

Corrigé du devoir surveillé n°7

Au choix :

- Un exercice (E3A) + un problème (CCinP)
- Un problème (Mines-Ponts)

1. Un exercice + un problème (E3A-CCinP)

E3A-CCinP

Exercice 1. *E3A 2019*

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \text{ et } 2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n \geq 0} u_n(x)$.
2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur $\mathcal{D}$.
3. Donner pour tout $x \in \mathcal{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4. Pour tout entier naturel n , on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) \, dx \text{ et } I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) C(x) \, dx$$

- (a) Calculer J_n puis I_n .
- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Correction.

- Q1 :** On a $u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ donc $|u_n(x)| \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$ terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de α donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Q2 :** D'après ce qui précède, $\|u_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|^n}{n!}$ et $\sum \frac{|\alpha|^n}{n!}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
- Q3 :** Posons $v_n(x) = \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \frac{(\alpha e^{ix})^n}{n!}$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp(\alpha e^{ix})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(v_n(x)) = u_n(x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \operatorname{Re}(\exp(\alpha e^{ix}))$. Or $\exp(\alpha e^{ix}) = \exp(\alpha \cos(x) + i\alpha \sin(x)) = e^{\alpha \cos(x)} e^{i\alpha \sin(x)}$ donc $C(x) = e^{\alpha \cos(x)} \cos(\alpha \sin(x))$.
- Q4.1 :** On a $J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) C(x) dx$ et $x \mapsto \sin(nx) C(x)$ est impaire car C est paire donc $J_n = 0$. On a $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(nx) u_k(x) dx$. On pose $w_k(x) = \cos(nx) u_k(x)$. On a $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc la série de fonctions $\sum w_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions w_k sont continues. On en déduit que $I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) dx$. Or, $w_k(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx) \cos(kx)}{k!} = \frac{\alpha^n}{2k!} (\cos(k+n)(x) + \cos(k-n)(x))$ donc $\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x) dx = 0$ si $k \neq n$ et $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x) dx = \frac{\alpha^n}{2n!} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{\alpha^n \pi}{n!}$ donc $I_n = \frac{\alpha^n \pi}{n!}$.
- Q4.2 :** On a $J_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (car $\sum \frac{\alpha^n \pi}{n!}$ converge).
- Q5 :** On a $\cos^2(nx) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ donc $\frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \frac{\alpha^n}{2n!} + \frac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!}$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{2n!} = \frac{e^\alpha}{2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(n \times 2x)}{n!} = C(2x)$ donc la série $\sum \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ converge et $S(x) = \frac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha \cos(2x)} \cos(\alpha \sin(2x))$.

Problème 1. CCinP 2014

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

- On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.
En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).
- On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
 - Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

- (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$

- (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n , $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée)

- (a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .

- (b) A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .

6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

- (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle

$[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

- (b) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx) \sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p , la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

7. Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R < 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

8. On considère la série de la variable complexe $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

(a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément

sur $] -1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

(b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note D_α l'ensemble des complexes z , tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\operatorname{Re}(z) \leq \cos \alpha$.

Représenter hermétiquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

(c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos \alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

(d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n , si $x = \operatorname{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos \alpha}$$

(e) Démontrer que la série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

Correction.

Partie 1 : convergence de séries par transformée d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ = a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

2. (a) Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

- (b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.

Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car (a_k) est une suite décroissante.

Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.

Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

- (c) • Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.
- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = (\sum_{k=0}^n (-1)^k)$ est une suite bornée.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a) • On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\tau}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\tau} \neq 1$.

• Par théorème, $\sum_{k=1}^n e^{ik\tau} = e^{i\tau} \frac{1 - e^{in\tau}}{1 - e^{i\tau}} = e^{i\tau} \frac{e^{in\tau/2} (-2i) \sin(n\tau/2)}{e^{i\tau/2} (-2i) \sin(\tau/2)} = e^{i(n+1)\tau/2} \frac{\sin(n\tau/2)}{\sin(\tau/2)}$

- (b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\tau}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.

- Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

- Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.

Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.

La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\sum_{k=1}^n e^{ik\tau}| \leq \frac{1}{|\sin(\tau/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.

Conclusion : la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.

Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG z_n et

le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de TG $\Im(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente.
Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : convergence uniforme de séries

