

Chapitre III

Espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A : Normes et espaces vectoriels normés	2
1. Définition d'une norme	2
2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés	10
3. Distance associée à une norme	23
4. Boules et sphères associées à une distance	28
5. Parties bornées, applications bornées	30
6. Constructions d'espaces vectoriels normés	34
Partie B : Suites dans un espace vectoriel normé	45
1. Suites convergentes	45
2. Opérations algébriques sur les suites convergentes	49
3. Suites extraites et valeurs d'adhérence	55
4. Suites et adhérence d'une partie	60
Partie C : Comparaison de normes	65
1. Domination de normes	65
2. Normes équivalentes	73
Exercices et problèmes	80

Partie A

Normes et espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition d'une norme

a. Définition et premières propriétés

Définition 1. *Norme*

On appelle **norme** sur l'espace vectoriel, une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) (Positivité) pour tout $x \in E$,

$$N(x) \geq 0;$$

ii) (Séparation) pour tout $x \in E$,

$$N(x) = 0 \text{ implique } x = 0_E;$$

iii) (Homogénéité) pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x);$$

iv) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y \in E$,

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Si N est une norme sur E , le couple (E, N) est appelé **espace vectoriel normé**.

Remarque 1.

Dans ce chapitre, les normes seront souvent appelées N dans les énoncés théoriques. On rencontrera également la notation $\|\cdot\|$ pour désigner une norme ce qui correspond à l'application $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$.

Proposition 1.

Soit N une norme sur E . On a $N(0_E) = 0$ et, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N(x)$.

Démonstration.

D'après l'axiome d'homogénéité appliqué à $\lambda = 0$ et $x = 0_E \in E$, on a :

$$N(0_E) = N(0.0_E) = |0|.N(0_E) = 0N(0_E) = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$, $N(-x) = N((-1).x) = |-1|N(x) = N(x)$. □

Exercice 1.

Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que l'axiome d'homogénéité pour N est équivalent à :

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) \leq |\lambda|N(x).$$

Correction.

La condition est nécessaire car $\Rightarrow$ implique $\leq$. Montrons qu'elle est suffisante :

1er cas : $\lambda = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $N(0.x) \leq 0N(x) = 0$. Or N est positive, donc $N(0.x) = 0 = 0N(x)$.

2eme cas : $\lambda \neq 0$. Pour tout $x \in E$,

$$N(x) = N\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda x).$$

Par suite, $N(\lambda x) \geq |\lambda|N(x)$.

D'où le résultat.

Proposition 2. Seconde Inégalité triangulaire

Soit N une norme sur E . Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On a $N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y)$. Par suite, $N(x) - N(y) \leq N(x - y)$. On a de même $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$ en remarquant que $N(y) = N(y - x + x)$. □

b. Exemples déjà connus !

Les deux premiers exemples suivants sont bien connus et serviront de base pour la construction de la plupart des autres exemples de normes que nous verrons dans la suite.

Exemple 1.

- La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
- Le module est une norme sur $\mathbb{C}$.

Ces deux exemples ont été traités en Sup', même si le nom de "norme" n'avait pas été évoqué à l'époque. On redonne ici la démonstration des propriétés "normesque" de la valeur absolue et du module.

— La fonction valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$|x| = \max(\{x, -x\}) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On remarque alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$ et donc $-|x| \leq x \leq |x|$; de plus, on a également l'égalité $|x| = \sqrt{x^2}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x \geq 0$ et si $x < 0$, $|x| = -x > 0$. Dans tous les cas, on a $|x| \geq 0$; d'où la positivité.

ii) (Séparation) . Si $|x| = 0$, alors on a :

$$0 = -0 = -|x| \leq x \leq |x| = 0$$

d'où $x = 0$.

iii) (Homogénéité) On a :

$$|\lambda x| = \begin{cases} \lambda x & \text{si } \lambda x \geq 0 \\ -\lambda x & \text{si } \lambda x < 0. \end{cases}$$

On a alors plusieurs cas :

- * Si $\lambda = 0$ ou $x = 0$, alors $\lambda x = 0$, d'où $|\lambda x| = \lambda x = 0$. Et de plus, comme $|\lambda| = \pm \lambda$ et $|x| = \pm x$, on a $|\lambda| = 0$ ou $|x| = 0$ d'où $|\lambda| \cdot |x| = 0$. Ainsi, $|\lambda x| = 0 = |\lambda| \cdot |x|$.
- * Si $\lambda > 0$ et $x > 0$, alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = |x|$ d'où, comme $\lambda x \geq 0$, $|\lambda x| = \lambda x = |\lambda| \cdot |x|$.
- * Si $\lambda < 0$ et $x > 0$, alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = |x|$ d'où, comme $\lambda x < 0$:

$$|\lambda x| = -\lambda x = -(-|\lambda|) \cdot |x| = |\lambda| \cdot |x|$$

- * Si $\lambda > 0$ et $x < 0$, alors $\lambda = |\lambda|$ et $x = -|x|$ d'où, comme $\lambda x < 0$:

$$|\lambda x| = -\lambda x = -|\lambda| \cdot (-|x|) = |\lambda| \cdot |x|$$

- * Si $\lambda < 0$ et $x < 0$, alors $\lambda = -|\lambda|$ et $x = -|x|$ d'où, comme $\lambda x \geq 0$, $|\lambda x| = \lambda x = (-|\lambda|) \cdot (-|x|) = |\lambda| \cdot |x|$.

iv) (Inégalité triangulaire) Comme $\pm x \leq |x|$ et $\pm y \leq |y|$, on a $x + y \leq |x| + |y|$ et $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Or $|x + y| = \pm(x + y)$ d'où :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

— La fonction module $|\cdot| : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ est définie, pour $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + iy$, par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On remarque alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Soit $z, \zeta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $z = x + iy$ la forme algébrique de z .

i) (Positivité) La fonction racine carrée étant à valeur dans $\mathbb{R}_+$, on a $|z| \geq 0$.

ii) (Séparation) . Si $|z| = 0$, alors on a :

$$0 \leq |x| \leq |z| = 0 \text{ et } 0 \leq |y| \leq |z| = 0$$

d'où $|x| = 0$ et $|y| = 0$ et ainsi, d'après l'axiome de séparation pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, $x = 0$ et $y = 0$. Par suite, $z = 0 + i0 = 0$.

iii) (Homogénéité) On a :

$$|\lambda z|^2 = (\lambda z) \cdot \overline{(\lambda z)} = \lambda \cdot z \cdot \overline{\lambda \cdot z} = (\lambda \cdot \overline{\lambda})(z \cdot \overline{z}) = |\lambda|^2 \cdot |z|^2 = (|\lambda| \cdot |z|)^2$$

d'où, par injectivité de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($|\lambda z|$ et $|\lambda| \cdot |z|$ étant des réels positifs) :

$$|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|.$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a :

$$|z + \zeta|^2 = (z + \zeta) \cdot \overline{(z + \zeta)} = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \overline{\zeta}) + |\zeta|^2,$$

or, $\operatorname{Re}(z \cdot \overline{\zeta}) \leq |z \cdot \overline{\zeta}| = |z| \cdot |\zeta|$, d'où :

$$|z + \zeta|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |\zeta| + |\zeta|^2 = (|z| + |\zeta|)^2$$

et donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ ($|z + \zeta|$ et $|z| + |\zeta|$ étant des réels positifs) :

$$|z + \zeta| \leq |z| + |\zeta|.$$

Ainsi, le module $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée (i.e. $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$). La terminologie utilisée est bien justifiée : en effet, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E au sens de la définition 1.

En particulier, la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On rappelle qu'un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . On utilise donc ces propriétés.

Tout d'abord, l'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien définie de E dans $\mathbb{R}$ car, par positivité du produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+ = \mathcal{D}_{\sqrt{\cdot}}$ (domaine de définition de la fonction racine).

Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) La fonction racine est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $\|x\| \geq 0$.

ii) (Séparation) Si $\|x\| = 0_E$, alors, $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$. Ainsi, $\langle x, x \rangle = 0$, d'où par définie positivité du produit scalaire, $x = 0_E$.

iii) (Homogénéité) On a, par linéarité du produit scalaire par rapport à chaque variable :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) On a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

D'où, par croissance de la fonction racine, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

c. Vecteurs unitaires ; boules et sphères unité

Notation 1. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E . On note :

- $S(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$; on appelle cet ensemble **sphère unité** de E ;
- $B_f(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité fermée** de E ;
- $B(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité ouverte** de E ;

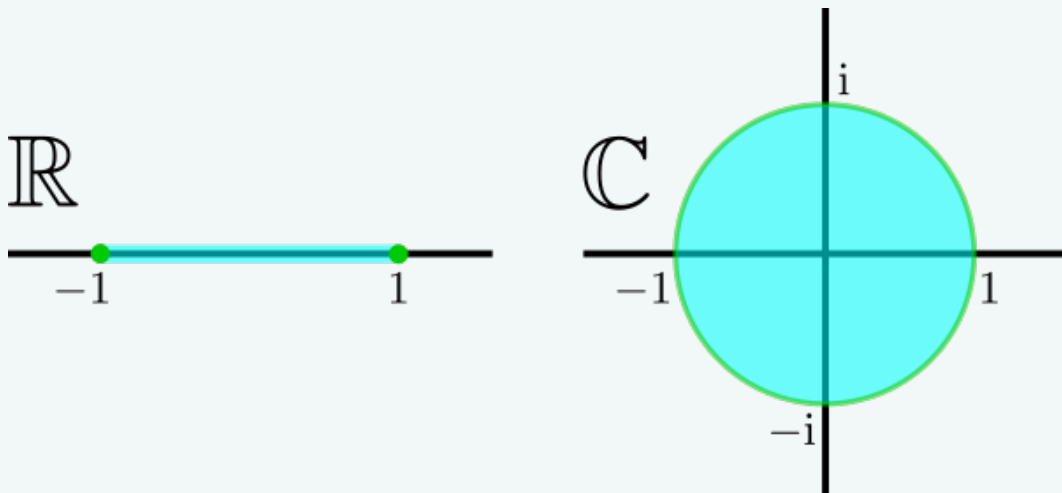
Exemple 3.

1. Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, on a :

$$S(0, 1) = \{-1, 1\}, \quad B_f(0, 1) = [-1, 1] \text{ et } B(0, 1) =]-1, 1[.$$

2. Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, on a :

$$S(0, 1) = \mathbb{U}.$$



Définition 2. Vecteur unitaire

Soit N une norme sur E .

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $N(x) = 1$.

Remarque 2.

La sphère unité d'un espace vectoriel normé est donc l'ensemble de ses vecteurs unitaires.

Définition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul.

On appelle **vecteur unitaire associé à x** , le vecteur $\frac{1}{N(x)}x$.

Proposition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul. Le vecteur unitaire associé à x est un vecteur unitaire et colinéaire à x .

Démonstration.

