Corrigé du devoir surveillé n°4

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + A$ puis en déduire un polynôme annulateur de A. Est-ce le polynôme minimal de A ?
2. Montrer que A est inversible en exhibant son inverse.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction.

1. On a $A^2 + A = 2I_3$ donc $A^2 + A - 2I_3 = 0_3$ d'où $P = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A. Comme A n'est pas de la forme αI_3, aucun polynôme de degré 1 n'annule A d'où $\deg(\pi_A) \geq 2$. Or $\pi_A | P$ et π_A et P sont unitaire donc $\pi_A = P$.
2. On pose $B = \frac{1}{2}(A + I_3)$. Alors on a :
$$AB = \frac{1}{2}(A^2 + A) = \frac{1}{2}(2I_3) = I_3$$
donc A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{2}(A + I_3)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par $\pi_A = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$: il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(\pi_A) = 2$. Ainsi, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $R = a_n X + b_n$.
De plus, on a, en evaluant l'égalité $X^n = \pi_A Q + R$ en 1 et -2 :
$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ (-2)^n = -2a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n) \\ b_n = \frac{1}{3}(2 + (-2)^n) \end{cases}$$
Ainsi, on a :
$$A^n = R(A) = a_n A + b_n I_3 = \frac{1}{3}\left((1 - (-2)^n)A + (2 + (-2)^n)I_3\right).$$

Exercice 2.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie, pour $f \in E$, par :
$$\varphi(f) = f(1).$$

Sur E, on considère les normes suivantes :

$$\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } \|\cdot\|_1 : f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

On note $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. (a) Montrer que la fonction φ est continue sur E muni de $\|\cdot\|_\infty$ et calculer sa norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_\infty$ sur E et $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que F est fermé dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction φ n'est pas continue sur E muni de $\|\cdot\|_1$.

   (b) Montrer que F n'est pas fermé dans E muni de $\|\cdot\|_1$.

Correction.

1. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :
$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g).$$
Par suite, φ est une application linéaire.
2. On a $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$, donc F est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E.
3. (a) Pour tout $f \in E$, on a :
$$|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$$
Donc φ est continue sur E muni de $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, $|||f|||$ existe et on a $|||f||| \leq 1$.
De plus, on remarque que $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante en 1 (qui appartient bien à E) ; et donc $|||f||| = 1$.

   (b) On a $F = \mathrm{Ker}(\varphi) = f^{-1}(\{0\})$ donc F est un fermé de E muni de $\|\cdot\|_\infty$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
4. (a) On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. On a :
$$\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
donc φ n'est pas continue sur E muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

   (b) On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto 1 - x^n$. On a :
$$\|g_n - \mathbf{1}\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F converge vers la fonction constante en 1 qui n'appartient pas à F. Ainsi, d'après (la contraposée) de la caractérisation séquentielle des fermés, F n'est pas fermé dans E muni de $\|\cdot\|_1$.

Problème 1. *E3A 2006*

Notations

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq 0 < b$. On note $I = [a, b]$.
$C^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$; $C^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^1 de I et on note, pour $f \in C^0(I)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

Partie I

1. Soit f dans $C^0(I)$ et c un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + cy = f$$

   Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) puis vérifier que la fonction notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, définie par :

$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt,$$

   est solution de (E) et que $\varphi(f)(0) = 0$.
   On admettra que $\varphi(f)$ est l'unique solution de (E) qui s'annule en 0.
2. Exprimer $(\varphi(f))'$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.
3. Calculer $\varphi(f)$ pour :
   a. $f : t \mapsto e^{-ct}$.
   b. $f : t \mapsto K$ où K est un réel.
   c. $f : t \mapsto t$ *on pourra penser à effectuer une intégration par parties.*
4. Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $C^0(I)$.

Partie II

1. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty.$$

2. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$

3. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1.$$

4. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2.$$

   En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

5. L'application φ de $C^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue
   a. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
   b. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?
   c. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction.

1. Le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{c} y'+cy=f \\ y(0)=0 \end{array}\right.$, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y', à coefficients continus sur I, admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.

   On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x).e^{cx}$ est dérivable sur I et que $\forall x \in I,\ g'(x) = e^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x) = e^{cx}f(x)$.

