-1} est triangulaire supérieure,

$$\det(I_n + tH) = \det(I_n + tPHP^{-1}) = \prod_{i=1}^n(1 + t\lambda_i) = 1 + t\sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t^2).$$

Ainsi, $d\det_{I_n}(H) = \mathrm{Tr}(H)$.

6. On écrit que

$$\begin{aligned}\det(A+H) &= \det(A(I_n + A^{-1}H)) \\ &= \det(A) \times \det(I_n + A^{-1}H) \\ &= \det(A) \times (1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det(A) + \mathrm{Tr}(\det(A)A^{-1}H) + o(\|H\|).\end{aligned}$$

Ceci démontre que

$$d_A \det(H) = \mathrm{Tr}(\det(A)A^{-1}H).$$

Mais c'est le même résultat que celui donné par l'énoncé, car $\det(A)A^{-1} = {}^t\mathrm{comat}(A)$.

7. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, qui à A associe $d_A \det$ et g l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, qui à A associe $H \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}(A)H)$. Alors f et g sont deux applications continues, et elles coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles, qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cela implique que f et g sont égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 18.

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$. Démontrer que ϕ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Correction.

Soient $P, H \in E$. On a

$$\phi(P+H) = \int_0^1 \big(P(t) + H(t)\big)^3 dt = \int_0^1 \big(P(t)\big)^3 + 3\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 H(t)dt + \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = 3\int_0^1 P(t)\big(H(t)\big)^2 dt + \int_0^1 \big(H(t)\big)^3 dt.$$

Or,

$$|\psi(H)| \leq 3\int_0^1 |P(t)|dt \times \|H\|^2 + \|H\|^3.$$

Ainsi, $\psi(H) = o(\|H\|)$. Puisque $H \mapsto 3\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 H(t)dt$ est linéaire, on a prouvé que ϕ est différentiable en P et que $d\phi_P(H) = 3\int_0^1 \big(P(t)\big)^2 H(t)dt$.

Exercice 19.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, et soit $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(u) = u \circ u$. Démontrer que ϕ est de classe C^1.

Correction.

On doit démontrer que ϕ est différentiable en chaque $u \in \mathcal{L}(E)$, et que l'application $u \mapsto d\phi_u$ est continue. Commençons par calculer la différentielle. On fixe $u, h \in \mathcal{L}(E)$. Alors,

$$\phi(u+h) = (u+h) \circ (u+h) = u \circ (u+h) + h \circ (u+h) = u \circ u + u \circ h + h \circ u + h \circ h,$$

où on a utilisé que u et h sont linéaires. On a donc

$$\phi(u+h) = \phi(u) + u \circ h + h \circ u + h \circ h.$$

L'application $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $h \mapsto u \circ h + h \circ u$ est linéaire. Pour démontrer que ϕ est différentiable en u, il suffit de prouver que $\|h \circ h\| = o(\|h\|)$. Mais, si on a muni $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'application linéaire subordonnée à une norme quelconque sur E, on a

$$\|h \circ h\| \leq \|h\|^2.$$

On a bien prouvé que ϕ est différentiable en u et que $d\phi_u(h) = u \circ h + h \circ u$. Pour prouver que $u \mapsto d\phi_u$ est continue, on va prouver qu'elle est lipschitzienne. On fixe donc $u, v \in \mathcal{L}(E)$, et on remarque que pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$d\phi_u(h) - d\phi_v(h) = (u-v) \circ h + h \circ (u-v).$$

Ainsi,

$$\|d\phi_u(h) - d\phi_v(h) \leq 2\|u-v\| \times \|h\|.$$

Ceci prouve que

$$\|d\phi_u - d\phi_v\| \leq 2\|u-v\|,$$

et donc que l'application $u \mapsto d\phi_u$ est bien lipschitzienne. Ainsi, ϕ est de classe C^1.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $u : x \mapsto \langle f(x), f(x) \rangle$.

Correction.

