

Corrigé du devoir surveillé n°6

1. Exercice pour tous

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note les fonctions f_n , g_n et h_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n : x \mapsto 4^{-n} \binom{2n}{n} x^n, \quad g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + x^2} \quad \text{et} \quad h_n : x \mapsto \frac{1}{1 + 4n^2 x^2}.$$

et on considère les fonctions :

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \quad \text{et} \quad H : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$$

1 Étude de F

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $|x| < 1$, $\sum f_n(x)$ converge absolument et que si $|x| > 1$, $\sum f_n(x)$ ne converge pas absolument.
2. En déduire que la fonction F est bien définie sur $] -1, 1[$.
3. Montrer que si $x = 1$, $\sum f_n(x)$ diverge.

2 Étude de G

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum g_n(x)$ converge et que $\sum |g_n(x)|$ diverge.
(b) En déduire que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série $\sum g_n(x)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

6. Montrer que G est positive sur $\mathbb{R}$ et déterminer, en le justifiant, la limite en $+\infty$ de G .

3 Étude de H

7. Déterminer le domaine de définition de H (pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ converge-t-elle ?) et étudier la parité de H sur son domaine.
8. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + 4t^2 x^2} dt \leq H(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 4t^2 x^2} dt$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une primitive de $h : t \mapsto \frac{1}{1+4t^2x^2}$ puis calculer $\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2} dt$ pour $a = 0$ et $a = 1$.
Indication : on a $h(t) = \frac{1}{2x} \cdot \frac{2x}{1+(2xt)^2}$.
10. En déduire la limite en $+\infty$ de H et un équivalent simple de H en 0^+ .
11. On admettra que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et que $H' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} h'_n(x)$.
 Dresser le tableau de variations de H sur $\mathbb{R}^*$ puis représenter graphiquement l'allure de la courbe de H .

Correction.

1 Étude de F

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, on a $f_n(x) = f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ d'où $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente car stationnaire en 0.

Supposons $x \neq 0$. On pose $u_n = |f_n(x)| = 4^{-n} \binom{2n}{n} |x|^n > 0$. On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x| (2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|$$

Par suite, d'après la règle de D'Alembert : si $|x| < 1$, alors $\sum u_n$ converge et si $|x| > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

2. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument, alors, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum f_n(x)$ converge et ainsi, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe.

Par suite, $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie sur $] -1, 1[$.

3. On suppose $x = 1$. On propose deux façons de procéder :

★ 1ère façon : avec une comparaison logarithmique.

On remarque que, en simplifiant le calcul de la question 1 avec $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{2n+1}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n+2}$ diverge, donc, par comparaison logarithmique (si on ne se souvient plus, on fait le produit - télescopique - de l'inégalité précédente), $\sum u_n$ diverge.

Remarque : en fait, avec l'idée derrière cette preuve, on peut généraliser pour trouver la règle de Raabe-Duhamel !.

★ 2ème façon : en utilisant la formule de Stirling.

La formule de Stirling donne l'équivalent :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Par suite, comme $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = 4^{-n} \binom{2n}{n} |x|^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

(Remarque : on pouvait d'ailleurs traiter toute la question 1 avec cet équivalent !).
D'où, si $x = 1$,

$$f_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après le critère de Riemann ($\frac{1}{2} \leq 1$) d'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ également et ainsi, par comparaison, $\sum f_n(1)$ diverge.

2 Étude de G

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1+x^2}} > 0$. Par suite, $\sum g_n(x) = \sum (-1)^n u_n$ est une série alternée et on a :

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1+x^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n+1+x^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1+x^2}}{\sqrt{n+2+x^2}} \leq 1$.

Par suite, d'après le critère des séries alternées, $\sum g_n(x)$ converge. De plus, on a :

$$|g_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série divergente d'après le critère de Riemann ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\sum |g_n(x)|$ diverge.

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum g_n(x)$ converge, donc la fonction $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n(x)$ est bien définie car $\sum g_n(x)$ converge et on a $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1+x^2}}$. Ainsi, $R_n(x)$ est la somme d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées (voire question 4a)) donc, d'après ce critère, la valeur absolue de la somme est inférieure à la valeur absolue du premier terme (ici le terme $k = n+1$) i.e.