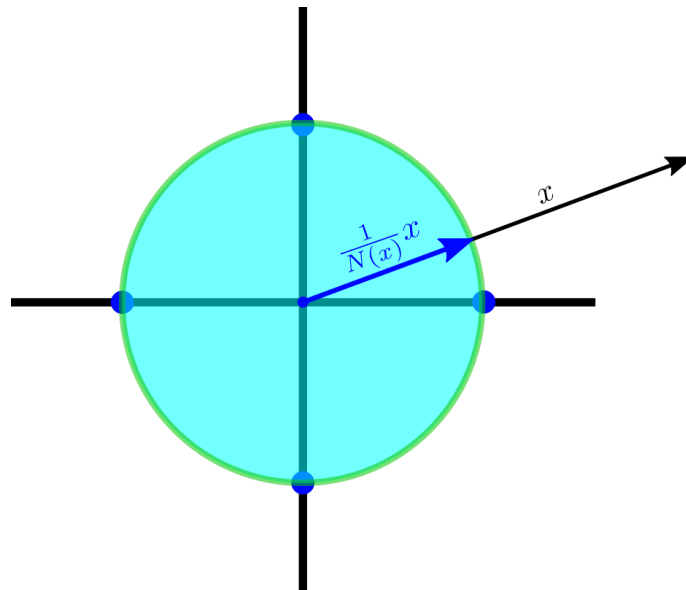
On note u le vecteur colinéaire à x .

Comme $\lambda = \frac{1}{N(x)} \in \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{K}$ et $u = \lambda x$, u est colinéaire à x .

De plus, on a, comme $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et par homogénéité :

$$N(u) = N(\lambda x) = |\lambda|N(x) = \frac{1}{N(x)}N(x) = 1.$$

Donc u est un vecteur unitaire. □



Remarque 3.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{1}{N(x)}x \text{ et } -\frac{1}{N(x)}x.$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il en a une infinité : ce sont exactement les

$$\frac{e^{it}}{N(x)}x \text{ pour } t \in [0, 2\pi[.$$

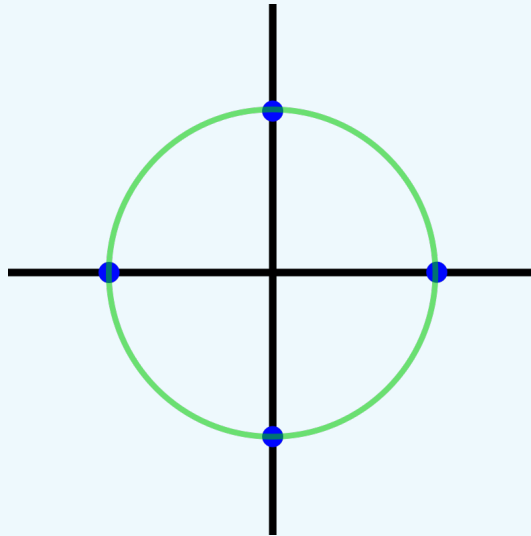
Exercice 2.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de la norme associée au produit scalaire canonique. Dessiner la sphère unité et les boules unité fermée et ouverte de cet espace vectoriel normé.

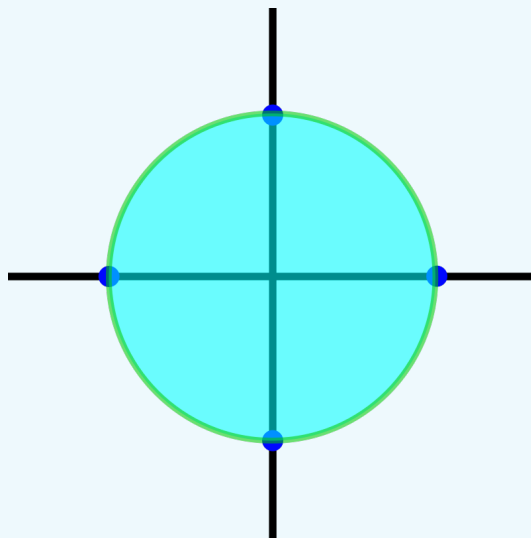
Correction.

La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est la bien connue norme euclidienne i.e., pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On obtient donc :

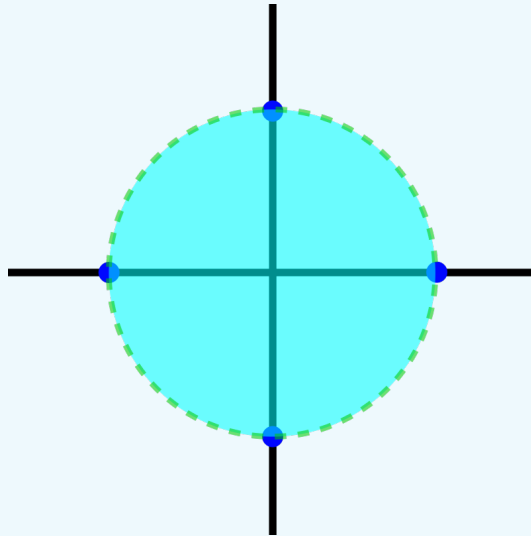
- pour la sphère unité : $S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



- pour la boule unité fermée : $B_f((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. On reconnaît l'équation du disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



- pour la boule unité ouverte : $B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$. On reconnaît l'équation du disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$!



2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés

a. Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, il existe de nombreuses normes qui permettent de le munir d'une structure d'espace vectoriel normé. En voici quelques unes parmi les plus fréquemment "rencontrées" :

Définition 4. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On définit :

— La **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

— La **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

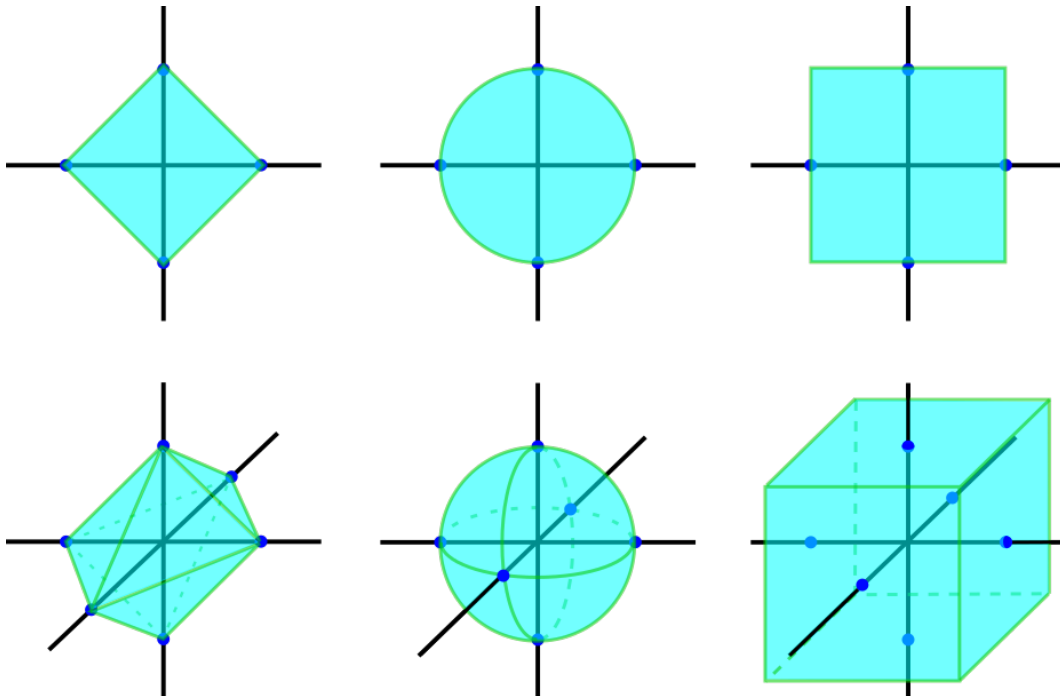
— La **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Remarque 4.

On remarque que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux correspond à la norme euclidienne (i.e. la norme associée au produit scalaire canonique) sur $\mathbb{R}^n$.

Voici une illustration dans $\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^3$ des boules des normes un, deux et infinie (de gauche à droite).



Exercice 3.

Dessiner les boules des normes un, deux et infinie dans $\mathbb{R}^4$.

Correction.

includegraphics error, file not found.

Proposition 4.

Les normes un, deux, et infinie sont bien des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

★ Commençons par traiter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Démontrons que les normes un, deux et infinie sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions sont bien définies : pour la norme un, il s'agit d'une somme finie ; pour la norme deux, il s'agit de la racine d'une somme finie de nombres positifs (carrés) et donc positive ; pour la norme infinie, il s'agit du maximum d'un ensemble fini de réels.

• $\| \cdot \|_1$: Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (Positivité) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \geq 0$, donc :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_1 = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$. Or si une somme de nombres positifs est nulle, tous ses termes sont nuls (en effet, chaque terme d'une somme de nombres positifs est compris entre 0 et cette somme); ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| = 0$ et donc $x_i = 0$. Par suite, $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

iii) (Homogénéité) On a, en factorisant par $|\lambda|$:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|\lambda x_i|}_{=|\lambda| \cdot |x_i|} = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1.$$

iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|}_{\leq |x_i| + |y_i|} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

- $\|\cdot\|_2$: On rappelle que l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (il s'agit du *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 2, $\|\cdot\|_2$ est un norme sur $\mathbb{R}^n$.
- $\|\cdot\|_\infty$: Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - i) (Positivité) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \geq 0$, donc en particulier :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \geq 0.$$

- ii) (Séparation) On suppose que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0$, d'où $|x_j| = 0$ et donc $x_j = 0$. Par suite, $x = (0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
- iii) (Homogénéité) On a $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$ qui est un maximum bien défini donc il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$. Ainsi, on a, d'une part, comme $|\lambda|$ positif :

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| \geq |\lambda x_{i_0}| = |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty;$$

et, d'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_i| \leq |x_{i_0}|$ donc, toujours par positivité de $|\lambda|$:

$$|\lambda x_i| = |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_{i_0}| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

Donc, en particulier, $|\lambda| \|x\|_\infty$ est plus grand que le maximum des $|\lambda x_i|$ i.e. $|\lambda| \|x\|_\infty \geq \|\lambda x\|_\infty$. Par suite, $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$.

- iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{R}^n$, on a $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$. Ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$\|x + y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

★ Traisons désormais le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$, la démonstration est exactement la même que dans le cas de $\mathbb{R}^n$ car les propriétés de la valeur absolue qui nous ont servi (exactement ses axiomes de norme en fait !) restent valables pour le module.

Le cas de la norme deux est plus problématique : la notion de produit scalaire sur un espace vectoriel complexe existe mais sa définition doit être adaptée à ce cas pour que sa norme associée soit bien une norme comme dans le cas réel : il faut remplacer "bilinéaire" par "hermitien" dans la définition (*à vous de chercher ce que cela veut dire !*) - le nom d'espace préhilbertien est alors remplacé par espace hermitien. Avec cette définition de produit scalaire (on dit aussi produit hermitien dans ce cas), on peut généraliser au cas complexe la preuve de l'exemple 2 et conclure.

Malheureusement, les espaces hermitiens ne sont pas au programme ! On va donc ruser (et on utilisera la même ruse pour toutes les autres normes deux que nous rencontrerons dans la suite).

