

Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_2^{33} \frac{1}{(t-1)^2} dt \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{e^{2x} + e^x} dx$$

Remarque : pour la seconde intégrale, on pourra utiliser un changement de variable

Correction.

a) On a :

$$\int_2^{33} \frac{1}{(t-1)^2} dt = \left[-\frac{1}{t-1} \right]_2^{33} = -\frac{1}{32} + \frac{1}{1} = \frac{31}{32}.$$

b) On effectue le changement de variable $u = e^x$ qui est bien licite car $\exp$ est C^1 strictement croissante sur $[0, 1]$:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x} + e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{u^2 + u} \times \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{1}{u^2(u+1)} du.$$

Or, par décomposition en éléments simples, on obtient :

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1}$$

d'où :

$$I = \left[-\frac{1}{u} - \ln(u) + \ln(1+u) \right]_1^e = \ln(1+e) - \frac{1}{e} - \ln(2).$$

Exercice 2.

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. (a) Donner le développement limité en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
 (b) En déduire le développement limité en 0 de f à l'ordre 5
 (c) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\sin(x) - x}$.
2. Montrer que f est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+$ et convexe sur $\mathbb{R}_-$.
3. En déduire l'inégalité suivante, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\frac{\pi}{4}x \leq f(x) \leq \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}$$

Correction.

1. (a) On a $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$ au voisinage de 0.
 (b) On sait que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc en intégrant le DL précédent, on obtient, au voisinage de 0 :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

Sachant que $f(0) = 0$, on a donc :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

- (c) pour x au voisinage de 0, d'après ce qui précède, on a $f(x) - x = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et on sait que $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Ainsi :

$$\frac{f(x) - x}{\sin(x) - x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{x^3}{6}} = 2.$$

Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{1}{2}$.

2. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Donc f'' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$, d'où le résultat.

3. Comme f est concave sur $\mathbb{R}_+$, son graphe est au dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.

En particulier, il est au dessus de la corde entre les points d'abscisses 0 et $\pi/4$ qui est d'équation $\frac{\pi}{4}x$ (car $f(0) = 0$ et $f(1) = \pi/4$) ; et il est en dessous de sa tangente en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ qui est d'équation

$$y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}$$

car $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 3/4$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi/6$.

Exercice 3.

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$.

Correction.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est concave car elle est deux fois dérivable sur cet intervalle et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \leq 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Jensen, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ (et donc de somme égale à 1) :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i).$$

Or,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i},$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{a_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

Ainsi, en multipliant l'inégalité par $\sqrt{n} \geq 0$, on obtient le résultat, à savoir :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

Problème 1. Propriété de la série harmonique alternée

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

L'objectif de ce problème est d'obtenir des informations sur la suite $(A_n)_{n \geq 1}$. Plus précisément, nous allons calculer la limite de cette suite puis nous en déterminerons un développement asymptotique à deux termes.

Aucun prérequis sur les séries numériques n'est nécessaire.

On introduit la suite d'intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$$

Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer les intégrales I_0, I_1 et I_2 .
2. (a) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Quelle est la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

4. En utilisant ce qui précède, montrer que : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$
Indication : on pourra éventuellement procéder par récurrence.
 (b) Conclure quant à la limite de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$.

Dans la suite du problème, on veut préciser cette convergence en calculant un développement asymptotique de la suite.

6. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$.

7. En utilisant un encadrement judicieux de la fonction dans l'intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}$$

8. Montrer que :

$$\frac{1}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

9. Conclure que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction.

Première partie : étude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On a :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

et :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

De plus ¹ :

$$\frac{X^2}{X+1} = \frac{X(X+1) - (X+1) + 1}{X+1} = X - 1 + \frac{1}{X+1}$$

Ainsi :

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{x^n}{1+x} \geq 0$ et $x-1 \leq 0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$. Par positivité de l'intégrale, on a donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Ainsi :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale car :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{x^n}{1+x} \geq 0$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ; le théorème de la limite monotone nous permet donc de conclure que :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On sait que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors $I_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. De plus $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence précédemment obtenue, on obtient $2\ell = 0$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(I_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ donc :

$$I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \quad \text{et} \quad I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$$

En utilisant l'égalité obtenue à la question 2., ces deux inégalités se réécrivent :

$$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{(n-1)+1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

Comme $\frac{1}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, on déduit du théorème des gendarmes pour les équivalents que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Deuxième partie : étude de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$

5. (a) On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a $A_1 = 1$ et (en utilisant la question 1.) :

$$\ln(2) + (-1)^2 I_1 = \ln(2) + (1 - \ln(2)) = 1 = A_1$$

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$. Montrons que :

$$A_{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1}$$

On a (en utilisant la relation de Chasles pour les sommes et l'hypothèse de récurrence) :

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{=A_n} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

D'après la question 3., on a $I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \ln(2) + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - I_{n+1} \right) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1} \\ &= \ln(2) + (-1)^{n+2} I_{n+1} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$$

(b) La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc $(-1)^{n+1} I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

La relation obtenue à la question précédente entraîne que :

la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\ln(2)$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n & v(x) &= \frac{1}{1+x} \\ u(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} & v'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$$

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. Il est clair que $(1+x)^2 \geq 1$ donc (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$. Comme $x^{n+1} \geq 0$, on obtient $0 \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq x^{n+1}$. Par (positivité et) croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \quad \text{où} \quad \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+2}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\left| \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \right| = \left| \frac{2n - (2n+2)}{2n(2n+2)} \right| = \frac{1}{n(2n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

car $n(2n+2) = 2n^2 + 2n \geq n^2$. Ainsi :

$$\frac{1}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilisant successivement les questions 5.(a) et 6., on a :

$$A_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} J_n \right) = \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n$$

D'après la question 7., on a :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \right| = \frac{1}{n+1} J_n \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, d'après la question 8.

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car la suite $((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On obtient bien le développement asymptotique annoncé :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Il s'agit de décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.