5. (a) • On montre que la suite $(a_n F_n)$ cvu vers la fonction nulle sur A .
 $\forall z \in A, |a_n F_n(z)| \leq |a_n| \times M$ et cette majoration par une suite (indépendante de z) qui tend vers 0 assure que $(a_n F_n)$ cvu vers 0 sur A .
 • Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de (a_n) .
 Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1}) F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite (a_k) est convergente) indépendant de z assure que la série de fonction $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .
- (b) Il est connu qu'une somme de suites de fonctions qui convergent uniformément définit une suite de fonction qui converge uniformément.
 Ainsi, $(a_n F_n)$ cvu sur A et $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k\right)$ cvu sur A (d'après ce qui précède).
 Donc la somme converge uniformément sur A et cette somme est la suite $(\sum_{k=0}^n a_k f_k)$ d'après la transformation d'Abel.
 Ainsi, la série $\sum a_k f_k$ cvu sur A .
6. (a) • On factorise $1 - e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir le résultat souhaité.
 • La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et de limite nulle.
 Soit $a \in]0, \pi[$.
 Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
 Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| = |\Im(\sum_{k=1}^n e^{ikx})| \leq |\sum_{k=1}^n e^{ikx}| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} = \frac{1}{\sin(|x|/2)}$.
 Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.
 Par hypothèse sur a , $0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$ donc les variations de la fonction $\sin$ donnent $0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|$.
 Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a], |\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}$ ce qui assure le caractère uniformément borné de la série de fonctions qui va bien.
 Ainsi, d'après les questions précédentes, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ converge uniformément sur le segment $[a, 2\pi - a]$.
 • Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux, la convergence uniforme assure la continuité de la limite sur le domaine de convergence. Ainsi, U est continue sur tous les segments $[a, 2\pi - a]$ pour $a \in]0, \pi[$.
 Donc U est continue sur la réunion de ces segments qui forme l'intervalle $]0, 2\pi[$ tout entier.
- (b) D'après les énoncés précédents, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
 D'après les calculs précédents, $\forall x \in]0, \pi], A_n(x) = |\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px)| = \left| \frac{\sin(nx/2) \sin(px)}{\sin(x/2)} \right|$.
 Pour $x \in]0, \pi]$, on a d'après l'énoncé, $0 < \frac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la

fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \frac{|\sin(px)|\pi}{x}$.

Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi], A_n(x) \leq \frac{p|x|\pi}{x} = p\pi$.

Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle.

Ainsi, la somme partielle qui va bien est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc $\sum_{n \geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

Partie 3 : convergence uniforme d'une série entière

7. La série entière converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$ ie de la forme $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$.

8. (a) Supposons que la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ cvu sur $] -1, 1[$ et notons f la fonction limite.

Alors la suite de fonctions $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ converge uniformément vers f sur $] -1, 1[$. De plus, 1 est dans l'adhérence de $] -1, 1[$ et la limite quand x tend vers 1^- de $S_n(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$) et vaut $L_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Par conséquence du théorème de la double limite ($\mathbb{R}$ est complet...), la suite (L_n) est convergente ce qui est absurde car la série de TG $\frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.

(b) D_α est le disque fermé de centre 0 de rayon 1 privé d'une "calotte"...

(c) • L'écriture proposée de D_α ne pose pas de problème. Notons également que dans $\mathbb{R}^2$ (en dimension finie, donc), toutes normes sont équivalentes...

• Posons $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi_1(x, y) = x^2 + y^2$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi_2(x, y) = x$.

Par les théorèmes généraux, φ_1 et φ_2 sont clairement continue sur $\mathbb{R}^2$.

De plus, les ensembles $] -\infty, 1]$ et $] -\infty, \cos(\alpha)]$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$.

Donc les images réciproques par φ_1 et φ_2 sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ par théorèmes (image réciproque d'un fermé par une application continue...)

Une intersection (quelconque) de fermés est fermée donc $D_\alpha = \varphi_1^{-1}(] -\infty, 1]) \cap \varphi_2^{-1}(] -\infty, \cos(\alpha)])$ est fermé.

• D_α est un fermé d'après ce qui précède et borné (par 1 en norme euclidienne...). En dimension finie, un fermé borné est un compact.

Donc D_α est un compact.

(d) • $1 \notin D_\alpha$ car $\cos(\alpha) < 1$ (par hypothèse sur α ...)

• Soit $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $z \neq 1$ ce qui permet d'écrire que $|F_n(z)| =$

$$\left| 1 \times \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|}$$

$$\leq \frac{2}{|1 - z|}$$

Il reste à minorer le dénominateur par $1 - x$.

On a $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2 > 0$ car $x \leq \cos(\alpha) < 1$.

Donc $|1 - z| \geq |1 - x| = 1 - x \geq 1 - \cos(\alpha) > 0$ (toujours car $x \leq \cos(\alpha) < 1$...)

Par passage à l'inverse, $\frac{1}{|1 - z|} \leq \frac{1}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - \cos(\alpha)}$.

Ainsi, par multiplication par le réel positif 2 : $|F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$

(e) Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$.

La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0 donc pour appliquer le résultat de la question **3.5.b.**, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n z^k)$ est uniformément bornée sur D_α .

Ceci est assuré par la majoration précédente car $\frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$ est indépendant de z et de n .

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α .

2. Un problème (Mines-Ponts)

Mines-Ponts

Problème 2. *Mines-Ponts 2023*

Fonction de Wallis

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière, ...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

- 1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

- 3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \quad (1)$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I . (**question admise pour les 3/2**).

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

puis que

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b , et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2)$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de $]0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t)$$

En déduire $f''(0)$. **Calcul à faire sans justification d'échange de limite/intégrale pour les 3/2.**

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J .