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1+x^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)+1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

6. Toujours d'après le critère des séries alternées, la somme de la série est du signe de son premier terme ; or $g_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+x^2}} \geq 0.$$

De plus, comme dans la question précédente, la valeur absolue de la somme est inférieure à la valeur absolue du premier terme (ici le terme $n = 0$), donc :

$$0 \leq G(x) = |G(x)| \leq |g_0(x)| = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

3 Étude de H

7. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(0) = 1$ est le terme général d'une série qui diverge (grossièrement).
- Si $x \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

or, d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente ($2 > 1$), donc, par comparaison, $h_n(x)$ est le terme général d'une série convergente.

Par suite, $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Il en résulte que le domaine de H est $\mathbb{R}^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a, par parité de la fonction $x \mapsto x^2$:

$$H(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4(-x)^2 n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2 n^2} = H(x).$$

donc H est paire sur $\mathbb{R}^*$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+4t^2 x^2}$. Alors h est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc, par croissance de l'intégrale, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt \leq \frac{1}{1+4k^2 x^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt$$

en sommant ces inégalités pour k entre 1 et $+\infty$ - ce qui est possible car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt$ et la série $\sum_{n \geq 1} h_n(x)$ convergent, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt \leq H(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par exemple, $I : t \mapsto \frac{1}{2x} \arctan(2xt)$ est une primitive de h . Ainsi, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) - I(a) = \frac{\pi}{4x} - \frac{1}{2x} \arctan(2xa).$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt = \frac{\pi}{4x} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2 x^2} dt = \frac{\pi}{4x} - \frac{1}{2x} \arctan(2x).$$

10. D'après les questions 8. et 9., on a :

$$0 \leq H(x) \leq \frac{\pi}{4x},$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Toujours d'après les questions 8. et 9., on a :

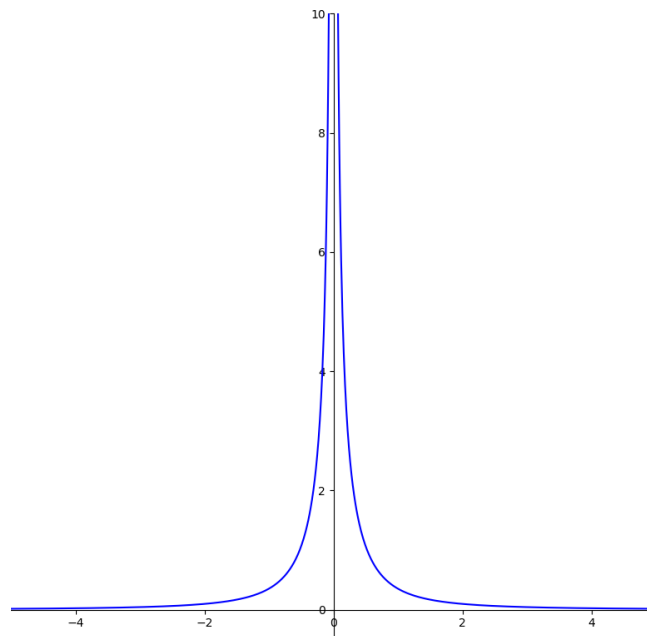
$$1 - \frac{2}{\pi} \arctan(2x) \leq \frac{H(x)}{\frac{\pi}{4x}} \leq 1$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{H(x)}{\frac{\pi}{4x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$; d'où :

$$H(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4x}.$$

11. D'après le fait admis, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $H'(x) = -8x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+4n^2x^2)^2} \leq 0$, par suite, H est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; puis en utilisant la parité de H , on obtient le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$H'(x)$	+		-
H	0	$+\infty$	0



2. Un problème ET UN SEUL, AU CHOIX

CCinP

Problème 1.

Notations pour l'ensemble du sujet :

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors

il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

- (1) $A = D + N$;
- (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
- (3) N est nilpotente ;
- (4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A .

Partie I - Quelques exemples

Q1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A , puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q4. Application

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A .

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q3**.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent,
 $\exp(M + N) = (\exp M)(\exp N)$.

- Q5.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
 Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2 .
 Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par :
 $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .
 On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

- Q6.** La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
 Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$.
- Q7.** Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
 $\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Vect}\{e_1\}$, $\text{Ker}(u - 2\text{Id}) = \text{Vect}\{e_2\}$, $\text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$.
 Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
- Q8.** Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A .
- Q9.** Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X - 1)(X - 2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X - 1)U(X) + (X - 2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

- Q10.** On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{Id})$.
 Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
 Démontrer que p est le projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$ et q est le projecteur sur $\text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{Id})$.
- Q11.** On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q7**).
 Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

- Q12.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .
 Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i .
 Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
 En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v .
 Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

- Q13.** Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
- Q14.** Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.
- Q15.** Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
- Q16.** Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A .
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

- Q17.** On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
 $\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.
- Q18.** Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
- Q19.** Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A , on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D .
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

Correction.

