

Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. *CCP PC 2016*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 1)$ et $A_2 = (1, 0)$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \geq 1\}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1, \quad B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2 \text{ et} \\ C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t).$$

1. Soit $t \in [0, 1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t .

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k$.

2.) Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.) On considère la fonction $f : \begin{matrix} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & C(t) \end{matrix}$. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \mathcal{T}$.

Correction.

1. Soit $t \in [0, 1]$.

$$1.a) \quad p_{0,2}(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 = (1-t)^2, \quad p_{1,2}(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 = 2t(1-t), \quad \text{et,}$$

$$p_{2,2}(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 = t^2.$$

$$1.b) \quad A(t) = (1-t)A_0 + tA_1 = (t, 1), \quad B(t) = (1-t)A_1 + tA_2 = (1, 1-t) \text{ et,} \\ C(t) = (1-t)A(t) + tB(t) = (2t - t^2, 1 - t^2).$$

$$1.c) \quad \text{On a alors, } \sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t)A_k = (1-t)^2 A_0 + 2t(1-t)A_1 + t^2 A_2 = (2t - t^2, 1 - t^2) = C(t).$$

2.) Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, soit $\lambda \in [0, 1]$, posons $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$, alors, $A = (x, y)$, $B = (x', y')$

avec $(x, y, x', y') \in [0, 1]^4$ et $x + y \geq 1$, $x' + y' \geq 1$.

Ainsi, $C = (\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y')$ et $0 \leq \lambda x + (1 - \lambda)x' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$ car x et y sont entre 0 et 1, de même, $0 \leq \lambda y + (1 - \lambda)y' \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$, de plus, $\lambda x + (1 - \lambda)x' + \lambda y + (1 - \lambda)y' = \lambda(x + y) + (1 - \lambda)(x' + y') \geq \lambda + (1 - \lambda) = 1$, $x + y \geq 1$ et $x' + y' \geq 1$.

En conclusion, $\mathcal{T}$ est donc une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

- 3.) Soit $t \in [0, 1]$, $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2) \in [0, 1]^2$ car $t \in [0, 1]$, donc, $t^2 \in [0, 1] \Rightarrow 1 - t^2 \in [0, 1]$. La fonction $f : t \mapsto 2t - t^2$, est dérivable sur $[0, 1]$, et, $f'(t) = 2 - 2t = 2(1 - t) \geq 0$ sur $[0, 1]$, or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc, $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) \in [0, 1]$. De plus, $2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t(1 - t) \geq 1$, car $t(1 - t) \geq 0$. Ainsi, tous les points de $\text{Im}(f)$ sont dans $\mathcal{T}$.

Problème 1.

Le but de ce problème est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ (sous réserve d'existence!).

1. Existence de I .

(a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ est convergente.

(b) En déduire que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ est convergente.

2. (a) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$.

(b) i. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2)$$

ii. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2) dt$$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1, v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)_{n \geq 1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$.

- i. Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq I_n$$

iii. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n \leq v_n$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$. On admet le résultat : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(a) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1} .

(b) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan x$, montrer que :

$$\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}$$

Indication : on rappelle la relation $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$.

(c) En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx$.

Correction.

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par ailleurs, en $+\infty$, $\underline{f(x) = o(1/x^2)}$ (croissance comparée). Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Riemann), donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ converge.

(b) L'intégrale $\int_0^1 \exp(-x^2) dx$ converge car $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Puisque $\int_1^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ converge, il suit que $\underline{I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx}$ converge.

2. (a) Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur $] -1, +\infty[$.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}[$, alors $-\frac{t^2}{n} \in] -1, +\infty[$ donc en appliquant l'inégalité précédente :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$$

On compose par $\exp$ (croissante) : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{n}\right)$. Puis on passe à la

puissance n (croissante sur $[0, +\infty[$) :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2)$$

L'inégalité est aussi vraie pour $t = \sqrt{n}$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$, alors

$$\exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \iff \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(t^2)$$

Cette dernière inégalité étant vraie en utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente.

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)}.$$

De plus, en $+\infty$: $\frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)} \sim \frac{n}{t^2}$. Or $t \mapsto \frac{n}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann) donc

par équivalence, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)} dt$ converge, puis par comparaison, $\underline{v_n}$ converge.

ii. Il suffit d'utiliser la question 16 b)i) et la croissance de l'intégrale, en intégrant sur $[0, \sqrt{n}]$.

iii. Il suffit d'utiliser la question 16 b)ii) et la croissance de l'intégrale, en intégrant sur $[0, \sqrt{n}]$. La fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ étant positive, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = v_n.$$

Il vient donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n \leq v_n$

3. (a) On pose $t = \sqrt{n} \sin(x)$, alors $dt = \sqrt{n} \cos(x) dx$ et $t = 0 \iff x = 0$, $t = \sqrt{n} \iff x = \pi/2$.
Donc :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))^n \sqrt{n} \cos(x) dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(x) dx$$

Finalement, $\underline{u_n} = \sqrt{n} a_{2n+1}$.