Notons $g(x) = \langle x, x \rangle$, de sorte que $u = g \circ f$. Par composée, $du_x(h) = dg_{f(x)} \circ df_x(h)$. Or, $dg_y(h) = 2\langle y, h \rangle$, ce qu'on peut retrouver en écrivant

$$\langle y+h, y+h \rangle = \langle y, y \rangle + 2\langle y, h \rangle + \|h\|^2.$$

On en déduit que $du_x(h) = 2\langle f(x), df_x(h) \rangle$.

Exercice 21.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^2.$$

Démontrer que f est constante.

Correction.

Fixons $x \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $h \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \|h\|^2 \implies f(x+h) = f(x) + o(\|h\|).$$

Ceci signifie que f est différentiable en x et que $df_x = 0$. En particulier, f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe (donc connexe par arcs), ceci implique que f est constante.

Exercice 22.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Démontrer que $f(0) = 0$.
2. Démontrer que f est linéaire.

Correction.

1. On a $f(0) = f(0 \times 0) = 0f(0) = 0$! (question subsidiaire : où vivent ces zéros ???)
2. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$, et on écrit que f est différentiable en 0. On a donc

$$f(\lambda x) =_{\lambda \to 0} f(0) + df_0(\lambda x) + o(\lambda).$$

D'après la relation vérifiée par f et puisque $f(0) = 0$, on a

$$\lambda f(x) =_{\lambda \to 0} \lambda df_0(x) + o(\lambda).$$

On simplifie par λ et on trouve

$$f(x) =_{\lambda \to 0} df_0(x) + o(1).$$

On fait tendre λ vers 0 et on a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x) = df_0(x).$$

Ainsi, f est linéaire.

3. Fonctions numériques

a. Divers

Exercice 23.

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Déterminer l'équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à $\mathcal{S}$.

Correction.

$(1,1,1)$ n'étant pas un point critique de f, $\mathcal{S}$ admet un plan tangent en $(1,1,1)$ dont l'équation est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)(y-1)+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)(z-1)=0.$$

Un calcul rapide des dérivées partielles permet de conclure que le plan tangent a pour équation :

$$(x-1)-5(y-1)+2(z-1)=x-5y+2z+2=0.$$

Exercice 24.

On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs F dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire f tel que $F=grad(f)$. Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent.

1. $F(x,y,z)=(2xy+z^3,x^2,3xz^2)$, défini sur $\mathbb{R}^3$.
2. $F(x,y)=\left(-\frac{y}{(x-y)^2},\frac{x}{(x-y)^2}\right)$, défini sur $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,x>y\}$.

Correction.

1. f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}=3xz^2$. On résoud ce système d'équation aux dérivées partielles : la deuxième équation donne par exemple $f(x,y,z)=x^2y+h(x,z)$, et utilisant les deux autres équations, on trouve :

$$f(x,y,z)=x^2y+xz^3+cste.$$

2. f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{(x-y)^2}\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{(x-y)^2}.$$

Les fonctions f qui conviennent sont donc $f(x,y)=\frac{y}{x-y}+cste$.

b. Extrema

Exercice 25.

On pose $f(x,y)=x^2+y^2+xy+1$ et $g(x,y)=x^2+y^2+4xy-2$.

1. Déterminer les points critiques de f, de g.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
3. En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y.$$

Si (x,y) est un point critique de f, il vérifie donc le système

$$\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ est donc le seul point critique de f. Un raisonnement tout à fait similaire montre que $(0,0)$ est aussi le seul point critique de g.

2. Les extrema locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si $(0,0)$ est un extrémum local.

$$f(x,y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geq 1 = f(0,0).$$

Ainsi, $(0,0)$ est un extrémum local, et même global, de f.

3. Ici aussi, il suffit de déterminer la nature de $(0,0)$. On a $g(0,0) = -2$. On a également, pour $x \neq 0$, $g(x,0) = x^2 - 2 > g(0,0)$ et $g(x,-x) = -2x^2 - 2 < g(0,0)$. Ainsi, aussi près de $(0,0)$ qu'on veut, g prend des valeurs (strictement) supérieures et (strictement) inférieures à $g(0,0)$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de g. Comme $(0,0)$ est le seul point critique de g, g n'admet pas d'extrémum local.