Correction de Mme. Mirebeau et Mme Bourguignon

PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

- Q1.** Soit $A \in M_n(K)$.
- Si A est diagonalisable, $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A .
En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
 - Si A est nilpotente, $(D, N) = (0, A)$ est la décomposition de Dunford de A .
En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
 - Soit A une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$.
Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T .
Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
Une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ vérifie l'hypothèse du théorème donc admet une décomposition de Dunford.

- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ car

ces deux matrices ne commutent pas. De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, donc $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A .

- Q2.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D, N) . D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.

Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ n'admet pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

- Q3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2 + 2X + 1) = (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A(X) = (X+1)^3$.

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.

D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\text{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.

Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $D = -I_3$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que (D, N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- (1) $A = D + N$.

- (2) $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable.
- (3) Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0 = (A + I_3)^3 = N^3$ donc N est bien nilpotente. De plus :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0.$$

Donc N est nilpotente d'indice 2.

- (4) $D = -I_3$ est scalaire donc commute avec N : $DN = ND = -N$.

Ainsi $\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right)$ est la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Q4. On a montré que $A = D + N$ où (D, N) est la décomposition de Dunford de A .

- Puisque D et N commutent, $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$.
- $D = -I_3$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = (-1)^k I_3$. On reconnaît le développement en série entière de $\exp$ en -1 :

$$\exp(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right) I_3 = e^{-1} I_3.$$

- Puisque N est nilpotente d'indice 2, on a $\forall k \geq 2, N^k = 0$ et $\exp(N)$ est une somme finie :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} N^k = I_n + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On conclut que

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = e^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Q5. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Posons $P(X) = X(X - 1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.

Donc le polynôme $X(X - 1)$ annule la matrice A^2 .

Le polynôme $X(X - 1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2 , donc

A^2 est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$.

Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- (1) $A = D + N$ par construction.
- (2) $D = A^2$ est diagonalisable.
- (3) $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
 $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- (4) D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc $(D = A^2, N = A - A^2)$ est la décomposition de Dunford de la matrice A .

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q6. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique. On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)((X-3)(X-1) + 1) \\ &= (X-1)(X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$. Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A - 3I_3)) = 1 < 2$. La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A , donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u , or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\chi_u(u)) = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$.

Q7. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - I_3) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - 2I_3) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ (A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - 2I_3)^2 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons alors

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3) .

De plus $\boxed{\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Vect}(e_1), \text{Ker}(u - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_2), \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 = \text{Vect}(e_2, e_3)}$.
 Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .}$$

- Q8.** • Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .}$$

- Montrons que :

$$\boxed{\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .}$$

En effet : $B = D_1 + N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente; D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$.

- On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}}$. Alors (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- ★ (1) $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.
- ★ (2) $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.
- ★ (3) $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.
- ★ (4) D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A . Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Finalement $\boxed{\left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A .}$

Q9. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a-c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a+b = 0. \\ c-b-4a = 0. \\ 4a-c = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1. \\ b = -1. \\ c = 3. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$.

Posons $\boxed{U(X) = -X+3, \quad V(X) = 1.}$ On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et

$$\boxed{(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1.}$$

- Q10.** • On pose $p = V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{Id})$.
On a obtenu à la question **Q10** la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p + q = U(u) \circ (u - \text{Id}) + V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2 = 1(u) = \text{Id}.$$

Donc $\boxed{p + q = \text{Id}.}$

- Posons $F = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$.
Soit $x \in F$. Alors $(u - \text{Id})(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} q(x) &= U(u) \circ (u - \text{Id})(x) = 0. \\ p(x) &= p(x) + q(x) = \text{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in F, \quad p(x) = x, \quad q(x) = 0.}$

Soit $x \in G$. Alors $(u - 2\text{Id})^2(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} p(x) &= V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2(x) = 0. \\ q(x) &= p(x) + q(x) = \text{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in G, \quad p(x) = 0, \quad q(x) = x.}$

Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On obtient :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_F) + p(x_G) = x_F + 0 = x_F. \\ q(x) &= q(x_F) + q(x_G) = 0 + x_G = x_G. \end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{p \text{ est le projecteur sur } F = \text{Ker}(u - \text{Id}) \text{ parallèlement à } G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2}$

et $\boxed{q \text{ est le projecteur sur } G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 \text{ parallèlement à } F = \text{Ker}(u - \text{Id}).}$

- Q11.** On pose $d = p + 2q$.

