Mathématiques spéciales

# Feuille d'exercices n°23

## 1. Dérivées partielles

**Exercice 1.**

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

**Exercice 2.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que $g$ est $C^1$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de $f$.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que $h$ est $C^1$ et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**Exercice 3.**

On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger $f$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

**Exercice 4.**

Pour les fonctions suivantes, démontrer qu'elles admettent une dérivée suivant tout vecteur en $(0,0)$ sans pour autant y être continue.

1. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Exercice 5.**

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ ;
2. $f(x,y) = x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

**Exercice 6.**

Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles de classe $C^1$ ?

1. $f(x,y) = x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ ;
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ ;
3. $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

**Exercice 7.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^1$.

1. On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx,ty)$. Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   (b) En déduire qu'il existe des réels $\alpha$ et $\beta$ que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

**Exercice 8.**

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2(x+y)$.
2. $f(x,y) = e^{xy}$.

**Exercice 9.**

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose
$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1. $f$ admet-elle un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$ ?

2. $f$ admet-elle un prolongement $C^1$ à $\mathbb{R}^2$ ?
3. $f$ admet-elle un prolongement $C^2$ à $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 10.**

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ solutions des systèmes suivants :

$$\textbf{1.}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= yx^2. \end{cases} \qquad \textbf{2.}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= e^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= e^x + 2y. \end{cases} \qquad \textbf{3.}\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= x^2 y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= xy^2. \end{cases}$$

## 2. Différentiabilité

**Exercice 11.**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $f(x, y) = e^{xy}(x + y)$.
2. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.
3. $f(x, y) = (y \sin x, \cos x)$.

**Exercice 12.**

Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x, y) = \left(xy, \dfrac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2)\right)$.

**Exercice 13.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Justifier que $f$ et $g$ sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de $f$ et celle de $g$ en $(x, y)$.
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$ ;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

**Exercice 14.**

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. $f$ est-elle continue en $(0,0)$ ?
2. $f$ admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$ ?
3. $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?

**Exercice 15.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & \mapsto & xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

1. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ?
2. $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ?
3. $f$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 16.**

Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$.

1. Démontrer que $\phi$ est différentiable en $I_n$ et calculer sa différentielle en ce point.
2. Même question en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ quelconque.

**Exercice 17.**

Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer que l'application déterminant est de classe $C^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $1 \leq i,j \leq n$ et $f(t) = \det(I_n + tE_{i,j})$. Que vaut $f$ ?
3. En déduire la valeur de $\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(I_n)$.
4. En déduire l'expression de la différentielle de det en $I_n$.
5. Retrouver ce résultat en calculant $\det(I_n + tH)$ en trigonalisant $H$.
6. Démontrer que si $A$ est inversible, alors $d_A \det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{comat}(A)H)$.
7. Démontrer que la formule précédente reste valide pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 18.**

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 (P(t))^3 dt$. Démontrer que $\phi$ est différentiable sur $E$ et calculer sa différentielle.

**Exercice 19.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$, et soit $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(u) = u \circ u$. Démontrer que $\phi$ est de classe $C^1$.

**Exercice 20.**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Calculer la différentielle de $u : x \mapsto \langle f(x), f(x)\rangle$.

**Exercice 21.**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2.$$

Démontrer que $f$ est constante.

**Exercice 22.**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Démontrer que $f(0) = 0$.
2. Démontrer que $f$ est linéaire.

## 3. Fonctions numériques

### a. Divers

**Exercice 23.**

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$. Déterminer l'équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à $\mathcal{S}$.

**Exercice 24.**

On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs $F$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire $f$ tel que $F = grad(f)$. Montrer que les champs suivants dérivent d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont ils dérivent.

1. $F(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$, défini sur $\mathbb{R}^3$.
2. $F(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, défini sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$.

## b. Extrema

**Exercice 25.**

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$.

1. Déterminer les points critiques de $f$, de $g$.
2. En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de $f$.
3. En étudiant les valeurs de $g$ sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de $g$.

**Exercice 26.**

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$
4. $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

**Exercice 27.**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ ;
2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ;
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

**Exercice 28.**

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ;
2. $f(x, y) = y\big(x^2 + (\ln y)^2\big)$ sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ ;
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ;

**Exercice 29.**

Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter $D$ et trouver une paramétrisation de $\Gamma$, le bord de $D$.
2. Justifier que $f$ admet un maximum et un minimum sur $D$.
3. Déterminer les points critiques de $f$.
4. Déterminer le minimum et le maximum de $f$ sur $\Gamma$.
5. En déduire le minimum et le maximum de $f$ sur $D$.

**Exercice 30.**

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que $f$ admet un maximum sur $K$, et déterminer ce maximum.

1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$;
2. $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0,1] \times [0,1]$ ;
3. $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ et $K = [0, \pi/2]^2$.

**Exercice 31.**

Étudier les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \exp(axy),\ a > 0$ sous la contrainte $x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$.

**Exercice 32.**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes. Est-ce que ce sont des extrema globaux ?

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$ ;
2. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$ ;
3. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.