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \tilde{f}(x) = \ln(f(2x))$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2} \right)$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leq p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

21 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $] -T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

22 ▷ Existe-t-il une application h , de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T) ?$$

Fin du sujet

Remarque : par rapport au sujet initial, la question 16 a été modifiée : « convergence simple sur $]0, \pi/2]$ » au lieu de « convergence simple sur $]0, \pi]$ » qui est une erreur d'énoncé.

Énoncé reproduit par Édouard Lucas et Jean Nougayrède

Correction.

Correction produite par Édouard Lucas et Jean Nougayrède

Fonction de Wallis

6 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ On note D l'ensemble de définition de σ .

Méthode 1 : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a par croissance comparée : $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$

donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ diverge grossièrement d'où $D \subset [-1, 1]$.

Par ailleurs, pour $k \in \mathbf{N}^*$ la fonction $x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$ est continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ (i).

De plus $\forall x \in [-1, 1]$, $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge selon ce cher Georges.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \left(x \mapsto \frac{x^k}{k^2} \right)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$.

Méthode 2 : σ est la somme d'une série entière de la forme $\sum k^p x^k$ avec $p = -2 \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence vaut donc 1. On a donc

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1]$$

et σ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$ car C^∞ sur icelui. Comme $2 > 1$,

les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1^k}{k^2} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$ convergent absolument selon Riemann donc convergent.

Ainsi $D = [-1, 1]$ et selon le lemme d'Abel radial, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sigma(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1^k}{k^2} = \sigma(1)$$

Ainsi σ est continue en 1 et c'est analogue en -1 .

Conclusion : le domaine de définition de σ est $[-1, 1]$ et σ est continue sur icelui

2 ▷ Soit α et $\beta \in \mathbb{R}$. On note $P = \alpha X^2 + \beta X$. Ainsi $P' = 2\alpha X + \beta$ et $P'' = 2\alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégrations par parties successives (avec des fonctions de classe C^1), on a

$$\int_0^\pi P(t) \cos(nt) dt = \left[P(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt = 0 + \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt$$

$$\text{or } \int_0^\pi P''(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} dt = \left[2\alpha \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0 \text{ et } \left[P'(t) \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{(-1)^n P'(\pi) - P'(0)}{n^2}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta}{n^2}$$

En prenant $\beta = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, on a $(-1)^n (2\pi\alpha + \beta) - \beta = 1$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

Soit $t \in]0, \pi]$. On a donc $t/2 \in]0, \pi/2]$ et ainsi $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$ et les termes de l'égalité existent bien.

Montrons l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

L'initialisation est triviale car $\sum_{k=1}^0 \cos(kt) = 0 = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

Pour l'hérédité, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que l'égalité soit vraie au rang n . On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} + \cos((n+1)t) = \frac{\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Or $\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos((n+1)t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ donc

$$\sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin((n+1)t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) = \sin\left((n+1)t + \frac{t}{2}\right)$$

On a donc l'égalité au rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+3)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Comme $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$, on aurait pu utiliser une somme géométrique de raison $e^{it} \neq 1$ car $t \in]0, \pi]$.

3 ▷ On effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe C^1 : φ et $t \mapsto \frac{-\cos(xt)}{x}$:

$$\int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = \left[\varphi(t) \frac{-\cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \varphi'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt = \frac{\varphi(0) - \varphi(\pi) \cos(\pi x) + \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt}{x}$$

$$\text{Ainsi } \left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi) \cos(\pi x)| + \left| \int_0^\pi \varphi'(t) \cos(xt) dt \right|}{x} \text{ donc}$$

$$\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| \cdot |\cos(\pi x)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| \cdot |\cos(xt)| dt}{x} \leq \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x}$$

$$\text{or } \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)| dt}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

alors selon le théorème des gendarmes, on a montré le lemme de Riemann-Lebesgue pour φ de classe C^1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

On a $\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ donc selon la première égalité de la question 2 :

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{2 \frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 2n+1$$

Comme $t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0, avec la deuxième égalité de la question 2 on a :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt$$

On pose $g : t \mapsto \frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ qui se prolonge par continuité sur $[0, \pi]$ car $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2\pi t}{2\pi t} = -1$.

En notant φ le prolongement continu de g sur $[0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \varphi(t) dt - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt$$

On a φ continue sur $[0, \pi]$ (i) et φ est dérivable sur $]0, \pi]$ (ii) et

$$\forall t \in]0, \pi], \varphi'(t) = \frac{(2t - 2\pi) \sin(t/2) - (1/2)(t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{4\pi \sin^2(t/2)} = \frac{4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2)}{8\pi \sin^2(t/2)}$$

Quand $t \rightarrow 0$, on a

$$4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = 4t(t/2 + o(t^2)) - 4\pi(t/2 + o(t^2)) - t^2(1 + o(t)) + 2\pi t(1 + o(t))$$

$$\text{Ainsi } 4(t - \pi) \sin(t/2) - (t^2 - 2\pi t) \cos(t/2) = t^2 + o(t^2) \sim t^2 \text{ d'où } \varphi'(t) \sim \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2}$$

$$\text{On a donc } \varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{2\pi} \quad (iii)$$

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème du prolongement de la dérivée s'applique :

$$\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t)$$

donc φ' est continue en 0 or φ' est continue sur $]0, \pi]$.