On note $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ la norme deux sur $\mathbb{C}^n$ et $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$ la norme deux sur $\mathbb{R}^n$. On remarque alors que, pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|z\|_{2,\mathbb{C}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} = \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}}.$$

Soit $z = (z_1, \dots, z_n), z' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- i) **(Positivité)** Par positivité de $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ l'est.
- ii) **(Séparation)** On suppose que $\|z\|_{2,\mathbb{C}} = 0$. Alors $\|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} = 0$, d'où, par axiome de séparation pour $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z_i| = 0$ et donc $z_i = 0$. Ainsi, $z = 0_{\mathbb{C}^n}$.
- iii) **(Homogénéité)** On a, par homogénéité de $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda z\|_{2,\mathbb{C}} &= \|(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)\|_{2,\mathbb{C}} \\ &= \|(|\lambda z_1|, \dots, |\lambda z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ &= \|(|\lambda| \cdot |z_1|, \dots, |\lambda| \cdot |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ &= |\lambda| \cdot \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\ \|\lambda z\|_{2,\mathbb{C}} &= |\lambda| \cdot \|z\|_{2,\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

- iv) **(Inégalité triangulaire)** On a, par inégalité triangulaire du module, croissance des fonc-

tions racine carrée et carrée sur $\mathbb{R}_+$ puis par inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
\|z + z'\|_{2,\mathbb{C}} &= \|(z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n)\|_{2,\mathbb{C}} \\
&= \|(|z_1 + z'_1|, \dots, |z_n + z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{(|z_i + z'_i|)^2}_{\leq |z_i| + |z'_i|}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (|z_i| + |z'_i|)^2} = \|(|z_1| + |z'_1|, \dots, |z_n| + |z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
&\leq \|(|z_1|, \dots, |z_n|)\|_{2,\mathbb{R}} + \|(|z'_1|, \dots, |z'_n|)\|_{2,\mathbb{R}} \\
\|z + z'\|_{2,\mathbb{C}} &\leq \|z\|_{2,\mathbb{C}} + \|z'\|_{2,\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Par suite, $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

□

Remarque 5.

Soit $p \geq 1$ un réel. On peut généraliser l'idée des normes un et deux : on montrera en exercice que

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **norme p** .

L'exercice suivant donne une explication de l'emploi de la dénomination "norme infinie" :

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

Correction.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

— Si $x = 0_{\mathbb{K}^n}$, on a $\|x\|_p = 0 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 = \|x\|_\infty$.

— On suppose $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. Alors, par contraposée de l'axiome de séparation pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $\|x\|_\infty \neq 0$.

On considère alors, pour $p \in [1, +\infty[$, le quotient :

$$\left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p.$$

On note $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid |x_i| = \|x\|_\infty\}$ et $k = \#I$ (cardinal de I). La norme infinie x étant le maximum des coordonnées de x en valeur absolue (ou module), il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel

que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, d'où $k \geq 1$.

Par suite, comme, pour tout $i \notin I$, $\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \in [0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p &= \sum_{i \in I} \underbrace{\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p}_{=1} + \sum_{i \notin I} \underbrace{\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \right)^p}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \\ \left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \right)^p &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} k. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient, k étant strictement positif, :

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} k^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1.$$

Il en résulte que, dans tous les cas, $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

b. Exemples de normes sur des espaces de suites

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit les normes suivantes sur certains de ses sous-espaces :

Définition 5.

- On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On définit la **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

- On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente. On définit la **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}.$$

- On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites *bornées* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n|).$$

Proposition 5.

Les couples $(\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels

normés et on a :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels et qu'on a bien les inclusions proposées. On donne rapidement les ingrédients de la preuve, la rédaction détaillée est laissée au lecteur !

Il est clair que la suite constante en 0 appartient à ces trois ensembles. Ensuite, on utilise le fait qu'une série dont le terme général est la somme des termes généraux de deux séries absolument convergentes est absolument convergente et que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour montrer que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. Enfin, pour $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on utilise l'inégalité triangulaire et la sous-additivité du sup.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Alors u_n est le terme général d'une série absolument convergente donc u converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1$.

On note $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n = u_{n+n_0}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature donc $\sum v_n$ est absolument convergente. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq 1$, on a $v_n^2 \leq |v_n|$; par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n^2$ est (absolument) convergente.

Or $\sum v_n^2$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature donc u appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Il en résulte que $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Ensuite, si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ alors $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi. Par suite, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc u appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

On obtient au final les inclusions suivantes :

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K}).$$

- N'oublions pas que la première chose à faire avant de se lancer dans l'étude des axiomes de norme pour une fonction, est de montrer que celle-ci est bien définie ! En effet, si on "essayait" $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on pourrait vérifier que les axiomes de norme sont bien satisfaits mais qu'en fait, la fonction est "très mal" définie : $\|\cdot\|_1$ n'est pas définie en la suite constante en 1 par exemple.

- $\|\cdot\|_1$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_1$ est bien définie sur $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$. Alors $\sum u_n$ est une série numérique absolument convergente i.e. la série $\sum |u_n|$ converge donc la quantité $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (Positivité) La somme d'une série à termes positifs convergente est positive (car la limite d'une suite convergente à valeurs positives est positive --- exercice) donc

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|u_n|}_{\geq 0} \geq 0.$$

- (Séparation) On suppose que $\|u\|_1 = 0$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$. Comme $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante et ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |u_n| \leq S_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^1}$.

iii) (**Homogénéité**) On a, par linéarité de l'application $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$:

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|\lambda u_n|}_{=|\lambda| \cdot |u_n|} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \cdot \|u\|_1.$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ainsi, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et par croissance et linéarité de l'application $w = (w_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$:

$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|u_n + v_n|}_{\leq |u_n| + |v_n|} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur ℓ^1 .

- $\|\cdot\|_2$: Tritons le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On note $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on considère l'application $(\cdot|\cdot)$ de $\ell^2 \times \ell^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Celle-ci est un produit scalaire sur ℓ^2 (nous allons le montrer ci-après) et on remarque que $\|\cdot\|_2$ est la norme associée à ce produit scalaire. Ainsi, d'après l'exemple 2, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur ℓ^2 . Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2 i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive sur ℓ^2 .

Encore une fois, il s'agit premièrement de montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien définie de $\ell^2 \times \ell^2$ dans $\mathbb{R}$: pour $u, v \in \ell^2$, comme pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2|ab| \leq a^2 + b^2$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}.$$

Or, par hypothèse, u_n^2 et v_n^2 sont des termes généraux de séries convergentes d'où $\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ l'est aussi et ainsi, par comparaison $\sum |u_n v_n|$ converge.

Par suite, la série numérique $\sum u_n v_n$ est absolument convergente et donc convergente. Il en résulte que la quantité $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) (**Symétrie**) Par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a :

$$(v|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = (u|v).$$

ii) (**Bilinéarité**) Comme $(\cdot|\cdot)$ est symétrique, il suffit de montrer la linéarité par rapport à la première variable. Par linéarité de l'application $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} s_n$, on a :

$$(\lambda u + v|w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(\lambda u_n + v_n)w_n}_{=\lambda u_n w_n + v_n w_n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n = \lambda(u|w) + (v|w).$$

iii) (**Définie positivité**) On a, d'une part

$$(u|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

et d'autre part, si $(u|u) = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_k^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = (u|u) = 0,$$

donc $u_k = 0$. Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^2}$.

Ceci montre que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2 .

Maintenant, pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en utilisant un ruse similaire à celle de la fin de la démonstration de la proposition 4 (on exprime la norme deux sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec la norme deux sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$), on prouve que la norme deux est bien une norme sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

- $\|\cdot\|_\infty$: Montrons que la fonction $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Comme u est bornée, l'ensemble $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (en effet, $|u_0| \in U$ et on utilise le caractère borné de u pour montrer que U est majoré) donc U possède une borne supérieure. Ainsi, la quantité $\|u\|_\infty = \sup U$ est bien définie.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $U = \{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $V = \{|v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$, $W = \{|\lambda u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $X = \{|u_n + v_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- i) (Positivité) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq 0$, donc en particulier, $\sup U$ étant un majorant de U :

$$\|u\|_\infty = \sup U \geq |u_0| \geq 0.$$

- ii) (Séparation) On suppose que $\|u\|_\infty = 0$. Alors $\sup U = 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup U$ étant un majorant de U :

$$0 \leq |u_n| \leq \sup U = 0.$$

Par suite, $u = (0)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\ell^\infty}$.

- iii) (Homogénéité) Comme $|\lambda|$ est positif, $\sup U$ étant le plus petit des majorants de U , $|\lambda| \sup U$ est le plus petit des majorants de $\{|\lambda| \cdot |u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| \cdot |u_n| = |\lambda u_n|$ donc $\{|\lambda| \cdot |u_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = W$. Par suite :

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup W = |\lambda| \sup U = |\lambda| \cdot \|u\|_\infty$$

- iv) (Inégalité triangulaire) Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, on a $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$:

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Ainsi, $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de X ; or $\|u + v\|_\infty = \sup X$ étant le plus petit des majorants de X , on obtient :

$$\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞ .

□

c. Exemples de normes sur des espaces de fonctions

Soit X un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ (egalement noté $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$) des fonc-

tions bornées de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Voici la norme naturelle sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$:

Définition 6. *Norme sur l'espace des fonctions bornées*

Soit $f \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$. On appelle **norme infinie** de f , et on note $\|\cdot\|_\infty$ la quantité :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Proposition 6.

La norme infinie de $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ est bien définie et c'est une norme sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$.

Démonstration.

L'ensemble X est non vide et f est bornée, donc l'ensemble $F = \{|f(x)| \mid x \in X\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède donc une borne supérieure. Par suite, $\|f\|_\infty$ est bien définie et égale à cette borne supérieure.

Soit $f, g \in \mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **(Positivité)** Comme X est non vide, il existe $x_0 \in X$. Alors on a $\|f\|_\infty \geq |f(x_0)| \geq 0$.
- **(Séparation)** : Si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $x \in X$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$ donc f est la fonction nulle sur X .
- **(Homogénéité)** : On considère l'ensemble $G = \{|\lambda f(x)| \mid x \in X\}$. Alors $\|\lambda f\|_\infty = \sup G$. Montrons l'égalité demandée en utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure i.e. $a = \sup A$ si, et seulement si, a est un majorant de A et il existe une suite (a_n) à valeurs dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Pour tout $u \in F$, il existe $x \in X$ tel que $u = |f(x)| = |\lambda| |f(x)|$; et ainsi,

$$u = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty.$$

Par suite, $|\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ est un majorant de G .

De plus, comme $\|f\|_\infty = \sup F$, d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure de F , il existe une suite (u_n) à valeurs dans F (avec $u_n = |f(x_n)|$ où $x_n \in X$) telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| u_n = |\lambda| \cdot |f(x_n)| = |\lambda f(x_n)| \in G$ et $|\lambda| u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

Il en résulte, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure de G que :

$$|\lambda| \cdot \|f\|_\infty = \sup G = \|\lambda f\|_\infty.$$

- **(Inégalité triangulaire)** : On a, pour tout $x \in X$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in X\}$ dont la borne supérieure est $\|f + g\|_\infty$ qui est le plus petit de ses majorants. Par suite :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

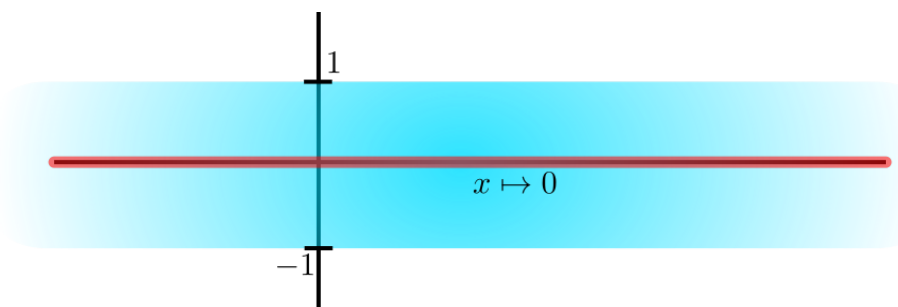
□

L'exercice suivant propose une interprétation graphique très utile pour tester l'appartenance d'une fonction à la boule unité fermée de la norme infinie sur un espace de fonctions bornées.