Exercice 26.

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3$
4. $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6.$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donnent les points critiques. On trouve après résolution du système que seul $(0,3)$ est un point critique de f. Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0,0)$. Alors

$$f(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geq f(0,3).$$

Ainsi, $(0,3)$ est un minimum local, et même global, de f.

2. On trouve cette fois $(1,1)$ comme unique point critique de f. En posant $u = x - 1$ et

$v = y - 1$ (toujours dans l'idée de se ramener en $(0,0)$), on a

$$f(x,y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u-v)^2 + v^2 \geq f(1,1).$$

Ainsi, $(1,1)$ est un minimum local, et même global, de f.

3. Le seul point critique est $(0,0)$. On a $f(x,0) > 0 = f(0,0)$ si $x > 0$ et $f(x,0) < 0 = f(0,0)$ si $x < 0$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de f.
4. Posons $u = x - y$, $v = x + y$ et $g(u,v) = u^2 + v^3$. Étudier les extrema locaux de g revient, modulo le changement de variables, à étudier les extrema locaux de f. $(0,0)$ est le seul point critique de g, et puisque $g(0,y) > 0$ si $y > 0$ et $g(0,y) < 0$ si $y < 0$, $(0,0)$ n'est pas un extrémum de g. Donc f n'admet pas d'extrémum local.

Exercice 27.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$;
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Correction.

1. On commence par chercher les points critiques de f. Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 &= 0 \\ 2y &= 0. \end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$. On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2 + 6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

En $(0,0)$, on obtient donc, avec les notations usuelles, $r = -2$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = -4 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,0)$, on a $r = 4$, $t = 2$ et $s = 0$, soit $rt - s^2 = 8 > 0$. Le point $(1,0)$ est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque $r > 0$. L'étude en $(-1,0)$ donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x.$$

Un point (x,y) est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0. \end{cases}$$

Ce système implique $x^4 = x$, soit $x = 0$ ou $x = 1$. On en déduit facilement que les seuls points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3.$$

En $(0,0)$, on a $r = 0$, $t = 0$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = -9 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,1)$, on a $r = 6$, $t = 6$ et $s = -3$, soit $rt - s^2 = 27 > 0$. Puisque de plus $r > 0$, le point $(1,1)$ est un minimum local de f.

3. Les dérivées partielles du premier ordre de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 8(x-y).$$

Les points critiques sont solutions du système

$$\begin{cases} 4x^3 = 8(x-y) \\ -4y^3 = 8(x-y). \end{cases}$$

On en déduit que $x^3 = -y^3 = (-y)^3$. La fonction cube étant injective, ceci donne encore $x = -y$. Si on reporte ceci dans la première équation, on trouve $4x^3 = 16x$, soit

$$x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2-4) = 0 \iff x(x-2)(x+2) = 0.$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(2,-2)$ et $(-2,2)$. Etudions maintenant la nature de ces points critiques. Les dérivées partielles du second ordre sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 8 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8.$$

En $(2,-2)$, avec les notations usuelles, on a $r = 40$, $t = 40$ et $s = -8$. Cette fois, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc le point $(2,-2)$ est un minimum local pour f. La conclusion est identique en $(-2,2)$. En $(0,0)$, on a $r = -8$, $t = -8$ et $s = 8$, soit $rt - s^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure directement. Mais, on remarque que $f(x,0) = x^4 - 4x^2$ est négatif si x est petit, alors que $f(x,x) = 2x^4$ est toujours positif. Ainsi, $(0,0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum puisque aussi près qu'on veut de $(0,0)$, on a des points (x,y) avec $f(x,y) > f(0,0)$ et d'autres points (x,y) avec $f(x,y) < f(0,0)$.

Exercice 28.

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;
2. $f(x,y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$;

Correction.

1. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y.$$

Un point critique (x,y) vérifie donc $x = y$ et $y = -x^2$, soit $x^2 + x = 0$. On vérifie donc facilement que les seuls points critiques sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$. On calcule ensuite les dérivées au second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6.$$

En $(0,0)$, avec les notations usuelles, $r = 0$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 < 0$: $(0,0)$ n'est pas un extrémum local pour f. En $(-1,-1)$, on a $r = -12$, $t = -6$ et $s = 6$, soit $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: f admet un maximum local en $(-1,-1)$. Ce maximum ne peut pas être un maximum global. En effet, $f(x,0) = 2x^3$ tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$, et donc la fonction n'est pas majorée. Par conséquent, elle n'admet pas de maximum global.

2. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y.$$

Un point critique (x,y) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy & = & 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y & = & 0. \end{array} \right.$$

La première équation impose $x = 0$ (puisqu'on sait que $y > 0$), la deuxième équation donne $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$. Posant $X = \ln y$, on obtient $X^2 + 2X = 0$ donc les solutions sont $X = 0$ et $X = -2$. Revenant à y, on trouve $y = 1$ et $y = e^{-2}$. f admet donc deux points critiques qui sont $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$. Étudions maintenant la nature de ces points critiques. Pour $(0,1)$, on peut remarquer que $f(0,1) = 0$ alors que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Ainsi, on a prouvé que $(0,1)$ est un minimum global de f. Pour $(0,e^{-2})$, on calcule les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y} + 2\frac{\ln y}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x.$$

Avec les notations usuelles, en $(0,e^{-2})$, on trouve $rt - s^2 = -4$ et donc $(0,e^{-2})$ n'est pas un extrémum local pour f.

3. On calcule les dérivées partielles de f au premier ordre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Un point critique (x,y) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 & = & y \\ y^3 & = & x. \end{array} \right.$$

On en déduit $x = x^9$ soit $x = 0$ ou $x^8 = 1$. On en déduit que les points critiques sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. On calcule ensuite les dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4.$$

Avec les notations usuelles, en $(0,0)$, on a $r=0$, $t=0$ et $s=-4$ soit $rt-s^2=-16$. (0,0) n'est pas un extremum local. En $(1,1)$, on a $r=12$, $t=12$ et $s=-4$, dont $rt-s^2>0$ et $r>0$: (1,1) est un minimum local, et il en est de même de (-1,-1). Pour déterminer si ce sont des minima globaux, on calcule

$$f(x,y)-f(1,1)=x^4+y^4-4xy+2=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2+2(x-y)^2\geq 0,$$

et donc $(1,1)$ est un minimum global. Il en est de même de $(-1,-1)$. On peut aussi utiliser une autre méthode plus abstraite pour démontrer que f admet au moins un minimum global. En effet, $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=+\infty$ (car $|xy|\leq x^2+y^2$ par exemple). Ainsi, il existe $M>0$ tel que $\|(x,y)\|\geq M \implies f(x,y)\geq 0$. Sur la boule fermée $K=\bar{B}(0,M)$, qui est un compact, la fonction f est continue, donc elle admet un minimum sur K en $(x_0,y_0)\in K$. Ceci signifie que pour tout $(x,y)\in K$, on a $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$. Puisque $f(1,1)=-2$ et que $f(x,y)\geq 0$ si $(x,y)\notin K$, on sait que $f(x_0,y_0)<0$. Mais du fait que f est positive sur le complémentaire de K, on en déduit que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$. Ainsi, f admet au moins un minimum global. Maintenant, un minimum global est un minimum local, donc (x_0,y_0) doit être égal à $(1,1)$ ou à $(-1,-1)$. On conclut en remarquant que $f(1,1)=f(-1,-1)$, et donc que ces deux points sont un minimum global pour f.

Exercice 29.

Soit $f(x,y)=y^2-x^2y+x^2$ et $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2-1\leq y\leq 1-x^2\}$.

1. Représenter D et trouver une paramétrisation de Γ, le bord de D.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ.
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur D.

Correction.

1. Le domaine D est délimité par les deux paraboles d'équation $y=1-x^2$ et $y=x^2-1$. Son bord Γ comporte deux parties : la partie "haute", paramétrée par $y=1-x^2$, $-1\leq x\leq 1$, et la partie basse, paramétrée par $y=x^2-1$, $-1\leq x\leq 1$.