Ainsi φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = 0 - \int_0^\pi \left(\frac{t^2 - 2\pi t}{4\pi} \right) dt. \text{ Ainsi}$$

$$\sigma(1) = \int_0^\pi \left(\frac{2\pi t - t^2}{4\pi} \right) dt = \left[\frac{3\pi t^2 - t^3}{12\pi} \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{3\pi^3 - \pi^3}{12\pi} - 0$$

On a bien $\boxed{\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}}$

7 Équivalents

4 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x = \exp(x \ln(\sin(t)))$ est continue sur $]0, \pi/2]$. Or

$$(\sin(t))^x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$$

Par équivalence, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^{-x}}$ l'est.

Ainsi $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ si et seulement si $-x < 1$.

Comme $t \mapsto (\sin(t))^x$ est positive sur $]0, \pi/2]$, le domaine de définition de f est I

Soit $x \in I$. On a $x + 2 \in I$.

On effectue alors une intégration par parties, sous réserve de convergence du bloc tout intégré :

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \sin(t) dt = [-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x \cos^2(t) dt$$

Comme $x+1 > 0$, on a $[-(\sin(t))^{x+1} \cos(t)]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 0$ ce qui valide l'intégration par parties.

Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$ et que $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \cos^2(t) dt$ converge, alors on a

$$f(x+2) = (x+1) \left(\int_0^{\pi/2} (x+1)(\sin(t))^x dt - \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+2} dt \right) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$$

$$\text{On a bien } \boxed{(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)} \quad (1)$$

5 ▷ On pose $g : \begin{cases} I \times]0, \pi/2] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto (\sin(t))^x \end{cases}$

(i) Soit $t \in]0, \pi/2]$. La fonction $g(\cdot, t) : x \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ est de classe C^2 sur I de dérivées successives :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto \ln(\sin(t)) \exp(x \ln(\sin(t))) = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \mapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x$$

(ii) Soit $x \in I$. Les fonctions $g(x, \cdot)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile!)

La fonction $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ selon la question précédente.

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^x = \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$

On a $\frac{x+1}{2} > 0$ donc par croissance comparée et par composition $\ln(\sin(t)) (\sin(t))^{\frac{x+1}{2}} \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = o\left((\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}\right)$$

Comme $\frac{x-1}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto (\sin(t))^{\frac{x-1}{2}}$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ comme en question 3.

Par comparaison la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(iii) Soit $a < b$ dans I . On a alors l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, \pi/2], \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x \leq \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$$

avec la fonction $t \mapsto \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^a$ intégrable sur $]0, \pi/2]$, comme en (ii).

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème de la classe C^2 pour les intégrales s'applique :

f est de classe C^2 sur I

De plus pour tout $x \in I$, on a

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \leq 0 \text{ et } f''(x) = \int_0^{\pi/2} \ln^2(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \geq 0$$

ainsi f est décroissante et convexe sur I

- 6 ▷ Quand $x \rightarrow -1$, $f(x) = \frac{(x+2)f(x+2)}{x+1}$ selon 4 et $(x+2)f(x+2) \rightarrow 1 \times f(1)$ car f continue sur I et $1 \in I$.

Par ailleurs $f(1) = [-\cos(t)]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 1 \neq 0$, on peut conclure que $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}}$

- 7 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $n \in I$ et en multipliant par $f(n+1)$, on a : $(n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$
Ainsi la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Comme $f(0) = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1) = 1f(0)f(1) = \frac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $\boxed{f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}$

Comme f est décroissante et positive, on a donc $f(n+1)^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2n}$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq f(n) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Soit $x \geq 1$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x . On a donc $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x \rfloor + 2)}} \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

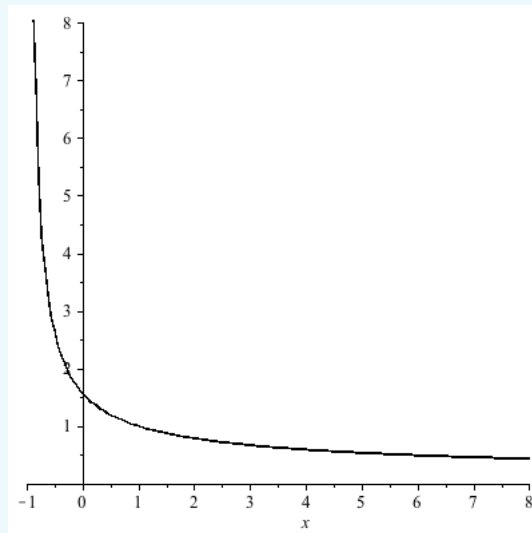
Or $x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 2 \leq x+2$

Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $x-1 \sim x \sim x+2$, d'où par encadrement d'équivalents, on a $\lfloor x \rfloor \sim x$ et $\lfloor x \rfloor + 2 \sim x$.