Exercice 5.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme canonique i.e. la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $f \in B_f(0_E, 1)$ si, et seulement si, le graphe de f appartient à la bande bleue de la figure ci-dessous (les droites d'équations $y = \pm 1$ sont considérées comme incluses dans cette zone)



2. (a) Montrer que les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\frac{2}{\pi}\arctan$ appartiennent à la sphère unité de $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 (b) L'appartenance à la boule unité ouverte est-elle équivalente à l'appartenance du graphe à la zone bleue privée des droites $y = \pm 1$?

Correction.

1. Soit $f \in E$ et $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f . La zone bleue représente l'ensemble $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

On a :

$$\begin{aligned}
 f \in B_f(0_E, 1) &\Leftrightarrow \|f\|_\infty \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times [-1, 1] \\
 f \in B_f(0_E, 1) &\Leftrightarrow \mathcal{G}_f \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]
 \end{aligned}$$

2. (a) On a $\|\sin\|_\infty = 1 = \|\cos\|_\infty$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq \sin(x) \leq 1$; $1 \leq \cos(x) \leq 1$, et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = \cos(0)$.

On a, par définition de $\arctan$ (bijection réciproque de la restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Par suite, on a :

$$\left\| \frac{2}{\pi} \arctan \right\|_\infty = \frac{2}{\pi} \underbrace{\|\arctan\|_\infty}_{=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Il en résulte que $\sin$, $\cos$ et $\frac{2}{\pi}\arctan$ appartiennent à la sphère unité de $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (b) La réponse est non comme le montre la question précédente : le graphe de la fonction $\frac{2}{\pi}\arctan$ est inclus dans la zone bleue privée des droites $y = \pm 1$ mais sa norme valant 1, la fonction n'appartient pas à la boule unité ouverte !

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit trois normes usuelles sur cet espace par analogie du cas de $\mathbb{K}^n$:

Définition 7. Normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. On définit les **normes de la convergence : en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme** respectivement notées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, par :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Proposition 7.

Les normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme sont bien des normes sur $C([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration.

- $\|\cdot\|_1$. Soit $f, g \in E = C([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
La norme de f est bien définie car $|f|$ est continue sur le **segment** $[a, b]$ et donc intégrable sur $[a, b]$.
 - i) **Positivité**. L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$.
 - ii) **Séparation**. Si $\|f\|_1 = 0$, alors $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, or une fonction **continue, positive**, d'intégrale nulle est nulle, d'où $f = 0_E$.
 - iii) **Homogénéité**. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b \underbrace{|\lambda f(t)|}_{=|\lambda| \cdot |f(t)|} dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1.$$

- iv) **Inégalité triangulaire**. Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|f + g\|_1 = \int_a^b \underbrace{|f(t) + g(t)|}_{\leq |f(t)| + |g(t)|} dt \leq \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Il en résulte que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

- $\|\cdot\|_2$: Dans le cas réel, il suffit de remarquer que la norme de la convergence en moyenne quadratique est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

Pour le cas complexe, on adapte de nouveau la "ruse" de la fin de la démonstration de la proposition 4 pour montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $C([a, b], \mathbb{C})$.

- $\|\cdot\|_\infty$: Tout d'abord, la norme infinie d'une fonction f de $C([a, b], \mathbb{K})$ est bien définie, car, d'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un **segment** est bornée (et atteint ses bornes) ; d'où l'existence de $\|f\|_\infty$ car $|f|$ est continue sur le segment $[a, b]$.
Ensuite, pour montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien d'une norme, il suffit de reproduire la même démonstration faite pour la norme infinie sur $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$.

□

Remarque 6.

On verra dans la suite du chapitre, que la norme infinie sur $C([a, b], \mathbb{K})$ peut-être obtenue comme norme *induite* par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$ via l'inclusion $C([a, b], \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$.

Question 1.

La norme un de $C([a, b], \mathbb{K})$ est également définie sur $C_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. S'agit-il encore d'une norme sur ce "sur"-espace ?

Réponse.

Non ! La démonstration de tous les axiomes se passent de la même façon que sur $C([a, b], \mathbb{K})$ sauf... pour la séparation ! En effet, on peut remarquer par exemple que la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(a) = 1$ et $f(t) = 0$ si $t \neq a$ vérifie $\|f\|_1 = 0$ et est non nulle !

Quand seule, parmi les axiomes de norme, la séparation n'est pas demandée, on parle de *semi-norme*. Sur $C_{pm}([a, b], \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme mais pas une norme.

Exercice 6.

On note E l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$$

est une norme sur E .

Démonstration.

Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Commençons par montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie.

La fonction $g : t \mapsto \frac{|f(t)|}{1+t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{|f(t)|}{1+t^2} \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+t^2}.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge car $\arctan$, qui est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, admet des limites finies en $\pm\infty$. Par suite, par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Il en résulte que $\|\cdot\|$ est bien définie sur E .

Montrons que est $\|\cdot\|$ une norme sur E .

i) **Positivité.** L'intégrale d'une fonction positive est positive donc

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{|f(t)|}{1+t^2}}_{\geq 0} dt \geq 0.$$

ii) **Séparation.** Si $\|f\| = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = 0$; or une fonction continue, positive, d'intégrale nulle est nulle, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{|f(t)|}{1+t^2} = 0$; par suite, f est la fonction nulle.

iii) **Homogénéité.** Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\|\lambda f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda f(t)|}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = |\lambda| \|f\|.$$

iv) **Inégalité triangulaire.** Par croissance et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)+g(t)|}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} + \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(t)|}{1+t^2} dt \\ \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\|\cdot\|$ est une norme sur E . □

3. Distance associée à une norme

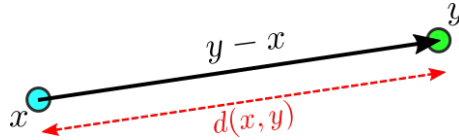
La norme d'un espace vectoriel normé E est une manière d'associer une *longueur* à chaque vecteur de E . Du point de vue *affine* i.e. si on se place dans un espace affine dirigé par E , une manière de mesurer la distance entre deux points M et N devient alors clair : il suffit de regarder la longueur - la norme - du vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui "sépare" ces deux points.

Définition 8. *Distance associée à une norme*

Soit N une norme sur E . On appelle **distance associée à N** l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$

définie par :

$$\text{pour } (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(y - x).$$



Remarque 7.

Soit N une norme sur E . La distance d associée à N vérifie les propriétés suivantes, pour tous $x, y, z \in E$:

- i) (Symétrie) $d(x, y) = d(y, x)$
- ii) (Séparation) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
- iii) (Inégalité triangulaire) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pour un ensemble quelconque X , une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie ces trois axiomes est appelé une *distance* sur X .

Nous ne nous attarderons pas sur ce concept mais dans la suite, nous utiliserons librement ces propriétés dans l'étude des distances associées aux normes.

Proposition 8. Seconde inégalité triangulaire

Soit N une norme sur E . La distance d associée à N vérifie, pour tous $x, y, z \in E$:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

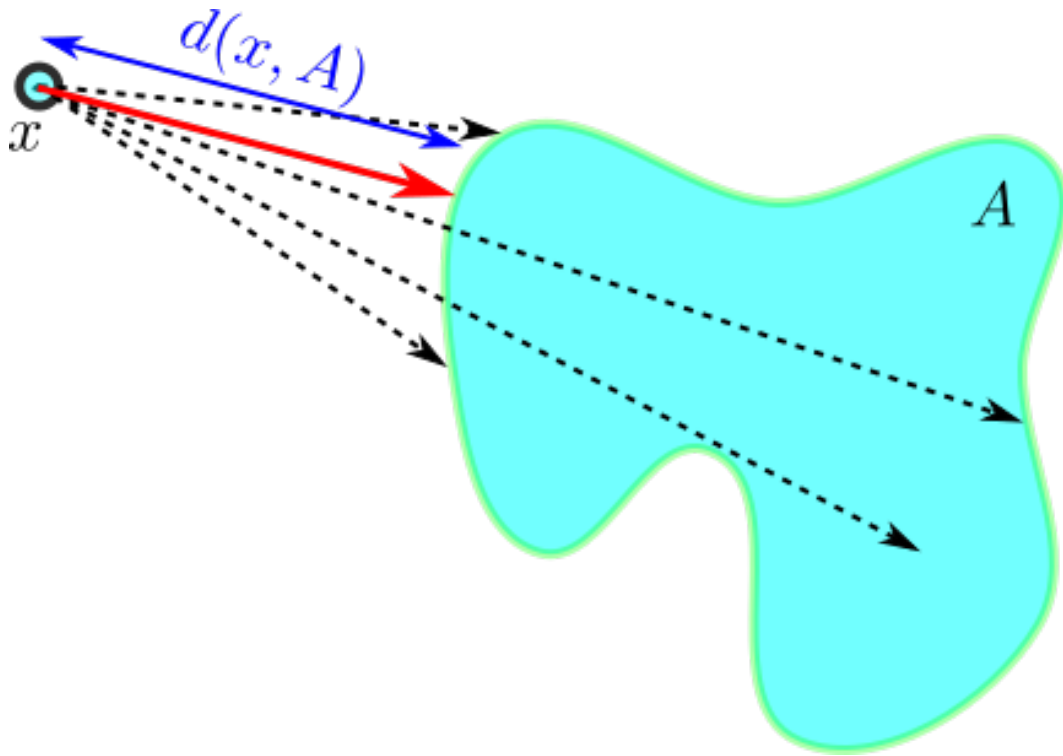
Démonstration.

Il suffit d'appliquer la définition de distance associée à une norme et d'utiliser la seconde inégalité triangulaire pour les normes. (On peut aussi vérifier que pour la notion de distance "générale" au sens de la remarque précédente, cette inégalité est encore valable.) $\square$

Définition 9. Distance à une partie

Soit N une norme sur E , d sa distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** et on note $d(x, A)$, la quantité :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$



On peut également définir la distance entre deux parties de E :

Définition 10. Distance entre deux parties

Soit N une norme sur E , d sa distance associée et A, B des parties non vides de E . On appelle **distance de A à B** et on note $d(A, B)$, la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Exemple 4.

On considère l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni de sa norme canonique. On a, pour $\mathbf{1} = (1)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$:

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) = 1.$$

Tout d'abord, d'après la proposition 5, on a bien $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

— Comme la suite nulle $\mathbf{0} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on a :

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) \leq d(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{0} - \mathbf{1}\|_\infty = \|\mathbf{1}\|_\infty = 1.$$

— Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Alors $\sum u_n$ converge, et ainsi u converge vers 0. Par suite, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$d(\mathbf{1}, u) = \|\mathbf{1} - u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - 1| \geq |u_n - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

d'où, d'après le théorème des gendarmes, $d(\mathbf{1}, u) \geq 1$.

Ceci étant vrai pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, on obtient $d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) \geq 1$ car la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Il en résulte que :

$$d(\mathbf{1}, \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})) = 1.$$

Exercice 7.

Soit d la distance associée à une norme sur E et A une partie non vide de E . Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Correction.

Soit $a \in A$. On a, par définition de $d(x, A)$ et par inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Par suite, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Cette dernière inégalité est vraie pour tout $a \in A$.

Exercice 8.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, calculer la distance entre $(-1, 1)$ et la droite D d'équation $y = 2x$ pour les normes un, deux et infinie de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement chacune des situations.