Puisque $e_1 \in \text{Ker}(u - \text{Id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.

Puisque $e_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2) + 2q(e_2) = 2e_2$.

De même, $e_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.

On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} d(e_1) = e_1. \\ d(e_2) = 2e_2. \\ d(e_3) = 2e_3. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B .) Or

$$\begin{aligned} p &= V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2 = (X - 2)^2(u) &= (X^2 - 4X + 4)(u) \\ q &= U(u) \circ (u - \text{Id}) = ((-X + 3)(X - 1))(u) &= (-X^2 + 4X - 3)(u). \\ d &= p + 2q = ((X^2 - 4X + 4) + 2(-X^2 + 4X - 3))(u) &= (-X^2 + 4X - 2)(u). \end{aligned}$$

Donc $d = (-X^2 + 4X - 2)(u)$ et $D = (-X^2 + 4X - 2)(A) = -A^2 + 4A - 2I$. Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.

Donc $(D = -A^2 + 4A - 2I, N = A^2 - 3A + 2I)$ est la décomposition de Dunford de A .

Effectuons les calculs :

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad \begin{cases} D = -A^2 + 4A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N = A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **Q9**.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

- Q12.** • Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Tout sous-espace propre de u est stable par v .

- Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Pour $i \in [1, p]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v . Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v , alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i , alors ce sont des vecteurs propres de v . De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u).$$

$\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E , formée de vecteurs propres de u et de v .

Il existe une base $\mathcal{B}$ commune de diagonalisation de u et v .

Q13. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

D'après la question **Q13**, il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.

Alors $P^{-1}(A - B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.

Si A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A - B$ est diagonalisable.

Q14. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q . On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.

Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geq p$, alors $A^k = 0$.

Sinon, on a $k \leq p-1$, donc $p+q-1-k \geq q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.

On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $(A - B)^{p+q-1} = 0$ et $A - B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p+q-1$.

Si A et B sont deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A - B$ est nilpotente.

Q15. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.

Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A . Puisque A est diagonalisable avec $\text{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$. Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

La seule matrice de $M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.

Q16. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.

- Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A .
- D' commute avec N' , donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A , donc D' commute avec D .
- De même, N' commute avec D' , donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A , donc N' commute avec N .
- On a $D - D' = N' - N$.
- D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question **Q14**, $D - D'$ est diagonalisable.
- N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question **Q15**, $N' - N$ est nilpotente.
- $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question **Q16**, cette matrice est la matrice nulle.
- On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.

Il y a unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

- Q17. • Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes A et B de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A = \text{Diag}(1, 0, \dots, 0), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonale donc diagonalisable.

On a $\chi_B(X) = (X+1)X^{n-1}$, $\text{Sp}(B) = \{0, -1\}$, $\dim(\text{Ker}(B + I_n)) = 1$. Puisque B est de rang 1, on a $\dim(\text{Ker}(B)) = n-1$ par le théorème du rang, donc $\dim(\text{Ker}(B + I_n)) + \dim(\text{Ker}(B)) = (n-1) + 1 = n$ donc B est diagonalisable.

La matrice C vérifie $\chi_C(X) = X^n$ donc $C^n = 0$. La matrice C est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.

Finalement, A et B sont dans $\mathcal{D}$ mais $C = A + B \notin \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas stable par combinaison linéaire et $\mathcal{D}$ n'est pas un espace vectoriel.

- Le produit matriciel $\left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est une application bilinéaire sur $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ avec $M_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc est une application continue.

Donc pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$, l'application $\left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$ est continue.

- Q18. Montrons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'il existe une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A .