   Comme $g(0) = 0$: $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{ct}f(t)\ dt$; ce qui montre la formule annoncée.

2. $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.

3. (a) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x 1dt = xe^{-cx}.$$
   (b) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x Ke^{ct}dt = e^{-cx}\frac{K}{c}(e^{cx}-1) = \frac{K}{c}(1-e^{-cx}).$$
   (c) On a, pour tout $x \in I$:
$$\varphi(f)(x) = e^{-cx}\underbrace{\int_0^x te^{ct}dt}_{=[t\frac{e^{ct}}{c}]_0^x - \int_0^x \frac{e^{ct}}{c}dt} = e^{-cx}(x\frac{e^{cx}}{c} - \frac{1}{c^2}(e^{cx}-1)) = \frac{1}{c}(x - \frac{1}{c} + \frac{1}{c}e^{-cx})$$

4. La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.

Partie II

1. Vu en cours : $\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

2. Soit $x \in I$.
   $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx}\displaystyle\int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)|\ dt \leq e^{-cx}|\int_0^x e^{ct}\ dt|\|f\|_\infty = \frac{1}{c}|1-e^{-cx}|\|f\|_\infty \leq \frac{\max(|1-e^{-ca}|,|1-e^{-cb}|}{c}\|f\|_\infty$.

   Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \dfrac{\max(|1-e^{-ca}|,|1-e^{-cb}|)}{c}\|f\|_\infty$.

3. $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx}\displaystyle\int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)|\ dt \leq e^{-ca}\int_{[0,x]} e^{cb}|f(t)|\ dt \leq e^{c(b-a)}\int_{[a,b]}|f(t)|\ dt = e^{c(b-a)}\|f\|_1$.

   Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a).e^{c(b-a)}\|f\|_1$.

4. En combinant les questions II 1 et 4, on obtient $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a}\ e^{c(b-a)}\|f\|_2$.
   On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a}.\sqrt{b-a}\ e^{c(b-a)}\|f\|_2$.

5. Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $C^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $C^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la norme $\|\cdot\|_1$ ou de la norme $\|\cdot\|_2$.

Problème 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'algèbre $E = M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ où, pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$:

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} (|m_{i,j}|) .$$

1. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est-elle une norme d'algèbre ?

1. Sous-algèbres des matrices triangulaires supérieures

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures i.e.

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \{M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E \mid \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i < j \ \Rightarrow\ m_{i,j} = 0\} .$$

2. Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de E.

Pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$ et $i,j \in [\![1,n]\!]$, on note :

$$\varphi_{i,j}(M) = m_{i,j}$$

3. (a) Montrer que, pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_{i,j}$ est une forme linéaire.

   (b) Montrer que, pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_{i,j}$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ et calculer sa norme subordonnée (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et $|\cdot|$ à l'arrivée).

   (c) Montrer que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Est-il compact dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

2. Une application linéaire de E dans E

On considère l'application $f : E \to E$ définie, pour $M \in E$, par :

$$f(M) = M - \mathrm{Tr}(M) I_n.$$

4. Montrer que f appartient à l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

5. Déterminer le polynôme minimal de f.

6. Montrer que f continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même et calculer sa norme subordonnée (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ au départ et à l'arrivée).

Correction.

1. Si $n = 1$, il s'agit d'une norme d'algèbre car $\|\cdot\|_\infty = |\cdot|$.
   Si $n \geq 2$, non, ce n'est pas une norme d'algèbre car, pour $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$, on a $\|J\|_\infty = 1$ et $J^2 = nJ$; ainsi :

$$\|J \times J\|_\infty = \|J^2\|_\infty = n\|J\|_\infty > 1 = \|J\|_\infty.\|J\|_\infty.$$

1. Sous-algèbres des matrices triangulaires supérieures

2. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   — Les matrices 0_n et I_n sont triangulaires supérieures donc appartiennent à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.
   — On note $A = \lambda M + N$ et $a_{i,j}$ les coefficients de A. On a, pour tous $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i < j$, $m_{i,j} = 0 = n_{i,j}$ car $M, N \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et donc :

$$a_{i,j} = \lambda m_{i,j} + n_{i,j} = 0$$

d'où $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

— On note $B = MN$ et $b_{i,j}$ les coefficients de B. On a, pour tous $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, $m_{i,j} = 0 = n_{i,j}$ car $M, N \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et donc :

$$\begin{array}{rcl} b_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{i} m_{i,k} \underbrace{n_{k,j}}_{=0 \text{ car } k \leq i < j} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{m_{i,k}}_{=0 \text{ car } i < k} n_{k,j} \\ b_{i,j} & = & 0 + 0 = 0. \end{array}$$

d'où $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Il en résulte que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de E.