Correction.

On note d_1 la distance associée à $\|\cdot\|_1$, d_2 la distance associée à $\|\cdot\|_2$, d_∞ la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$ et $u = (-1, 1)$.

La droite D est le sous-ensemble $D = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Pour $(a, 2a) \in D$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$d_i(u, (a, 2a)) = \|(a+1, 2a-1)\|_i \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } \infty.$$

1. On a :

$$d_1(u, (a, 2a)) = |a+1| + |2a-1| = \begin{cases} -(a+1) - (2a-1) = -3a & \text{pour } a \leq -1 \\ (a+1) - (2a-1) = -a+2 & \text{pour } -1 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ (a+1) + (2a-1) = 3a & \text{pour } a \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On étudie $a \mapsto d_1(u, (a, 2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à $\frac{3}{2}$ (atteint pour $a = \frac{1}{2}$). Par suite,

$$d_1(u, D) = \inf_{(a, 2a) \in D} d_1(u, (a, 2a)) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_1(u, (a, 2a)) = \frac{3}{2} \left(= d_1(u, (\frac{1}{2}, 1)) \right).$$

2. On a, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$d_2(u, (a, 2a)) = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{5a^2 - 2a + 2},$$

or $5a^2 - 2a + 2$ est de discriminant strictement négatif, donc $5a^2 - 2a + 2 > 0$ (car $5 > 0$) et le minimum de $a \mapsto 5a^2 - 2a + 2$ est atteint pour $a = \frac{2}{2 \times 5} = \frac{1}{5}$ et vaut $\frac{9}{5}$. De plus, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante, donc le minimum de la fonction $a \mapsto \sqrt{5a^2 - 2a + 2}$ est égal à $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Par suite,

$$d_2(u, D) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_2(u, (a, 2a)) = \frac{3\sqrt{5}}{5} \left(= d_2(u, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})) \right).$$

Remarque : Comme la norme 2 est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, la distance de u à D aurait pu être calculée en déterminant la distance de u avec son projeté orthogonal sur D (qui est bien $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$).

∞ . On a, pour $a \in \mathbb{R}$, $d_\infty(u, (a, 2a)) = \max(|a + 1|, |2a - 1|)$, et on a :

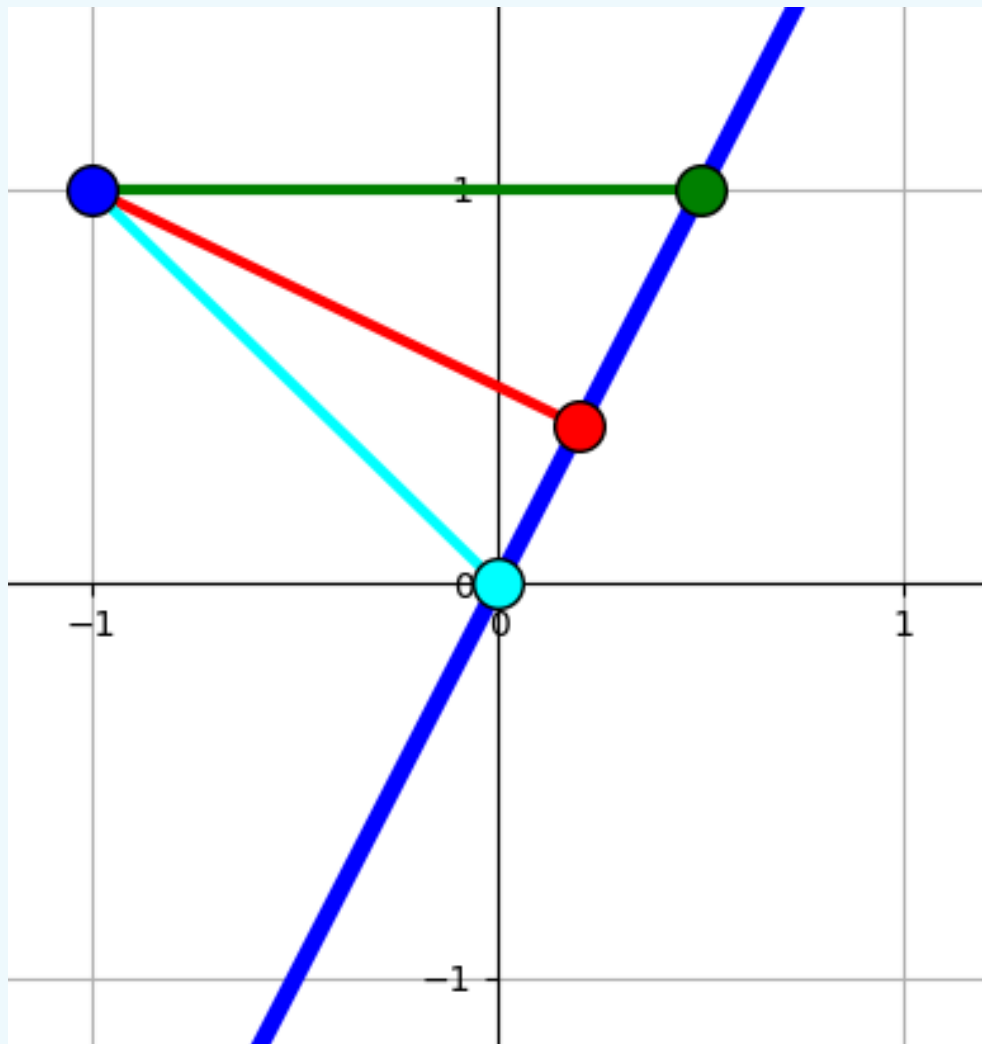
$$|2a - 1| - |a + 1| = \begin{cases} -(2a - 1) + (a + 1) = -a + 2 & \text{pour } a \leq -1 \\ -(2a - 1) - (a + 1) = -3a & \text{pour } -1 \leq a \leq \frac{1}{2} \\ (2a - 1) - (a + 1) = a - 2 & \text{pour } a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $|2a - 1| \leq |a + 1|$ si, et seulement si, $a \in [0, 2]$. Par suite,

$$d_\infty(u, (a, 2a)) = \begin{cases} -2a + 1 & \text{pour } a \leq 0 \\ a + 1 & \text{pour } 0 \leq a \leq 2 \\ 2a - 1 & \text{pour } a \geq 2. \end{cases}$$

On étudie $a \mapsto d_\infty(u, (a, 2a))$ sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour obtenir le minimum de cette fonction sur $\mathbb{R}$ qui est égal à 1 (atteint pour $a = 0$). Par suite,

$$d_\infty(u, D) = \inf_{a \in \mathbb{R}} d_\infty(u, (a, 2a)) = 1 (= d_\infty(u, (0, 0))).$$



4. Boules et sphères associées à une distance

On généralise dans ce paragraphe la notion de cercle/sphère, disque/boule bien connue dans les espaces euclidiens de dimension 2 et 3 qui nous apparaissent naturels. Comme pour la sphère et la boule unité d'une norme, la forme des sphères et boules que nous allons considérer peut être tout-à-fait contre-intuitive vis-à-vis de la terminologie et de nos habitudes.

Notation 2. Boules et sphères

Soit N une norme sur E , d sa norme associée, $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif. On note :

- $S(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) = r\}$; on appelle cet ensemble **sphère** de centre x_0 et de rayon r ;
- $B_f(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}$; on appelle cet ensemble **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r ;

- $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\}$; on appelle cet ensemble **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r ;

Remarque 8.

On peut remarquer que $S(x_0, r) = B_f(x_0, r) \setminus B(x_0, r)$.

Proposition 9.

Soit N une norme sur E . Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E .

Démonstration.

Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$. Soit $x, y \in B(x_0, r)$ et $t \in [0, 1]$. Alors on a, en remarquant que $x_0 = tx_0 + (1-t)x_0$:

$$\begin{aligned}
 d(x_0, tx + (1-t)y) &= N((tx + (1-t)y) - x_0) \\
 &= N(t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)) \\
 &\leq N(t(x - x_0)) + N((1-t)(y - x_0)) \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\
 &\leq tN(x - x_0) + (1-t)N(y - x_0) \quad (\text{homogénéité}) \\
 &< tr + (1-t)r = r \quad (x, y \in B(x_0, r))
 \end{aligned}$$

Donc $tx + (1-t)y$ appartient à $B(x_0, r)$. Par suite, $B(x_0, r)$ est une partie convexe de E .

Il en est de même pour $B_f(x_0, r)$: il suffit de remplacer l'inégalité stricte par une inégalité large dans la dernière ligne du raisonnement précédent. $\square$

Exemple 5.

- Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, on a :

$$B_f(x, r) = [x - r, x + r]; \quad B(x, r) =]x - r, x + r[; \quad S(x, r) = \{x - r, x + r\}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on a :

$$B_f(x, r) = [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]; \quad B(x, r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \dots \times]x_n - r, x_n + r[.$$

En particulier, pour $x = 0_{\mathbb{R}^n}$:

$$B_f(0_{\mathbb{R}^n}, r) = [-r, r]^n; \quad B(0_{\mathbb{R}^n}, r) =]-r, r[^n.$$

- On a $B_f(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x - r \leq y \leq x + r\} = [x - r, x + r]$; de manière analogue, $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $S(x, r) = \{x - r, x + r\}$.

- On traite le cas de la boule fermée. On a, pour $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
- $y \in B_f(x, r)$
 - si, et seulement si,
 - $\|y - x\|_\infty = d(x, y) \leq r$
 - si, et seulement si,
 - $\max(|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|) \leq r$
 - si, et seulement si,
 - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|y_i - x_i| \leq r$
 - si, et seulement si,
 - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_i \in [x_i - r, x_i + r]$
 - si, et seulement si,
 - $y \in [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r]$.

5. Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition 11. *Partie bornée*

Soit N une norme sur E et A une partie de E . On dit que A est **bornée dans** $(E, \|\cdot\|)$ s'il existe un réel positif R tel que :

$$\text{pour tout } x \in A, \quad N(x) \leq R.$$

Proposition 10.

Soit N une norme sur E , d sa distance associée et A une partie de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) A est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$;
- ii) il existe un réel $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R)$;
- iii) il existe $x_0 \in E$ et un réel $R \geq 0$ tels que $A \subset B_f(x_0, R)$;
- iv) il existe un réel $R \geq 0$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) \leq R$.

Correction.

Schéma de la preuve : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i)

- i) $\Rightarrow$ ii) : On suppose A bornée. Alors il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $x \in A$, $N(x) \leq R$, d'où $d(x, 0_E) \leq R$ et donc $x \in B_f(0_E, R)$. Par suite, $A \subset B_f(0_E, R)$.
- ii) $\Rightarrow$ iii) : Il suffit de prendre $x_0 = 0_E$.
- iii) $\Rightarrow$ iv) : On suppose iii). Soit $x, y \in A$. Alors x, y appartiennent à $B_f(x_0, R)$ et on a :

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2R.$$

- iv) $\Rightarrow$ i) : On suppose iv). Si A est vide, la propriété est vérifiée. Supposons A non vide. On fixe x_0 dans A . Soit $x \in A$. Alors

$$N(x) = d(x, 0_E) \leq d(x, x_0) + d(x_0, 0_E) = R + N(x_0).$$

Par suite, A est bornée.

Remarque 9.

Attention, la notion de partie bornée dépend bien-sûr de la norme utilisée ! Une partie bornée pour une certaine norme peut ne pas l'être pour une autre. Nous en verrons un exemple dans la partie consacrée à la comparaison des normes.