$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Notons

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & & & t_{i,j} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}. \quad \text{On pose} \quad \forall k \geq 1, \quad T_k = \begin{pmatrix} d_1 + \frac{1}{k} & & & t_{i,j} \\ & d_2 + \frac{2}{k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}.$$

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T$. Posons $B_k = PT_kP^{-1}$. Par continuité du produit matriciel,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (PT_kP^{-1}) = P \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k \right) P^{-1} = PTP^{-1} = A.$$

Montrons que pour k assez grand, la matrice T_k est diagonalisable. Notons $\forall k \geq 1, \forall i \in [1, n], \lambda_i^{(k)} = d_i + \frac{i}{k}$. Les valeurs propres de T_k sont $\text{Sp}(T_k) = \{\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}\}$. Montrons que pour k assez grand, ces valeurs propres de T_k sont distinctes. Soient $i < j$ deux entiers de $[1, n]$.

$$\text{Si } d_i = d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k} \right) - \left(d_i + \frac{i}{k} \right) = \frac{j-i}{k} > 0.$$

$$\text{Si } d_i \neq d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k} \right) - \left(d_i + \frac{i}{k} \right) = d_j - d_i + \frac{j-i}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} d_j - d_i \neq 0.$$

Si $d_i \neq d_j$, l'équation

$$d_j - d_i + \frac{j-i}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{j-i}{d_j - d_i}$$

possède soit aucune solution si $-\frac{j-i}{d_j - d_i} \notin \mathbb{N}^*$, soit une unique solution. On en déduit que

$$\forall k > N = \max_{1 \leq i < j \leq n, \text{ tels que } d_j - d_i \neq 0} \left(-\frac{j-i}{d_j - d_i} \right), \quad \forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j \Rightarrow \lambda_i^{(k)} \neq \lambda_j^{(k)}.$$

Ainsi pour $k \geq N+1$, la matrice T_k possède n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Puisque B_k et T_k sont semblables, B_k est aussi diagonalisable pour $k \geq N+1$.

Donc $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} B_k$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

L'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q19. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A admet une unique décomposition de Dunford (D, N) . On note $\varphi : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{D} \\ A & \mapsto D \end{cases}$.

D'après la question **Q2**, la décomposition de Dunford de A diagonalisable est $(D, N) = (A, 0)$.

Donc $\boxed{\forall A \in \mathcal{D}, \varphi(A) = A}$ i.e. $\boxed{\varphi \text{ est l'application identité sur } \mathcal{D}}$.

Supposons par l'absurde que φ soit continue sur $M_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après la question **Q19**, $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$, donc il existe une suite $(B_k)_{k \geq 0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers A . Puisque $B_k \in \mathcal{D}$, on a $\varphi(B_k) = B_k$. Par continuité de φ :

$$\varphi(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = A,$$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrons que ceci est absurde.

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle. Par exemple, la matrice suivante est nilpotente (car $\chi_N(X) = X^n$) et non nulle :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question **Q2**, $\varphi(N) = 0 \neq N$. Donc φ ne peut pas être l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$.

On a montré que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas continue sur } M_n(\mathbb{C})}$.

Mines-Ponts

Problème 2.

Algèbres de Lie

Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.

On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X . Pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on note $\bar{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{C}^n$: $\bar{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\bar{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\bar{M}$.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ de coefficients $(m_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$ et pour $k = 0, \dots, n-1$, on appelle k -ième diagonale supérieure de M , notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k}, i = 1, \dots, n-k)$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls. Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, on note u_V sa restriction à V .

De sorte que si i_V représente l'injection canonique de V dans $\mathbb{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout y de V .

I Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ la matrice, notée $[X, Y]$, définie par

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Définition 1 Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X, Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U}.$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient

$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite prouver le théorème suivant.

Théorème 1 Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

- 1 - Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.
- 2 - Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M, A]$ appartient à $\mathcal{V}$.

On considère la suite de matrices colonnes $(X_k, k \geq 0)$ définie par

$$X_0 = X, X_{k+1} = AX_k, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Pour $M \in \mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M), k \geq 0)$ définie par

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= \lambda(M) \\ \lambda_{k+1}(M) &= \lambda_k([M, A]), \text{ pour tout } k \geq 0. \end{aligned}$$

- 3 - Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout $M \in \mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \quad (1)$$

$$[M, A] X_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \quad (2)$$

- 4 - On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$ soit libre.

On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$.

- 5 - Montrer que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M, A]_G}$ sont des endomorphismes de G .
- 6 - Calculer la trace de $\overline{[M, A]_G}$.
- 7 - Quelle est la matrice de $\overline{[M, A]_G}$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_q\}$?
- 8 - Pour $M \in \mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?
- 9 - Établir le théorème 1.

II Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ telles que :

$$\delta\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \dots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \quad (A)$$

$$\delta[\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, p-1\} \quad (B)$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 10 - Traduire la propriété “il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure” en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.
- 11 - Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n .
On pourra considérer les sous-espaces $\mathcal{N}_k$ ($0 \leq k \leq n$) tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k ($1 \leq k \leq n$), $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, ..., $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.

Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

- 12 - Montrer que pour tout $M, M' \in \mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.
- 13 - Soit r un entier non nul et une famille $M_1, M_2, \dots, M_r$ d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_r}$.
- 14 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\{\overline{M}, M \in \mathcal{U}\}$.

On note dorénavant :

$$\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{M}, M \in \mathcal{U}\}.$$

Soit F et H deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

- 15 - Montrer les relations suivantes :

$$p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.$$

- 16 - Montrer que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent puis que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.
- 17 - En procédant par récurrence sur n , établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p , il existe un élément $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

- 18 - Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$, $M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\overline{A_1} \dots \overline{A_k} X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j .

- 19 - Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

Soit $M, M' \in \mathcal{U}$.

- 20 - Montrer que $[\overline{M}, \overline{M'}]_E$ est une homothétie de trace nulle.
- 21 - Que peut-on en déduire ?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnements qu'aux questions 14 et 17.

Correction de M. Legros

I Algèbres de Lie

- 1 - Pour toute matrice M de $\mathcal{V}$, X est un vecteur propre de M : il existe donc un unique scalaire $\lambda(M)$ tel que $MX = \lambda(M)X$. Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$,

$$(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)X = (\mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2))X$$

et donc $\lambda(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2) = \mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2)$: l'application $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien une forme linéaire.

- 2 - Comme M et A sont éléments de $\mathcal{U}$, $[M, A] \in [\mathcal{U}]$ et donc $[M, A] \in \mathcal{V}$.
 3 - Considérons l'hypothèse de récurrence (H_i) :

$$\forall M \in \mathcal{V}, \quad MX_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j$$

— La propriété H_0 est trivialement vérifiée :

$$\forall M \in \mathcal{V}, \quad MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M) X_j$$

— Soit $i \in \mathbb{N}$ et supposons que H_i soit vérifiée. Alors pour tout $M \in \mathcal{V}$:

$$MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$$

En appliquant (H_i) aux deux éléments M et $[M, A]$ de $\mathcal{V}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A]) X_j + A \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M) X_j \\ &= \lambda_{i+1}(M) X_0 + \sum_{j=1}^i \underbrace{\left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1} \right]}_{=\binom{i+1}{j}} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \lambda_0(M) X_{i+1} \\ &= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M) X_j \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence que (H_i) est vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien les identités (1) et (2).

- 4 - L'ensemble des entiers $i \geq 0$ pour lesquels la famille $\{X_0, X_1, \dots, X_i\}$ est libre est non vide (il contient 0 car X_0 est non nul) et majoré par n : il admet donc un plus grand élément q .

5 - La stabilité de G par $\overline{M}$ découle directement des relations (1).

D'autre part :

- pour i compris entre 0 et $q-1$, $\overline{A}(X_i) = AX_i = X_{i+1} \in G$;
- $\overline{A}(X_q) = X_{q+1} \in G$ car $\{X_0, X_1, \dots, X_q\}$ est libre et $\{X_0, X_1, \dots, X_{q+1}\}$ est liée, donc G est également stable par $\overline{A}$.

Enfin, par composition, G est stable par $\overline{[M, A]}$. On en déduit que $\overline{M}_G$, $\overline{A}_G$ et $\overline{[M, A]}_G$ sont des endomorphismes de G .

- 6 - Comme $\overline{[M, A]}_G = \overline{M}_G \circ \overline{A}_G - \overline{A}_G \circ \overline{M}_G$, la trace de $\overline{[M, A]}_G$ est nulle (linéarité de la trace et propriété classique $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$).
- 7 - Les relations (2) montrent que cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général $\binom{i-1}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M)$ pour $1 \leq j \leq i \leq q+1$.
- 8 - En particulier, $0 = \text{Tr}(\overline{[M, A]}_G) = (q+1)\lambda_1(M) = (q+1)\lambda([M, A])$ et $\lambda([M, A]) = 0$ puisque $q+1 > 0$.
- 9 - Nous en déduisons que $MAX = AMX$, i.e. $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$. Ainsi, ou bien $AX = 0$, ou bien AX est un vecteur propre pour chaque matrice M de $\mathcal{V}$, associé à la même valeur propre que X .