3. (a) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a, pour tous $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\varphi_{i,j}(\lambda M + N) = \lambda m_{i,j} + n_{i,j} = \lambda \varphi_{i,j}(M) + \varphi_{i,j}(N).$$

Par suite, $\varphi_{i,j}$ est une forme linéaire.

(b) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, on a :

$$|\varphi_{i,j}(M)| = |m_{i,j}| \leq \|M\|_\infty.$$

Par suite, $\varphi_{i,j}$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ et on a $|\!|\!|\varphi_{i,j}|\!|\!| \leq 1$.
De plus, pour $M = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$, on a :

$$|\varphi_{i,j}(M)| = 1 = \|M\|_\infty.$$

Il en résulte que $|\!|\!|\varphi_{i,j}|\!|\!| = 1$.

(c) On a

$$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \varphi_{i,j}^{-1}(\{0\})$$

donc $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est fermé dans E muni de la norme infinie comme intersection d'images réciproques d'un fermé (un singleton) par des applications continues.
De plus, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ n'est pas compact dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ car $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ n'est pas borné dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$: en effet, pour tout entier n, $nI_n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et on a

$$\|nI_n\|_\infty = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

2. Une application linéaire de E dans E

4. Montrons que f est linéaire de E dans E. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, N = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, par linéarité de la trace :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M + N) & = & (\lambda M + N) - \mathrm{Tr}(\lambda M + N) I_n \\ & = & \lambda M + N - (\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)) I_n \\ & = & \lambda (M - \mathrm{Tr}(M) I_n) + (N - \mathrm{Tr}(N) I_n) \\ f(\lambda M + N) & = & \lambda f(M) + f(N). \end{array}$$

Par suite, $f \in \mathcal{L}(E)$.

5. Pour $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, on a, par linéarité de f :

$$\begin{aligned}
f^2(M) &= f(M - \mathrm{Tr}(M) I_n) \\
&= f(M) - \mathrm{Tr}(M) f(I_n) \\
&= M - \mathrm{Tr}(M) I_n - \mathrm{Tr}(M)(I_n - \underbrace{\mathrm{Tr}(I_n)}_{=n} I_n) \\
&= M - (2-n)\mathrm{Tr}(M) I_n \\
&= (2-n)(M - \mathrm{Tr}(M) I_n) + (n-1)M \\
f^2(M) &= (2-n) f(M) + (n-1)M.
\end{aligned}$$

Par suite,
$$f^2 = (2-n)f + (n-1)\mathrm{Id}_E$$
et donc $X^2 + (n-2)X - (n-1) = (X-1)(X+(n-1))$ est un polynôme annulateur de f.

— Si $n = 1$, $f = \mathbf{0}$ donc son polynôme minimal est X.

— Supposons $n \geq 2$. On a $(f - \mathrm{Id}_E)(I_n) = -nI_n \neq 0_n$ d'où $X - 1$ n'est pas annulateur de f et $(f + (n-1)\mathrm{Id}_E)(E_{11}) = nE_{11} \neq 0_n$ d'où $(X + (n-1))$ n'est pas annulateur de f.
Ainsi, $\pi_f = X^2 + (n-2)X - (n-1) = (X-1)(X+(n-1))$.

6. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de $f(M) = M - \mathrm{Tr}(M) I_n$. Alors on a, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$:
$$a_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ -\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} m_{k,k} & \text{si } i = j \end{cases}$$
donc $|a_{i,j}| \leq (n-1)\|M\|_\infty$.
Par suite, on a :
$$\|f(M)\|_\infty = \|(a_{i,j})\|_\infty \leq (n-1)\|M\|_\infty.$$
Ainsi, f est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même et on a $|\!|\!| f |\!|\!| \leq n-1$.
De plus, on a :
$$\|f(I_n)\|_\infty = \|(1-n)I_n\|_\infty = n-1,$$
donc $|\!|\!| f |\!|\!| = n-1$.