S'il n'y pas d'ambiguïté sur la norme utilisée, on pourra dire qu'une partie est "bornée dans E " ou même "bornée" tout court.

Exemple 6.

- Une boule ouverte ou fermée est bornée.
- Un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ n'est pas borné dans E .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est borné et, si $n \geq 2$, l'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 n'est pas borné dans $M_n(\mathbb{K})$ muni de la norme associée à son produit scalaire canonique.

- Si B est une boule ouverte ou fermée de centre x_0 et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$, on a $B \subset B_f(x_0, r)$, donc, d'après la caractérisation des parties bornées (Proposition 10, ii), B est bornée.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$. Alors il existe $x \in F \setminus \{0_E\}$ et donc, comme F est un sous-espace vectoriel, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$. Ainsi, on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda x \in F$ et :

$$\|\lambda x\| = \lambda \cdot \underbrace{\|x\|}_{\neq 0} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où F n'est pas borné dans E .

- La norme associée au produit scalaire canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est donnée par $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$.

On rappelle que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n} \leq \sqrt{n},$$

d'où $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

Montrons que $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $D_x = \text{diag}(x, \frac{1}{x}, 1, \dots, 1)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $D_x \in SL_n(\mathbb{R})$ car $\det(D_x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ et :

$$\|D_x\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tD_x D_x)} = \sqrt{\text{Tr}\left(\text{diag}\left(x^2, \frac{1}{x^2}, 1, \dots, 1\right)\right)} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + n - 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

b. Diamètre d'une partie

Définition 12. *Diamètre d'une partie*

Soit N une norme sur E et A une partie non vide de E . On appelle **diamètre** de A l'élément noté $\text{diam}(A)$ de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y).$$

avec la convention usuelle $\text{diam}(A) = +\infty$ si $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ n'est pas bornée dans $\mathbb{R}$.

Proposition 11.

Soit N une norme sur E et A une partie non vide de E . On a $\text{diam}(A) \in \mathbb{R}_+$ si, et seulement si, A est bornée.

Démonstration.

Comme A est non vide, $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ l'est aussi, donc, $\text{diam}(A)$ i.e. la borne supérieure de $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ est bien définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

D'après la proposition 10, A est bornée si, et seulement si, il existe $R \geq 0$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $d(x,y) \leq R$ i.e. $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$. D'où, puisque $\{d(x,y) \mid (x,y) \in A^2\}$ est non vide, A est bornée si, et seulement si, $\text{diam}(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y) \in \mathbb{R}_+$. $\square$

Exemple 7.

Soit N une norme sur E .

- Soit $x_0 \in E$. On a $\text{diam}(\{x_0\}) = 0$.
- Si F sous-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$, on a $\text{diam}(F) = +\infty$.
- On suppose que E n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Soit $r > 0$. Le diamètre d'une boule fermée ou ouverte de rayon r est égal à $2r$.

- On a :

$$\{d(x,y) \mid (x,y) \in \{x_0\}^2\} = \{d(x_0, x_0)\} = \{0\}.$$

D'où $\text{diam}(\{x_0\}) = 0$.

- D'après l'exemple 6, F n'est pas borné dans E , d'où $\text{diam}(F) = +\infty$.
- Une boule (ouverte ou fermée) de rayon r a un diamètre inférieur ou égal à $2r$: il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire en utilisant le centre de la boule. Montrons qu'il vaut exactement $2r$.

Soit $x_0 \in E$. Commençons par le cas d'une boule fermée $B_f = B_f(x_0, r)$ (qui nous donnera des idées pour le cas ouvert) :

Soit u un vecteur unitaire de E (il en existe car $E \neq \{0_E\}$). Alors les éléments $x_0 \pm ru$

appartiennent à B_f , en effet :

$$d(x_0, x_0 \pm ru) = d(0_E, \pm ru) = N(\pm ru) = rN(u) = r.$$

Or on a :

$$d(x_0 - ru, x_0 + ru) = N(ru - (-ru)) = N(2ru) = 2r.$$

Donc $\text{diam}(B_f) = 2r$.

Passons maintenant au cas d'une boule ouverte $B = B(x_0, r)$. Le raisonnement précédent ne convient pas car $x_0 \pm ru$ ne sont pas dans B ... Mais on peut s'en rapprocher autant que l'on veut !

Soit u un vecteur unitaire de E et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les éléments $x_n^\pm = x_0 \pm r(1 - \frac{1}{n})u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^\pm \in B$, en effet :

$$d(x_0, x_n^\pm) = d\left(0_E, \pm r\left(1 - \frac{1}{n}\right)u\right) = N\left(\pm r\left(1 - \frac{1}{n}\right)u\right) = r\left(1 - \frac{1}{n}\right) < r.$$

De plus, on a :

$$d(x_n^-, x_n^+) = d\left(x_0 - r\left(1 - \frac{1}{n}\right)u, x_0 + r\left(1 - \frac{1}{n}\right)u\right) = N\left(2r\left(1 - \frac{1}{n}\right)u\right) = 2r\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Par suite, $d(x_n^-, x_n^+) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2r$ et donc $\text{diam}(B) = 2r$.

Exercice 9.

On se place dans l'espace vectoriel normé $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Déterminer le diamètre de :

$$F = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]\}.$$

Correction.

Déterminons tout d'abord si F est borné ou non. On a, pour tout $f \in F$, par croissance de l'intégrale :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 1 dt \leq 1,$$

donc F est une partie bornée de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

Déterminons son diamètre. Soit $f, g \in F$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$f(t) - g(t) \leq 1 - 0 = 1 \text{ et } g(t) - f(t) \leq 1 - 0 = 1,$$

donc $|f(t) - g(t)| \leq 1$. Par suite, on a, toujours par croissance de l'intégrale :

$$d(f, g) = \|g - f\|_1 \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \leq \int_0^1 1 dt \leq 1.$$

D'où $\text{diam}(F) \leq 1$.

Or, pour $g = \mathbf{1} \in F$ et $f = \mathbf{0} \in F$, on a $d(f, g) = \|g - f\|_1 = \int_0^1 1 dt = 1$, donc $\text{diam}(F) \geq 1$.

Il en résulte que :

$$\text{diam}(F) = 1.$$

c. Applications et suites bornées

Définition 13. *Application bornée*

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. Une fonction $f : X \rightarrow E$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in X$:

$$N(f(x)) \leq R.$$

Remarque 10. *Suite bornée*

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E peut être vue comme l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que $f(n) = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La définition précédente s'applique donc également aux suites i.e. une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N(u_n) \leq R.$$

On peut généraliser la structure de l'espace vectoriel normé $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ vue dans la paragraphe 2 au cas des fonctions à valeurs dans E bornées :

Définition-Proposition 14.

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\|\cdot\|_\infty$ appelée **norme infinie** définie par :

$$\text{pour } f \in \mathcal{F}_b(X, E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} N(f(x)),$$

est une norme sur $\mathcal{F}_b(X, E)$.

Démonstration.

Il s'agit de la même démonstration que pour la norme infinie de $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$, en remplaçant le module/valeur absolue par la norme N . $\square$

6. Constructions d'espaces vectoriels normés

a. Opérations sur les normes

Proposition 12.

Soit N, N' deux normes sur E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'application $N + N' : x \mapsto N(x) + N'(x)$ est une norme sur E .
- L'application $\alpha N : x \mapsto \alpha N(x)$ est une norme sur E .

Démonstration.

— On note $N'' = N + N'$. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) **Positivité**. Par positivité des normes N et N' , on a $N(x) \geq 0$ et $N'(x) \geq 0$, donc :

$$N''(x) = N(x) + N'(x) \geq 0.$$

ii) **Séparation**. On suppose $N''(x) = 0$. Alors, par positivité de N et N' , on a : $0 \leq N(x) \leq N(x) + N'(x) = N''(x) = 0$. Ainsi, $N(x) = 0$ et donc, d'après l'axiome de séparation pour la norme N , on obtient $x = 0_E$.

iii) **Homogénéité**. En utilisant l'homogénéité des normes N et N' , on a :

$$N''(\lambda x) = N(\lambda x) + N'(\lambda x) = |\lambda|N(x) + |\lambda|N'(x) = |\lambda|(N(x) + N'(x)) = |\lambda|N''(x).$$

iv) **Inégalité triangulaire**. Par inégalité triangulaire pour les normes N et N' , on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ et $N'(x + y) \leq N'(x) + N'(y)$; ainsi, on obtient :

$$N''(x + y) = N(x + y) + N'(x + y) \leq (N(x) + N(y)) + (N'(x) + N'(y)) = N''(x) + N''(y).$$

Il en résulte que N'' est une norme sur E .

— On note $n = \alpha N$. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i) **Positivité**. Par positivité de N , on a $N(x) \geq 0$ et ainsi, comme α est positif, on obtient :

$$n(x) = \alpha N(x) \geq 0.$$

ii) **Séparation**. On suppose $n(x) = 0$. Alors $\alpha N(x) = 0$ et, dans $\mathbb{R}$, si un produit de facteur est nul, l'un des facteurs est nul ; or on a supposé $\alpha \neq 0$, donc $N(x) = 0$. Donc, d'après l'axiome de séparation pour la norme N , on a $x = 0_E$.

iii) **Homogénéité**. En utilisant l'homogénéité de la norme N , on a :

$$n(\lambda x) = \alpha N(\lambda x) = \alpha |\lambda| N(x) = |\lambda|(\alpha N(x)) = |\lambda|n(x).$$

iv) **Inégalité triangulaire**. Par inégalité triangulaire pour la norme N , on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$; ainsi, on obtient, comme α est positif :

$$n(x + y) = \alpha N(x + y) \leq \alpha(N(x) + N(y)) = \alpha N(x) + \alpha N(y) = n(x) + n(y).$$

Il en résulte que n est une norme sur E . □

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N_1, \dots, N_n$ des normes sur E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que

$$N = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i.$$

est une norme sur E .

2. On suppose de plus que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Que peut-on dire de l'intersection des boules unités (fermées ou ouvertes) des normes $N_1, \dots, N_n$ par rapport à la boule unité (fermée ou ouverte) de N .

Correction.

1. On raisonne par récurrence et on utilise la proposition précédente.
2. On note, pour $i = 1, \dots, n$, B_i la boule unité fermée de N_i et B la boule unité fermée de N . Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $N_i(x) \leq 1$, donc on a :

$$N(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i(x) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Par suite, $x \in B$. Donc $\bigcap_{i=1}^n B_i \subset B$.

L'inclusion réciproque est fautive en général (re-exercice : trouver un contre-exemple!).

Exercice 11.

On considère $\mathbb{K}$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur lui-même. Montrer que toute norme de $\mathbb{K}$ est de la forme $x \mapsto \alpha|x|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Correction.

D'après la proposition précédente, $x \mapsto \alpha|x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$. Réciproquement, soit N une norme sur $\mathbb{K}$. On pose $\alpha = N(1)$ qui est strictement positif d'après l'axiome de séparation. D'après l'axiome d'homogénéité, on a pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$N(x) = N(x.1) = |x|N(1) = \alpha|x|.$$

b. Composition par une fonction injective

Proposition 13.

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N une norme sur E et u une application linéaire *injective* de F dans E . L'application $N' : F \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N' = N \circ u : x \mapsto N(u(x)),$$

est une norme sur F .

Démonstration.