Exercice 30.

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y)=xy(1-x-y)$ et $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x,y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$;
2. $f(x,y)=x-y+x^3+y^3$ et $K=[0,1]\times[0,1]$;
3. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$ et $K=[0,\pi/2]^2$.

Correction.

1. K est un ensemble fermé et borné (c'est un triangle). C'est donc une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction f étant polynomiale, elle est continue sur ce compact, donc elle y est majorée et elle atteint sa borne supérieure. Le maximum peut être atteint :
   — ou bien en un point du bord de K ;
   — ou bien en un maximum local de f situé à l'intérieur de K.

   Ici, on remarque que si (x, y) appartient à la frontière de K, alors ou bien $x = 0$, ou bien $y = 0$, ou bien $x + y = 1$. Dans tous les cas, on a $f(x, y) = 0$ alors que $f(1/4, 1/4) > 0$. Ainsi, le maximum ne peut être atteint qu'en un point à l'intérieur de K. On cherche donc les points critiques de f. Pour cela, on calcule
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(1 - 2x - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(1 - x - 2y).$$
   Un point critique situé à l'intérieur de K vérifie
   $$\begin{cases} 1 - 2x - y &= 0 \\ 1 - x - 2y &= 0. \end{cases}$$
   Le seul point critique situé à l'intérieur de K est donc $(1/3, 1/3)$. Comme un maximum local ne peut être atteint qu'en un point critique, c'est donc que f admet son maximum sur K en $(1/3, 1/3)$. Ce maximum est égal à $1/27$.
2. Le début du raisonnement est tout à fait similaire. Ensuite, on remarque que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + 3x^2 > 0.$$
   Ainsi, f ne peut pas admettre de point critique, et donc le maximum de f sur K ne peut être atteint qu'en un point du bord de K. Il suffit ensuite d'étudier le comportement de f sur le bord de K. On a d'une part $f(x, 0) = x + x^3$ qui atteint son maximum en $(1, 0)$, maximum valant 2. On a ensuite $f(x, 1) = x + x^3$, qui atteint son maximum valant 2 en $(1, 1)$. On a ensuite $f(0, y) = -y + y^3 \leq 2$ si $y \in [0, 1]$, et $f(1, y) = 2 - y + y^3 \leq 2$. Ainsi, le maximum de f sur K est égal à 2.
3. Le début du raisonnement est identique. On cherche ensuite les points critiques appartenant à l'intérieur de K, l'ouvert $U =]0, \pi/2[^2$ en remarquant que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y \sin(2x + y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin x \sin(x + 2y)$$
   (on a utilisé la célèbre formule $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$). Un point (x, y) de U est un point critique si et seulement si on a
   $$\begin{cases} \sin(2x + y) &= 0 \\ \sin(x + 2y) &= 0. \end{cases}$$
   Puisque $x + 2y \in]0, 3\pi/2[$, on a nécessairement
   $$\begin{cases} 2x + y &= \pi \\ x + 2y &= \pi. \end{cases}$$
   Ainsi, le point $(\pi/3, \pi/3)$ est le seul point critique de f dans U. On a $f(\pi/3, \pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. On étudie maintenant f sur le bord de K, ie on étudie $f(0, t)$, $f(t, 0)$, $f(\pi/2, t)$ et $f(t, \pi/2)$

pour $t \in [0, \pi/2]$. On remarque que $f(0,t) = f(t,0) = 0$ et par symétrie du rôle joué par x et y, on peut se restreindre à l'étude de $f(\pi/2, t)$. Mais,

$$f(\pi/2, t) = \sin t \sin(t + \pi/2) = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t),$$

dont le maximum pour $t \in [0, \pi/2]$ vaut $1/2$. Comme $\frac{1}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, on en déduit que f admet pour maximum sur K la valeur $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 31.

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \exp(axy),\ a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

Correction.