À nouveau par encadrement d'équivalents, on a bien $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$

- 8 ▷ Sur le graphique doivent apparaître les points $(0, f(0)) = (0, \pi/2)$, $(1, f(1)) = (1, 1)$, les asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 0$.

On observera que f est décroissante et convexe.



Il n'est pas aisé de faire apparaître les équivalents sur un graphique surtout à main levée.

8 Développement en série entière

9 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $]0, \pi/2]$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $\sqrt{\sin(t)}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$ par croissance comparée.

or $\sin(t) \sim t$, donc $\sqrt{t}(\ln(\sin(t)))^n \rightarrow 0$

D'où $(\ln(\sin(t)))^n = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0.

Par comparaison à une fonction intégrable, $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Ainsi l'intégrale généralisée D_n converge absolument donc converge

Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$; $dt = -du$ nous donne : $D_1 = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - u)) du$

On a bien $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$

10 ▷ En utilisant 5, on a $f'(0) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$ et $f'(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \sin(t) dt$.

Avec 9 et en effectuant le changement de variable $u = 2t$; $du = 2 dt$, on a

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) du - \frac{\ln(2)\pi}{2}$$

En effectuant le changement de variable $u = \pi - t$, $du = -dt$, on a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du = - \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = D_1$$

donc $2D_1 = \frac{2}{2}D_1 - \frac{\ln(2)\pi}{2}$. Ainsi $f'(0) = D_1 = -\frac{\ln(2)\pi}{2}$

On effectue une intégration par parties sous réserve :

$$f'(1) = [(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{\sin(t)} dt$$

On a vu en 9 que $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(1/\sqrt{t})$ or $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^2/2$

d'où $(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $[(1 - \cos(t)) \ln(\sin(t))]_{t \rightarrow 0}^{t=\pi/2} = 0$; ce qui valide l'intégration par parties.

On avait choisi la seule primitive qui pouvait convenir.

On a donc avec le changement de variable $u = \cos(t)$; $du = -\sin(t) dt$:

$$f'(1) = - \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos(t)) \cos(t)}{1 - \cos(t)^2} \sin(t) dt = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1 + \cos(t)} \sin(t) dt = + \int_1^0 \frac{u}{1 + u} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{u+1} - 1 \right) du$$

Ainsi $f'(1) = [\ln|u+1| - u]_{u=0}^{u=1} = \ln(2) - 1 - \ln(1) + 0$

On peut conclure que $f'(1) = \ln(2) - 1$

11 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est strictement décroissante (par composition) et C^1 sur $]0, \pi/2]$

Par ailleurs, on a : $-\ln(\sin(\pi/2)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln(\sin(t))) = +\infty$.

Ainsi cette application induit une bijection de $]0, \pi/2]$ vers $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $u = -\ln(\sin(t))$; $du = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)} dt$

Or pour $t \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(t) > 0$ et donc

$$\frac{\sin(t)}{-\cos(t)} = -\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2u}-1}}$$

$$\text{d'où } D_n = \int_{+\infty}^0 (-u)^n \frac{-du}{\sqrt{e^{2u}-1}} = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du$$

$$\text{ce qui donne } \boxed{(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} du}$$

La fonction $u \mapsto u^{n+1}e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$ car $u^{n+1}e^{-u} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/u^2)$ par croissance comparée.

Donc $u \mapsto u^{n+1}e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} u^{n+1}e^{-u} du = [(n+1)u^n e^{-u}]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = (n+1) \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$$

Ainsi par récurrence immédiate

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n! \int_0^{+\infty} e^{-u} du = n! [-e^{-u}]_{u=0}^{u \rightarrow +\infty} = n!$$

$$\text{Or } (-1)^n D_n - \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} - \frac{1}{e^u} \right) du. \text{ Ainsi}$$

$$(-1)^n D_n - n! = \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{e^u - \sqrt{e^{2u}-1}}{e^u \sqrt{e^{2u}-1}} \right) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u \sqrt{e^{2u}-1} (e^u + \sqrt{e^{2u}-1})} du$$

Le calcul est licite car la quantité conjuguée : $e^u + \sqrt{e^{2u}-1} \geq \sqrt{e^{2u}-1} > 0$, pour $u > 0$.

Par calcul dans $[0, +\infty]$ car les intégrandes sont positives, on a

$$|(-1)^n D_n - n!| \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (e^{2u}-1)} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{e^u (2u)} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = \frac{(n-1)!}{2} < +\infty$$

On a utilisé l'inégalité de convexité $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, e^t - 1 \geq t > 0$ d'où

$$(-1)^n D_n - n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}((n-1)!)$$

or $(n-1)! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$ ainsi

$$(-1)^n D_n = n! + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n!)$$

On conclut : $\boxed{D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!}$

12 ▷ Soit $x \in]-1, 1[$. En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on a

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(x \ln(\sin(t))) dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt$$

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu en 9 que $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!}$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Il en est donc de même pour $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est continue et intégrable sur $]0, \pi/2]$.

(ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \left(t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right)$ converge simplement sur $]0, \pi/2]$ de somme $t \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$

et $t \mapsto \exp(x \ln(\sin(t)))$ continue sur $]0, \pi/2]$ (argument inutile)

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n$ est de signe constant sur $]0, \pi/2]$ (celui de $(-x)^n$). Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right| dt = \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt \right| = \frac{\left| \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^n dt \right|}{n!} \cdot |x^n| = \frac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n$$

Selon 11, on a $\frac{|D_n|}{n!} \cdot |x|^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n$ et la série géométrique $\sum_n |x|^n$ converge absolument donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n \right| dt < +\infty$$

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème d'intégration terme à terme s'applique ce qui nous donne l'existence des membres dans $\mathbb{R}$ et l'égalité

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(t))^n}{n!} x^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

Ainsi f est bien développable en série entière sur $] -1, 1[$

9 Convergence de suite de fonctions

13 ▷ On a $\forall x \in \mathbb{R}, a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x) > 0$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, a^2 > 0$ et $b^2 > 0$.

Ainsi par composition Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part on a

$$\Psi'(x) = \frac{2(b^2 - a^2) \cos(x) \sin(x)}{a^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)} = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)}$$

D'autre part, comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $b - a < a + b$ et $a - b < a + b$ d'où ρ est bien défini et

$$|\rho e^{2ix}| = \left| \frac{b-a}{b+a} \right| \cdot |e^{2ix}| = \max \left\{ \frac{b-a}{b+a}, \frac{a-b}{b+a} \right\} < 1$$

Ainsi la série géométrique $\sum_{k \geq 0} (\rho e^{2ix})^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho e^{2ix})^k = \frac{1}{1 - \rho e^{2ix}} = \frac{1 - \rho e^{-2ix}}{(1 - \rho e^{2ix})(1 - \rho e^{-2ix})}$$

En prenant les parties imaginaires puis en multipliant par $(b+a)^2 / (b+a)^2$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{-\rho \sin(-2x)}{1 - \rho(e^{2ix} + e^{-2ix}) + \rho^2} = \frac{\rho \sin(2x)}{1 - 2 \cos(2x)\rho + \rho^2} = \frac{(b-a)(b+a) \sin(2x)}{(b+a)^2 - 2 \cos(2x)(b-a)(b+a) + (b-a)^2}$$

Comme $\sin(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx) = \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{2a^2 + 2b^2 - 2(b^2 - a^2)(1 - 2 \sin^2(x))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(b^2 - a^2) \sin(2x)}{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(x)}$$

On a bien $\boxed{\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)}$

14 ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme Ψ' est continue sur $\mathbb{R}$, on a alors par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = \int_0^x \Psi'(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k 4 \sin(2kt) \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \right) dt$$

en ayant posé pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : t \mapsto 4\rho^k \sin(2kt)$.

Or les f_k sont continues sur $\mathbb{R}$ (i)

de plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_k(t)| \leq 4\rho^k$ et la série géométrique $\sum \rho^k$ converge car $\rho \in]-1, 1[$.

donc la série $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (ii).

Avec (i) et (ii), on peut intervertir somme de série et intégrale sur tout segment de $\mathbb{R}$ par théorème de cours. Ainsi

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_0^x f_k(t) dt \right) = \ln(a^2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-4\rho^k \cos(2kt)}{2k} \right]_{t=0}^{t=x} = 2 \ln(a) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} - \frac{\rho^k}{k} \right)$$

Or avec le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $] -1, 1[$, on a

$$\ln(1 - \rho) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-\rho)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k}$$

Ainsi

$$\Psi(x) = 2 \ln(a) - 2 \ln(1 - \rho) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k} = 2 \ln \left(\frac{a}{1 - \rho} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k \cos(2kx)}{k}$$

Or $\frac{a}{1 - \rho} = \frac{a}{1 - \frac{b-a}{a+b}} = \frac{a(a+b)}{(a+b) - (b-a)} = \frac{a+b}{2}$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k}$$

15 ▷ On a donc $\forall x \in [0, \pi]$, $\Psi^2(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$

Or les fonctions $u_0 : x \mapsto 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x)$ et $u_k : x \mapsto (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x)$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur $[0, \pi]$.

De plus comme Ψ est bornée sur $[0, \pi]$ car continue sur ce segment, on peut montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \pi]$

de somme Ψ^2 .