Soit $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) (Positivité) Comme N est positive, $N' = N \circ u$ l'est aussi.

ii) (**Séparation**) On suppose que $N'(x) = 0$. Alors $N(u(x)) = 0$ donc $u(x) = 0_E$. Or u est une application linéaire injective donc $x = 0_F$.

iii) (**Homogénéité**) Comme u est linéaire, on a

$$N'(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda|N(u(x)) = |\lambda|N'(x).$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) Toujours par linéarité de u :

$$N'(x + y) = N(u(x) + u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y)) = N'(x) + N'(y).$$

□

Exemple 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On définit les normes un, deux et infinie dans la base $\mathcal{B}$, notée respectivement $\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ de la façon suivante : pour $x \in E$, dont l'unique décomposition dans la base $\mathcal{B}$ est donnée

par $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on note

$$\|x\|_{1,\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n |x_i| ; \quad \|x\|_{2,\mathcal{B}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|).$$

Alors $\|\cdot\|_{1,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{2,\mathcal{B}}$, $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ sont bien des normes sur E .

On considère l'isomorphisme d'espaces vectoriels $u : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ donné par :

$$u : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

En particulier, u est une application linéaire injective et on remarque que, pour $i = 1, 2, \infty$:

$$\|\cdot\|_{i,\mathcal{B}} = \|\cdot\|_i \circ u.$$

Ainsi, pour $i = 1, 2, \infty$, d'après la proposition précédente, $\|\cdot\|_{i,\mathcal{B}}$ est une norme sur E car, d'après la proposition 4, $\|\cdot\|_i$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer de deux façons que l'application $\|\cdot\| : A \rightarrow \sqrt{\text{Tr}(^tAA)}$ définie sur E est une norme sur E :
 - (a) En exploitant une norme bien choisie sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et une application linéaire injective u de E dans $\mathbb{R}^{n^2}$.
 - (b) En remarquant que $\|\cdot\|$ est la norme associée à au produit scalaire canonique sur

E (on redémontrera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire avec les propriétés de la trace).

2. Définir deux autres normes sur E en utilisant la même application linéaire que dans la question 1a puis exprimer la valeur de ces normes appliquées à une matrice en fonction de ses coefficients.

Correction.

1. (a) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On a :

$$\sqrt{\text{Tr}(^tAA)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}.$$

On remarque alors que, dans cette expression, on somme tous les coefficients au carré de la matrice ; cette formule nous fait donc penser à la norme deux d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ dont les coordonnées sont les coefficients de la matrice... Formalisons cette idée !

Considérons la norme deux sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et l'application u de E dans $\mathbb{R}^{n^2}$ définie, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, par :

$$u(A) = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}) = (a_{Q_k, R_k})_{1 \leq k \leq n^2}$$

où, pour $k \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, $Q_k = q_k + 1$ et $R_k = r_k + 1$ avec q_k le quotient et r_k le reste de la division euclidienne de $k - 1$ par n (c'est avec ce genre d'exemple qu'on se rend compte que l'informatique a "raison" de commencer à compter en 0 plutôt qu'en 1!).

L'application u :

— est linéaire : en effet, pour tous $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda A + \mu B) &= (\lambda a_{Q_k, R_k} + \mu b_{Q_k, R_k})_{1 \leq k \leq n^2} \\ &= \lambda (a_{Q_k, R_k})_{1 \leq k \leq n^2} + \mu (b_{Q_k, R_k})_{1 \leq k \leq n^2} \\ u(\lambda A + \mu B) &= \lambda u(A) + \mu u(B). \end{aligned}$$

— est injective : en effet, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$ tel que $u(A) = 0_{\mathbb{R}^{n^2}}$, on a, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en posant $k = (i - 1)n + j \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$, $Q_k = i$ et $R_k = j$, donc :

$$a_{i,j} = a_{Q_k, R_k} = 0.$$

D'où $A = 0_n$.

Ainsi, comme $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et u est linéaire injective, la fonction $\|\cdot\| = \|u(\cdot)\|_2$ est une norme sur E d'après la proposition 13 et on a, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, en remarquant que $(i, j) \mapsto (i - 1)n + j$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$:

$$\|A\| = \|u(A)\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq k \leq n^2} a_{Q_k, R_k}^2} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2} = \sqrt{\text{Tr}(^tAA)}.$$

d'où $\|\cdot\| : A \rightarrow \sqrt{\text{Tr}(^tAA)}$ est une norme sur E .

- (b) Cette façon de faire est bien plus satisfaisante et a été faite en Sup' (exercice classique). Redémontrons ici tout cela.

On considère l'application $(\cdot|\cdot) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour $A, B \in E$, par $(A|B) = \text{Tr}(^tAB)$.

Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E . Soit $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) **(Symétrie)** La trace vérifie, pour tous $M, N \in E$, $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$ et $\text{Tr}({}^tM) = \text{Tr}(M)$ (exercice à faire!) :

$$(A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \text{Tr}(A{}^tB) = \text{Tr}({}^tBA) = (B|A).$$

- ii) **(Bilinéarité)** Comme $(\cdot|\cdot)$ est symétrique, il suffit de montrer la linéarité par rapport à la première variable. Par linéarité du passage à la transposée, distributivité du produit dans E et par linéarité de la trace, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda A + B|C) &= \text{Tr}({}^t(\lambda A + B)C) \\ &= \text{Tr}((\lambda {}^tA + {}^tB)C) \\ &= \text{Tr}(\lambda {}^tAC + {}^tBC) \\ &= \lambda \text{Tr}({}^tAC) + \text{Tr}({}^tBC) \\ (\lambda A + B|C) &= \lambda(A|C) + (B|C). \end{aligned}$$

- iii) **(Définie positivité)** On a, d'une part

$$(A|A) = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$$

et d'autre part, si $(A|A) = 0$, alors, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$0 \leq a_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \text{Tr}({}^tAA) = (A|A) = 0,$$

donc $a_{i,j} = 0$. Par suite, $A = 0_n$.

Ceci montre que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E . Ainsi, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E comme norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E .

2. En prenant les normes un et infinie sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et l'application u de la question 1a, avec la proposition 13, on définit deux autres normes sur E , à savoir :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$$

et

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \max_{1 \leq i, j \leq n} (|a_{i,j}|).$$

c. Application : exemples de normes sur $\mathbb{K}[X]$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une indéterminée. Grâce à la proposition précédente, on va munir $\mathbb{K}[X]$ de plusieurs structures d'espace vectoriel normé à partir des exemples que l'on a étudiés dans le paragraphe 2.

Exemple 9.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (on rappelle que cette suite est stationnaire en 0) et on note $t \mapsto P(t)$ la fonction polynomiale associée à P .

Normes provenant des espaces de suites : Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes

sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|^2} \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|.$$

Normes provenant des espaces de fonctions : Soit $a < b$ des réels. Les applications $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)| dt \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt} \text{ et } \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{t \in [a,b]} |P(t)|.$$

Pour les trois premières normes, on utilise l'application :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \ell^{1,2,\infty}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \\ P & \mapsto (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

où $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont munis de leur normes canoniques respectives.

Pour les trois suivantes, on utilise l'application :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow C([a, b], \mathbb{K}) \\ P & \mapsto \{t \mapsto P(t)\} \end{cases}$$

où $C([a, b], \mathbb{K})$ est tour à tour muni des normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_{n+1}$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que, pour $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n , la quantité :

$$\|P\| = \max(|P(x_1)|, \dots, |P(x_{n+1})|),$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Correction.

Voici deux façons de procéder pour cet exercice :

- **À partir de la définition :**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (Positivité) Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $|P(x_i)| \geq 0$ donc $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n+1} (|P(x_i)|) \geq 0$.
- (Séparation) On suppose $\|P\| = 0$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $P(x_i) = 0$. Par suite, P est un polynôme de degré au plus n qui possède $n+1$ racines (car les x_i sont tous distincts). Il en résulte que P est le polynôme nul.

iii) (Homogénéité) On a :

$$\|\lambda P\| = \max_{1 \leq i \leq n+1} (\underbrace{|\lambda P(x_i)|}_{=|\lambda| |P(x_i)|}) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n+1} (|P(x_i)|) = |\lambda| \|P\|.$$

iv) (Inégalité triangulaire) On a :

$$\begin{aligned} \|P + Q\| &= \max_{1 \leq i \leq n+1} (\underbrace{|P(x_i) + Q(x_i)|}_{\leq |P(x_i)| + |Q(x_i)|}) \\ \|P + Q\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n+1} (|P(x_i)|) + \max_{1 \leq i \leq n+1} (|Q(x_i)|) = \|P\| + \|Q\|. \end{aligned}$$

• **En utilisant une application linéaire injective :**

On remarque que, pour $\|P\| = \|(P(x_1), \dots, P(x_{n+1}))\|_\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur $\mathbb{K}^{n+1}$. On définit alors l'application $u : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ de la manière suivante : pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$u(P) = (P(x_1), \dots, P(x_{n+1})).$$

Montrons que u est une application linéaire injective.

— (Linéarité). Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_{n+1})) \\ &= (\lambda P(x_1) + \mu Q(x_1), \dots, \lambda P(x_{n+1}) + \mu Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda(P(x_1), \dots, P(x_{n+1})) + \mu(Q(x_1), \dots, Q(x_{n+1})) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

— (Injectivité). Soit $P \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(P) = (0, \dots, 0)$. Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, x_i est une racine de P . Or les x_i sont tous différents, donc P est un polynôme de degré au plus n qui possède $n+1$ racines. Il s'agit donc du polynôme nul (*un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines*). Ainsi, $\text{Ker}(u) = \{0\}$ et donc u est injective.

Remarque : on peut montrer que u est en fait bijective (et donc que c'est un isomorphisme) grâce au théorème du rang ou en montrant directement que u est surjective.

Ainsi, comme u est linéaire injective et que

$$P \mapsto \|P\| = \|u(P)\|_\infty,$$

il résulte de la proposition 13 que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

d. Normes induites

Étant donné une sous-espace F de l'espace vectoriel E muni d'une norme, on utilise la restriction à F de cette dernière pour munir d'une structure d'espace vectoriel normé :

Définition-Proposition 15. Norme induite

Soit N une norme sur E et F un sous-espace vectoriel de E . La restriction de N à F est une norme sur F .

Cette restriction est appelée **norme induite** sur F par N .

Démonstration.

On utilise la proposition précédente : en effet, l'injection canonique $\iota : F \rightarrow E$ est une application linéaire injective de F dans E . La norme induite sur F par N est alors la norme $N \circ \iota$. $\square$

Remarque 11.

Pour désigner la norme induite sur F , on utilisera en général la même notation que pour la norme sur E .

Exemple 10.

- La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par chacune des normes un, deux, et infinie sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. La norme de la convergence uniforme sur $C([a, b], \mathbb{K})$ est la norme induite par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a, b], \mathbb{K})$.

Question 2.

Quelle norme usuelle peut-on induire sur l'espace vectoriel $c_0(\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui convergent vers 0.

Réponse.

Parmi les espaces vectoriel normés de suites que l'on a étudié, seul $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ contient $c_0(\mathbb{K})$. On induit alors la norme infinie de $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sur $c_0(\mathbb{K})$.

e. Norme produit

On peut définir une norme naturelle sur un produit fini d'espaces vectoriels normés :

Définition-Proposition 16. Norme produit

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.

On pose $E = E_1 \times \dots \times E_n$. L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, appelée **norme produit**, et définie, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, par :

$$N(x) = \max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)),$$

est une norme sur E .