Notons $g(x,y) = x^3 + y^3 + x + y - 4$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x,y) = 0\}$. On commence par calculer les diverses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ay\exp(axy),\ \frac{\partial f}{\partial y} = ax\exp(axy),\ \frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 + 1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 1.$$

En un point (x,y) de G où f atteint un extrémum (sur G), les différentielles sont proportionnelles. On en déduit que

$$\frac{ay\exp(axy)}{3x^2+1} = \frac{ax\exp(axy)}{3y^2+1}$$

ce qui entraîne $3y^3 + y = 3x^3 + x$. La fonction $t \mapsto 3t^3 + t$ étant strictement croissante, on en déduit que l'on a nécessairement $x = y$. Il vient $x^3 + x - 2 = 0$, dont la seule racine réelle est $x = 1$. Il faut maintenant étudier ce qui se passe en (1,1). Y-a-t-il un extrémum ? Est-ce un minimum ? Un maximum ? En fait, il suffit de remarquer qu'en les points de $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ pour lesquels $|x|$ est grand, alors $|y|$ est grand lui aussi, mais x et y sont de signe opposés. Autrement dit,

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty, (x,y) \in G} f(x,y) = 0.$$

Ainsi, par compacité, la fonction admet forcément un maximum qui est atteint en $(1,1)$.

Exercice 32.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux ?

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$;
2. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$;
3. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

Correction.

1. On commence par chercher les points critiques de f. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2.$$

La fonction f admet donc un seul point critique qui est $(0,0)$. Or, $f(0,y) = y^3$ et cette quantité est tantôt positive, tantôt négative suivant le signe de y, même si y est très proche de 0. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un extrémum, et f n'admet pas d'extrémum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Commençons par calculer les dérivées partielles au premier ordre et au second ordre de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement si $x = 0$ et $y^2 = 1$. Les deux points critiques de f sont donc $A(0,1)$ et $B(0,-1)$. En ces deux points, avec les notations habituelles, $rt - s^2 = 0$. On a donc affaire à des points dégénérés. Étudions plus précisément ce qui se passe en $A(0,1)$. Pour cela, on va faire un développement limité en posant $y = 1 + h$, h proche de 0. On a alors

$$f(x, 1+h) = x^4 + (1+h)^3 - 3(1+h) - 2 = x^4 + h^3 + 3h^2 - 4.$$

Or, pour x et h proches de 0, $x^4 \geq 0$ et $3h^2 + h^3 \geq 0$ (au voisinage de 0, c'est le terme h^2 qui est prédominant). Ainsi, si x et h sont proches de 0, on a

$$f(x, 1+h) \geq -4 = f(0,1).$$

Ainsi, $(0,1)$ est un minimum local pour f. L'étude en $(0,-1)$ est similaire, mais cette fois on doit poser $y = -1 + h$. On a alors

$$f(x, -1+h) = x^4 - 3h^2 + h^3.$$

Cette fois, on remarque que $f(x,-1) = x^4 \geq 0 = f(0,-1)$ tandis que $f(0,-1+h) = -3h^2 + h^3 < 0$ si h est assez petit. Ainsi, $(0,-1)$ est un point selle. Par ailleurs, $(0,1)$ n'est pas un minimum global. En effet, dans le cas contraire, la fonction f serait minorée. Mais $f(0,y) = y^3 - 3y - 2$ tend vers $-\infty$ si y tend vers $-\infty$, et donc la fonction f n'est pas minorée.

3. On fait le même travail pour f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 - 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 + 2yx - x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y - 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y + 2x.$$

Si (x,y) est un point critique de f, on a nécessairement

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 0.$$

Or,

$$3x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + (x-y)^2,$$

et donc on a nécessairement $x = 0$ et $y = 0$ qui est effectivement un point critique. En ce point critique, on a $rt - s^2 = 0$, on ne peut donc pas conclure directement avec les théorèmes. L'étude ici est un peu plus difficile, car les coordonnées x et y sont mélangées. On va regarder ce qui se passe sur une droite en remarquant que

$$f(2t, t) = 5t^3.$$

Ceci est négatif si $t < 0$ et positif si $t > 0$, alors que $f(0, 0) = 0$. Ainsi, $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de g, qui n'admet donc aucun extrémum local, et a fortiori aucun extrémum global.