II Algèbres de Lie résolubles

- 10 - Cette propriété traduit que les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables, i.e. trigonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^n$.
- 11 - Pour tout k compris entre 0 et n , notons E_k le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les k premiers vecteurs colonnes de la matrice P . Une matrice A est donc dans $\mathcal{N}_k$ si et seulement si

$$\overline{A}(E_n) \subset E_{n-k}, \overline{A}(E_{n-1}) \subset E_{n-1-k}, \dots, \overline{A}(E_k) \subset E_0.$$

Pour k entier compris entre 0 et $n-1$, montrons que $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$:

- si $k \geq 1$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, on a pour tout i compris entre $k+1$ et n :

$$\begin{aligned} \overline{[A, B]}(E_i) &\subset \overline{A}(\overline{B}(E_i)) + \overline{B}(\overline{A}(E_i)) \\ &\subset \overline{A}(E_{i-k}) + \overline{B}(E_{i-k}) \\ &\subset E_{i-k-1} \end{aligned}$$

car $k \geq 1$. On a donc $[A, B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

- si $k = 0$ et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, les matrices AB et BA sont triangulaires supérieures et ont même diagonale : la matrice $[A, B]$ est donc diagonale supérieure stricte, i.e. que $[A, B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

Dans tous les cas, $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$ puisque $\mathcal{N}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel.

Ceci prouve que la suite $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$ est une suite d'algèbres de Lie vérifiant les propriétés (A) et (B) : $\mathcal{T}_P$ est donc une algèbre de Lie résoluble de longueur n .

Remarques : la longueur obtenue ici n'est pas optimale. Par exemple, quand $n = 4$, $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 3, puisque $[\mathcal{N}_2] = \{0\}$.

Cette question prouve en fait une implication du théorème 2 : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie dont les éléments sont simultanément trigonalisables, il existe une matrice inversible P telle que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_P$. On obtient alors que $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur n en considérant la suite $(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

- 12 - Nous avons $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$, donc $[M, M'] = 0$ pour tous $M, M' \in \mathcal{U}$: les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux.
- 13 - Prouvons le résultat suivant par récurrence sur r : r endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

- Si $r = 1$ et si $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ avec E espace complexe de dimension non nulle, f_1 possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est de degré au moins 1 et $\mathbb{C}$ est algébriquement clos), donc également un vecteur propre.
- Soit $r \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang r et considérons une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe E de dimension non nulle. f_{r+1} possède au moins une valeur propre λ : notons $F = \text{Ker}(f_{r+1} - \lambda \text{Id}_E)$ l'espace propre associé. On montre alors facilement que F est stable par les f_i , pour i variant de 1 à r :

$$\forall i, \forall x \in F, f_{r+1}(f_i(x)) = f_i(f_{r+1}(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x)$$

En notant g_i la restriction de f_i à F , il est possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ (F est de dimension non nulle et les g_i commutent deux à deux) : il existe un vecteur $x \in F$ qui est propre pour tous les g_i : ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les f_i ($0 \leq i \leq r+1$).

Le résultat demandé est alors une conséquence directe.

- 14 - Soit $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ une base de $\mathcal{U}$. D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre X commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_r}$: si $M \in \mathcal{U}$, avec $M = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_r M_r$, on a directement :

$$\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda(M_1) X + \dots + \alpha_r \lambda(M_r) X = (\alpha_1 \lambda(M_1) + \dots + \alpha_r \lambda(M_r)) X$$

et donc X est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

Remarque : il aurait été plus pratique de démontrer directement par récurrence sur n le résultat classique : pour toute famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$ commutant deux à deux, il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de la famille.

- 15 - En travaillant matriciellement, les questions 15 et 16 deviennent triviales. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de F et H , et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Les matrices U et V de u et v dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

où M_1 et N_1 sont carrées de taille $\dim(F)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \text{Mat}(p_H u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \\ \text{Mat}(p_H u p_H, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc $p_H u = p_H u p_H$ (et de même $p_H v = p_H v p_H$).

16 - Comme u et v commutent, U et V commutent, i.e.

$$\begin{pmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 + M_2 N_3 \\ 0 & M_3 N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 + N_2 M_3 \\ 0 & N_3 M_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les matrices M_3 et N_3 commutent, et donc que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent, ainsi que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ (puisque M_3 et N_3 sont les matrices de $p_H u_H$ et $p_H v_H$ dans la base $\mathcal{B}_2$).