(b) On pose $t = \sqrt{n} \tan(x)$, alors $dt = \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ et $t = 0 \iff x = 0$, $t = +\infty \iff x = \pi/2$.
Donc :

$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)^{-n} \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x) dx$$

Finalement, $\underline{v_n} = \sqrt{n} a_{2n-2}$.

- (c) A l'aide du résultat admis et de la question 17.a) $u_n \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ De même, $v_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En particulier,

$$u_n \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad v_n \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Il suit donc du théorème d'encadrement et de la question 16.c)iii) que : $I_n \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par ailleurs, puisque I converge, on a aussi $I_n \longrightarrow I$. L'unicité de la limite entraîne alors que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2. E3A 2015

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe. On admet alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application

$$t \mapsto \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$$

est prolongeable par continuité en 0.

- (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} dt.$$

- (a) Montrer que I est réelle.

- (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx$.

Montrer que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} dx = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

- (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos Bx}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque

- (d) En déduire le calcul de l'intégrale I .

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, 1]$ On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

donc la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0

donc intégrable sur $[0, 1]$ d'où l'existence de $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

Sur $[1, +\infty[$ Soit $A > 1$

On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe C^1 sur le segment $[1, A]$:

On obtient (1) : $\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{+\cos x}{x^2} dx = \cos(1) - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ (2)

et la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$

et $\forall x \in [1, +\infty[, \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 > 1$

Par comparaison à une fonction positive $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

d'où l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

Par passage à la limite dans (1) (avec (2)) on obtient l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

En conclusion L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe

2. (a) Quand $t \rightarrow 0$, on a $\alpha t \rightarrow 0$

donc $\cos(\alpha t) = 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2)$

ainsi $1 - \cos(\alpha t) = \frac{\alpha^2 t^2}{2} + o(t^2) \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2}$ car $\alpha \neq 0$

donc $\frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \sim \frac{\alpha^2 t^2}{2t^2} 1$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} = \frac{\alpha^2}{2}$

donc l'application $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0

- (b) L'application $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}$.

Sur $[1, +\infty[$ on a pour $t \geq 1$, $\left| \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \right| \leq \frac{1 + |\cos(\alpha t)|}{t^2} |e^{-itx}| \leq \frac{2}{t^2}$

Comme en 1., on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ sur $[1, +\infty[$

Sur $] -\infty, -1]$ de façon analogue $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$

Le prolongement par continuité de $t \mapsto \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

3. (a) On a $I \in \mathbb{C}$.

$$\text{Et } \bar{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} \right)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{itx} dt$$

On effectue le changement de variable affine $u = -t$; $-du = dt$ (C^1 , bijectif, strictement décroissante)

$$\text{ainsi } \bar{I} = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(-\alpha u)}{(-u)^2} e^{-iux} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt = I$$

Ce qui prouve que I est réelle

(b) On effectue un changement de variable affine $t = Bx$; $\frac{dt}{B} = dx$ à partir d'une intégrale convergente

$$\text{Ainsi } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \int_{AB}^{+\infty} \frac{B^2 \cos(t)}{t^2} \frac{dt}{B} = B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

On effectue ensuite une intégration par parties (sous réserves d'existences) avec des fonctions de classe C^1

$$\text{ainsi } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = B \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{t=AB}^{t \rightarrow +\infty} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{+\sin(t)}{t} dt$$

Comme l'intégrale de gauche existe bien ainsi que l'expression entre crochets

$$\text{on peut conclure à l'existence } \int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

(c) On suppose $B > 0$.

$$\text{Soit } A > 0. \text{ On a } \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_x^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{A}$$

$$\text{donc } \int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{1 - \cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Par un calcul asymptotique comme en 2(a), on a $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(AB)}{A} = 0$

$$\text{à l'aide de 1 on a } \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et donc par passage à la limite on obtient } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = B \frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } B < 0, \text{ on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(-Bx)}{x^2} dx = -B \frac{\pi}{2}$$

$$\text{si } B = 0, \text{ on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = 0$$

$$\text{donc dans le cas général on a } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{|B|\pi}{2}$$

(d) Comme I est réelle, on a $I = \text{Re}(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} \cos(tx) dt$

$$\text{puis par parité } I = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos(tx) \cos(\alpha t)}{t^2} dt$$

En utilisant la formule $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

$$\text{on obtient } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(tx) - \cos(t(x+\alpha)) - \cos(t(x-\alpha))}{t^2} dt$$

$$\text{Pour utiliser : } \forall B \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(Bt)}{t^2} dt = \frac{|B|\pi}{2}$$

on écrit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(t(x + \alpha))) + (1 - \cos(t(x - \alpha))) - 2(1 - \cos(tx))}{t^2} dt$

donc
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t^2} e^{-\iota t x} dt = \frac{|x + \alpha| + |x - \alpha| - 2|x|}{2} \pi$$