Ainsi par théorème de cours :

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = \int_0^\pi 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \Psi(x) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi (-2) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k \Psi(x) dx$$

Ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx \quad (\star)$$

À l'aide d'une nouvelle convergence uniforme de série de fonctions, on a

$$\int_0^\pi \Psi(x) dx = \int_0^\pi 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) dx = 2\pi \ln \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

On s'est servi de $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \cos(2px) dx = 0$ (fonction π -périodique de moyenne nulle)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide d'une autre convergence uniforme :

$$\int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^\pi \cos(2kx) dx - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n} \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx$$

or $\int_0^\pi \cos(2kx) dx = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$2 \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx = \int_0^\pi \cos(2(k+n)x) dx + \int_0^\pi \cos(2(k-n)x) dx$$

Ainsi si $n \neq k$ on a $\int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2nx) dx = 0$ et

$$2 \int_0^\pi \cos(2kx) \cos(2kx) dx = \int_0^\pi \cos(4kx) dx + \int_0^\pi 1 dx = \pi$$

donc $\int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx = -\pi \frac{\rho^k}{k}$ puis en reprenant $(\star)$

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \times 2\pi \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \left(-\pi \frac{\rho^k}{k} \right) = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2}$$

On conclut enfin que

$$\boxed{\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2)}$$

16 ▷ Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On a : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On a donc $a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin^2(t) > 0$

Comme $\ln$ est continue, on a $\Psi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\sin^2(t))$

On a établi la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 2 \ln(\sin(t))$

L'énoncé original parle de convergence uniforme sur $]0, \pi]$, il s'agit d'une erreur d'énoncé.

(i) Les fonctions Ψ_n^2 ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (argument inutile!)

(ii) La suite d'applications $(\Psi_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergence simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ vers $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$.

(iii) La fonction $t \mapsto 4 \ln^2(\sin(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ (argument inutile!)

(iv) La suite (a_n) est décroissante et positive de limite nulle et alors que la suite $(b_n) = (1 - a_n)$ est croissante et positive de limite 1.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n^2 \leq a_1^2 = \frac{1}{4}$ et $b_1^2 = \frac{1}{4} \leq b_n^2 \leq 1$.

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{1}{4} \sin^2(t) \leq a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t) \leq \frac{1}{4} \cos^2(t) + \sin^2(t) \leq \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

D'où par croissance de $\ln$, on a

$$2 \ln(\sin(t)) - 2 \ln(2) \leq \Psi_n(t) \leq \ln(1) = 0$$

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad |\Psi_n^2(t)| \leq 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2$$

car $t \mapsto 4 \ln(2)^2 - 8 \ln(2) \ln(\sin(t)) + 4 \ln(\sin(t))^2$ est continue et intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, selon 9

Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique. Cela donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 4 \ln^2(\sin(t)) dx = 4D_2$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\forall x \in [0, \pi]$, $\Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a en effectuant le changement de variable :

$$u = \pi - x; \quad du = -dx$$

$$\int_0^\pi \Psi_n(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx + \int_{\pi/2}^\pi \Psi_n(x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx$$

Ainsi avec 15, on a

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_n(x)^2 dx = 2\pi \left(\ln \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right) \right)^2 + \pi \sigma(\rho_n^2) = 2\pi \ln(2)^2 + \pi \sigma((b_n - a_n)^2)$$

car $a_n + b_n = 1$ en ayant posé $\rho_n = \frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} = b_n - a_n$ (on a bien $b_n > 0$ et $a_n > 0$).

Comme σ est continue sur $[-1, 1]$ et $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$ selon la partie 3, on a $\sigma((b_n - a_n)^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$.

D'où $4D_2 = 2\pi \ln(2)^2 + \frac{\pi^3}{6}$.

Avec la partie 2, on en déduit $f''(0) = D_2 = \frac{\pi \ln(2)^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$

10 Convexité logarithmique

17 ▷ Soit $x > -1$.

La fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue et positive sur $]0, \pi/2]$ et non identiquement nulle car $(\sin(\pi/2))^x = 1$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt > 0.$$

Donc f est définie sur l'intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\ln \circ f$ est de classe C^2 sur I car f l'est, selon 5.

$$\text{Ainsi } (\ln \circ f)' = \frac{f'}{f} \text{ et } (\ln \circ f)'' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2}.$$

Pour établir que f est $\ln$ -convexe sur I , il suffit alors de montrer que : $0 \leq \frac{f''f - (f')^2}{f^2}$

Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$. Les fonctions $t \mapsto (\sin(t))^{x/2}$ et $t \mapsto \ln(\sin(t)) (\sin(t))^{x/2}$ sont continues sur le segment $[\varepsilon, \pi/2]$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, pour le produit scalaire usuel sur $C([\varepsilon, \pi/2], \mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \right)^2 \leq \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \right) \times \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x dt \right)$$

Comme les intégrales convergent sur $]0, \pi/2]$, on peut faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) (\sin(t))^x dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \right) \times \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))^2 (\sin(t))^x dt \right)$$

$$\text{Ainsi } (f'(x))^2 \leq f''(x)f(x)$$

On a montré que $(\ln \circ f)'' \geq 0$ sur I d'où f est une application de I dans $\mathbb{R}$ $\ln$ -convexe

18 ▷ Soit $x \geq 0$. Comme $2x+2 > 2x+1 > 2x \geq 0$, selon (1), on a

$$\tilde{f}(x+1) = \ln(f(2x+2)) = \ln((2x+2)f(2x+2)) - \ln(2x+2) = \ln((2x+1)f(2x)) - \ln(2x+2) = \tilde{f}(x) + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x+k+1) - \tilde{f}(x+k) = \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$. Par télescopage, on a alors

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (\tilde{f}(x+k+1) - \tilde{f}(x+k)) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$$

On peut conclure que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right)$

19 ▷ Par composition $\tilde{f}$ est de classe C^2 sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$ et

$$\forall x \in \left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[, (\tilde{f})'(x) = 2(\ln \circ f)'(x) \text{ et } (\tilde{f})''(x) = 4(\ln \circ f)''(x) \geq 0$$

donc $\tilde{f}$ est convexe sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$.