17 - L'énoncé doit être compris sous la forme "démontrer le sens direct du théorème dans le cas $p = 1$ ". Il y a également une maladresse importante : les notions d'algèbres de Lie et de résolubilité sont définies uniquement matriciellement, et il serait pénible de revenir par récurrence à des algèbres de matrices (en restreignant les endomorphismes $\overline{M}$ à un sous-espace stable H , on obtient des endomorphismes et pas des matrices : le retour à des matrices nécessite de fixer une base de H). Nous parlerons donc ici d'algèbres de Lie en un sens à peine plus général : une algèbre de Lie sur un espace vectoriel (complexe) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par crochet de Lie ($[f, g] = f \circ g - g \circ f$).

Considérons donc la proposition :

($\mathcal{H}_n$) : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie sur un espace vectoriel complexe E de dimension n et si $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur 1 (ce qui revient à dire que les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux), les éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables.

- La propriété $\mathcal{H}_1$ est clairement vérifiée, puisque toute matrice de taille 1 est triangulaire.
- Soit $n \geq 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vérifiée. Considérons alors une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 d'un espace vectoriel complexe E de dimension n . D'après la question 14, il existe un vecteur propre e_1 commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$. Notons F la droite engendrée par e_1 (F est stable par tous les éléments de $\mathcal{U}$) et choisissons un hyperplan H supplémentaire de F . Notons alors $\mathcal{U}'$ l'ensemble des $p_H u_H$ pour $u \in \mathcal{U}$. D'après la question 16, les éléments de $\mathcal{U}'$ commutent deux à deux : on en déduit que $\mathcal{U}'$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de l'espace H . Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_2 = (e_2, \dots, e_n)$ de H telle que la matrice de $p_H u_H$ dans $\mathcal{B}_2$ soit triangulaire supérieure pour tout $u \in \mathcal{U}$. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base de E qui trigonalise simultanément tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Le sens direct du théorème est donc ainsi démontré quand $p = 1$.

- 18 - Comme $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p-1$, il existe une base qui trigonalise (supérieurement) tous les éléments de $\mathcal{U}_1$: le premier vecteur de cette base est donc un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$ pour $M \in \mathcal{U}_1$.
- 19 - Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble générateur de E . Par définition, $\mathcal{G}$ est stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$, donc E l'est également.

D'autre part, le théorème 1 permet d'affirmer que si $A \in \mathcal{U}$, AX est soit nul, soit un vecteur propre commun à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par récurrence sur k , on en déduit que les éléments non nuls de $\mathcal{G}$ sont des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par linéarité, cette propriété s'étend à E : les éléments non nuls de E sont tous vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

- 20 - Notons f l'endomorphisme $\overline{[M, M']}_E$. Comme $[M, M'] \in \mathcal{U}_1$, pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda(y) \in \mathbb{C}$ tel que $f(y) = \lambda(y)y$. Si y_1 et y_2 sont deux vecteurs indépendants de E , alors :

$$\lambda(y_1+y_2)y_1 + \lambda(y_1+y_2)y_2 = \lambda(y_1+y_2)(y_1+y_2) = f(y_1+y_2) = f(y_1) + f(y_2) = \lambda(y_1)y_1 + \lambda(y_2)y_2$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_1 + y_2) = \lambda(y_2)$.

Si maintenant y_1 et y_2 sont deux vecteurs non nuls liés de E , on peut écrire $y_2 = \alpha y_1$ (avec α non nul) et

$$\lambda(y_2)\alpha y_1 = \lambda(y_2)y_2 = f(y_2) = \alpha f(y_1) = \alpha \lambda(y_1)y_1$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_2)$. En notant λ la valeur commune $\lambda(y)$, f est l'homothétie de rapport λ .

Enfin, comme E est stable par $\overline{M}$ et $\overline{M'}$, on peut écrire :

$$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\overline{M}_E \circ \overline{M'}_E - \overline{M'}_E \circ \overline{M}_E) = 0.$$

- 21 - Comme la trace de f est égale à $\lambda \dim(E)$ et que E est de dimension non nulle, $\lambda = 0$: ceci prouve que les éléments de $\mathcal{U}' = \{\overline{M}_E, M \in \mathcal{U}\}$ commutent deux à deux. Comme cette famille est clairement une algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, c'est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de E . D'après la question 17, il existe donc une base de E qui trigonalise tous les endomorphismes $\overline{M}_E$ pour $U \in \mathcal{U}$.