En appliquant la croissance des pentes avec $n - 1 \leq n + x \leq n + p$ et n dans $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$,

on a
$$\frac{\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{n+x-n} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{n+p-n}$$

ce qui permet de conclure que
$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

D'après 18 avec $n - 1 \geq 0$, on a $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) = \ln \left(\frac{2(n - 1) + 1}{2(n - 1) + 2} \right) = \ln \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right)$

Or $\ln \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par composition et donc $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Toujours selon 18, on a par somme finie

$$\tilde{f}(n + p) - \tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2n + 2k + 1}{2n + 2k + 2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or

$$x \left(\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n - 1) \right) \leq \tilde{f}(n + x) - \tilde{f}(n) \leq \frac{x}{p} \left(\tilde{f}(n + p) - \tilde{f}(n) \right)$$

Ainsi par produit et selon les gendarmes $(\tilde{f}(n + x) - \tilde{f}(n))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

À x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, ce résultat dépend de l'existence $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq p$.

Choisir $p = 1 + \lfloor x \rfloor$ valide ce résultat indépendamment de p .

20 ▷ On sait déjà que f est une application de I dans $\mathbb{R}$ (Q4), $\ln$ -convexe (Q17), qui vérifie (1) (Q4) et telle que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ (Q7).

Pour l'unicité, on considère h une application de I dans $\mathbb{R}$, $\ln$ -convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \frac{\pi}{2}$.

On pose $\tilde{h} : x \mapsto \ln(h(2x))$.

Comme h vérifie (1), on peut établir comme en 18 que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{h}(x + p) = \tilde{h}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln \left(\frac{2x + 2k + 1}{2x + 2k + 2} \right) \quad (2)$$

Comme $\tilde{h}(0) = \ln(\pi/2) = \tilde{f}(0)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{h}(n) = \tilde{f}(n) \quad (3)$$

Pour montrer que $\tilde{h}$ est convexe, on considère x et $y \in] - 1/2, +\infty[$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Comme $2x$ et $2y \in I$ et que $\ln \circ h$ est convexe sur I , on a

$$\tilde{h}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \ln \circ h(\lambda 2x + (1 - \lambda)2y) \leq \lambda \ln \circ h(2x) + (1 - \lambda) \ln \circ h(2y) = \lambda \tilde{h}(x) + (1 - \lambda) \tilde{h}(y)$$

Ainsi $\tilde{h}$ est convexe sur $] - 1/2, +\infty[$.

Soit $x > 0$, en faisant comme en 19, on peut alors montrer que $\tilde{h}(n + x) - \tilde{h}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En utilisant (3) et la question 19, on obtient :

$$\tilde{h}(n + x) - \tilde{f}(n + x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puis à l'aide de (2) et la question 18, on a

$$\tilde{h}(x) - \tilde{f}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $\forall x > 0$, $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)$. D'où $\forall x > 0$, $h(x) = \exp(\tilde{h}(x/2)) = \exp(\tilde{f}(x/2)) = f(x)$
Puis à l'aide de l'identité (1), on obtient

$$\forall x \in I, h(x) = \frac{x+2}{x+1}h(x+2) = \frac{x+2}{x+1}f(x+2) = f(x)$$

Ainsi $h = f$ ce qui donne l'unicité :

f est la seule application de I dans $\mathbb{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $f(0) = \frac{\pi}{2}$

21 ▷ Soit g de $] -T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexe et vérifiant $\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$

On pose $h : x \mapsto \frac{\pi g(Tx)}{2g(0)}$. Comme ci-dessus, on montre facilement que

h est une application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que $h(0) = \frac{\pi}{2}$

Donc $h = f$ puis $g : t \mapsto \frac{2g(0)f(t/T)}{\pi}$

Réciproquement, on montre facilement que pour $k > 0$, l'application $g : t \mapsto kf(t/T)$ est une application de $] -T, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant $\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$.

On conclut pour $T \in \mathbb{R}_+^*$:

les applications $g :] -T, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] -T, +\infty[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

sont les applications $g : \begin{cases}] -T, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto kf\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$ avec $k > 0$.

22 ▷ On rappelle que $T > 0$!!!!

Par l'absurde, on suppose qu'il existe une application h , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$$

On évalue cette égalité en $-T$ pour trouver $h(T) = 0$ car $T \neq 0$ ce qui absurde car $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) > 0$.

En conclusion :

il n'existe pas d'application h , de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant $\forall t \in \mathbf{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)$