Correction.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- i) (Positivité) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $N_i(x_i) \geq 0$ par positivité de N_i , donc $N(x) = \max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)) \geq 0$.
- ii) (Séparation) On suppose $N(x) = 0$. Alors $\max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)) = 0$, donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $N_i(x_i) = 0$ car $N_i(x_i) \geq 0$. Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par séparation de N_i , $x_i = 0_{E_i}$.
Il en résulte que $x = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n}) = 0_E$.
- iii) (Homogénéité) On a, par homogénéité de N_i pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \max(N_1(\lambda x_1), \dots, N_n(\lambda x_n)) \\ &= \max(|\lambda| N_1(x_1), \dots, |\lambda| N_n(x_n)) \\ &= |\lambda| \max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)) \\ N(\lambda x) &= |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

- iv) (Inégalité triangulaire) On a, par inégalité triangulaire pour N_i pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \max(N_1(x_1+y_1), \dots, N_n(x_n+y_n)) \\ &\leq \max(N_1(x_1) + N_1(y_1), \dots, N_n(x_n) + N_n(y_n)) \\ &\leq \max(N_1(x_1), \dots, N_n(x_n)) + \max(N_1(y_1), \dots, N_n(y_n)) \\ N(x+y) &\leq N(x) + N(y). \end{aligned}$$

Question 3.

Comment peut-on obtenir la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$ en utilisant une norme produit ?

Réponse.

On considère, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'espace vectoriel normé (E_i, N_i) où $E_i = \mathbb{K}$ et $N_i = |\cdot|$. Alors la norme produit sur $\mathbb{K}^n = E_1 \times \dots \times E_n$ est égale à la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 14.

En s'inspirant de la définition-proposition précédente, définir d'autres normes sur un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'espaces vectoriels normés. Alors, pour $p \geq 1$, on peut définir une norme N sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$ de la façon suivante : pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$,

$$N(x) = \left(\sum_{i=1}^n N_i(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'espaces vectoriels normés. On considère l'espace vectoriel normé $E = E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la norme produit $\|\cdot\|$.

Exprimer les boules ouvertes et fermées de $\|\cdot\|$ en fonction des boules ouvertes et fermées des normes de chaque facteurs du produit cartésien E .

Correction.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et r un réel strictement positif. On note $B_f(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r pour la norme produit sur E et, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_f^{(i)}(x_i, r)$ la boule fermée de centre x_i et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_{E_i}$ sur E_i .

On s'inspire directement de l'exemple 5 : on a, pour $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$:

$y \in B_f(x, r)$

si, et seulement si,

$$\|y - x\| \leq r$$

si, et seulement si,

$$\max(\|y_1 - x_1\|_{E_1}, \dots, \|y_n - x_n\|_{E_n}) \leq r$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|y_i - x_i\|_{E_i} \leq r$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i \in B_f^{(i)}(x_i, r)$$

si, et seulement si,

$$y \in B_f^{(1)}(x_1, r) \times \dots \times B_f^{(n)}(x_n, r).$$

Par suite, on a :

$$B_f(x, r) = B_f^{(1)}(x_1, r) \times \dots \times B_f^{(n)}(x_n, r),$$

et de manière analogue pour la boule ouverte,

$$B(x, r) = B^{(1)}(x_1, r) \times \dots \times B^{(n)}(x_n, r).$$

Partie B

Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites convergentes

Définition 17. *Suite convergente*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E . On dit que u **converge**, ou est **convergente** dans $(E, \|\cdot\|)$, s'il existe un élément $\ell \in E$ tel que la suite à valeurs réelles $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Dans ce cas, on dit que la suite u **converge vers** ℓ dans $(E, \|\cdot\|)$.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**, ou est **divergente** dans $(E, \|\cdot\|)$.

Remarque 12.

- S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le norme dont est muni E , on pourra dire qu'une suite "converge/diverge dans E " ou "converge/diverge" tout court.
- Pour d la distance associée à $\|\cdot\|$, on peut reformuler la définition en : une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, la suite réelle $(d(u_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 14.

Soit u une suite à valeurs dans E . Si u converge, alors il existe un *unique* ℓ tel que u converge vers ℓ .

Démonstration.

Soit $u = (u_n)$ une suite à valeurs dans E convergente. Soit $\ell_1, \ell_2 \in E$ tels que u converge à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2 . Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|(\ell_1 - u_n) + (u_n - \ell_2)\| \leq \|\ell_1 - u_n\| + \|u_n - \ell_2\|.$$

On passe à la limite dans l'égalité précédente quand n tend vers $+\infty$ et on obtient $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$, donc $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Notation 3.

Pour une suite $u = (u_n)$ à valeurs dans E qui converge vers $\ell \in E$, on notera indifféremment :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ ou } \lim u = \ell \text{ ou } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Remarque 13.

Même si les notations précédentes ne le laissent pas entendre, la notion de convergence et de limite de suite dans un espace vectoriel normé dépend très fortement de la norme sous-jacente. Il est possible qu'une suite converge pour une certaine norme et pas pour une autre ou même qu'elle converge vers une autre limite comme en atteste l'exemple et l'exercice ci-après.

Exemple 11.

On considère l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. Dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, cette même suite diverge.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - \mathbf{0}\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - 0| dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

Montrons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Supposons par l'absurde que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vers une fonction $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si $t \in [0, 1[$ et $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, donc, pour $t \in [0, 1]$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue et donc n'appartient pas à $C([0, 1], \mathbb{R})$, contradiction !

Il en résulte que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 16.

On considère l'espace $\mathbb{R}[X]$ et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$.

1. Montrer que, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$ où $\|\cdot\|_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. On considère, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, la quantité :

$$\|P\| = |P(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ et déterminer sa limite. Qu'en conclut-on ?

3. Déterminer une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Correction.

1. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|P_n - 0\|_1 = \int_0^1 |P_n(t) - 0| dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$.

2. (a) Montrons que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord, $\|P\|$ est bien défini car la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$ est une somme finie.

i) (Positivité) on a :

$$\|P\| = \underbrace{|P(1)|}_{\geq 0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{|a_k|}{k}}_{\geq 0} \geq 0.$$

ii) (Séparation) On suppose que $\|P\| = 0$. On a une somme nulle de nombres positifs, donc $P(1) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = 0$. On a donc :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = a_0,$$

et donc $0 = P(1) = a_0 = P(X)$.

Ainsi, $P = 0$.

iii) (Homogénéité) On a :

$$\begin{aligned} \|\lambda P\| &= |\lambda P(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\lambda a_k|}{k} \\ &= |\lambda| |P(1)| + |\lambda| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} \\ \|\lambda P\| &= |\lambda| \cdot \|P\|. \end{aligned}$$

iv) (Inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned}\|P + Q\| &= |P(1) + Q(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{|a_k + b_k|}{k}}_{\leq \frac{|a_k|}{k} + \frac{|b_k|}{k}} \\ &\leq |P(1)| + |Q(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|b_k|}{k} \\ \|P + Q\| &\leq \|P\| + \|Q\|.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|P_n - 1\| = |1^n - 1| + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme constant en 1 dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.
Dans la première question, on a vu que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_1)$; par suite, une même suite peut converger, pour deux normes différentes, vers deux limites différentes !

3. Prenons, par exemple, la norme $\|\cdot\|$ donnée, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, par :

$$\|P\| = \int_0^2 |P(t)| dt.$$

On a, pour $n \in \mathbb{N}$, par croissances comparées :

$$\|P_n\| = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{2^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Or, par l'absurde, si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge disons vers P , on a, d'après la seconde inégalité triangulaire :

$$\|P_n - P\| \geq \|P_n\| - \|P\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Contradiction !

Par suite, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Notation 4.

On note :

- $c(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E convergentes ;
- $c_0(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E qui convergent vers 0 ;
- $\ell^\infty(\mathbb{N}, E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E bornées.

Remarque 14.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, $\ell^\infty(E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace vectoriel normé. On rappelle que, pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$,

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|.$$

2. Opérations algébriques sur les suites convergentes**a. Combinaisons linéaires****Proposition 15.** *Combinaison linéaire*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E et $\ell, \ell' \in E$.

Si u converge vers ℓ et v converge vers ℓ' alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la suite $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Démonstration.

On suppose que u converge vers ℓ et v converge vers ℓ' . Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

On a $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')\| &= \|(\lambda u_n - \lambda\ell) + (\mu v_n - \mu\ell')\| \\ &\leq \|\lambda u_n - \lambda\ell\| + \|\mu v_n - \mu\ell'\| \\ &\leq |\lambda| \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + |\mu| \underbrace{\|v_n - \ell'\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$. □

Corollaire 1.

Toute combinaison linéaire de suites à valeurs dans E convergentes est convergente.

Démonstration.

On raisonne par récurrence en utilisant la proposition précédente. □

Corollaire 2.

Les ensembles de suites $c(E)$ et $c_0(E)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (munis de l'addition canonique des suites et de la multiplication canonique par les scalaires).

Démonstration.

La suite constante en 0 appartient à $c(E)$ et, d'après la proposition précédente, toute combinaison linéaire de deux éléments de $c(E)$ appartient à $c(E)$. Par suite, $c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Concernant $c_0(E)$, c'est un sous-espace vectoriel de $c(E)$. □

Proposition 16.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\ell \in E$.

Si u converge vers ℓ , alors la suite à valeurs réelles $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

Démonstration.

On suppose que u converge vers ℓ .

On a, d'après la seconde inégalité triangulaire :

$$0 \leq \| \|u_n\| - \|\ell\| \| \leq \|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$. □

Corollaire 3.

Toute suite convergente est bornée. Autrement dit, $c(E) \subset \ell^\infty(E)$.

Démonstration.

Soit $u = (u_n) \in c(E)$. D'après la proposition précédente, la suite réelle $(\|u_n\|)$ converge et donc est bornée (à refaire en exercice!). Ainsi, $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\underbrace{\|u\|_\infty}_{\text{norme sur } \ell^\infty(E)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| = \underbrace{\|(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty}_{\text{norme sur } \ell^\infty(\mathbb{R})} \leq R.$$

Donc $(u_n) \in \ell^\infty(E)$. Il en résulte que $c(E) \subset \ell^\infty(E)$. □

Question 4.

Quelle norme peut-on considérer sur $c(E)$ et sur $c_0(E)$ pour les munir de structures d'espaces vectoriels normés ?

Réponse.

Les ensembles $c(E)$ et $c_0(E)$ étant des sous-espaces vectoriels de $\ell^\infty(E)$, on peut induire la norme infinie sur ces deux sous-espaces.

Proposition 17.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs scalaires, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\ell \in E$.
 Si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers $\lambda \ell$.

Démonstration.

On suppose que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . En utilisant l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|$, on a :

$$\|\lambda_n u_n - \lambda \ell\| = \|\lambda_n u_n - \lambda u_n + \lambda u_n - \lambda \ell\| \leq \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \underbrace{\|u_n\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\ell\|} + \underbrace{|\lambda|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers $\lambda \ell$. □

b. Suites à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Comme on l'a vu dans la partie précédente, on peut munir un produit fini d'espaces vectoriels normés de la norme produit. C'est-à-dire, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), \dots, (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés, on considère la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $x = (x_1, \dots, x_k) \in \prod_{i=1}^k E_i$, par :

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|_{(i)}.$$

Proposition 18.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), \dots, (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés. On munit $E = \prod_{i=1}^k E_i$ de la norme produit notée $\|\cdot\|$.

Soit $u = ((u_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}})$ une suite à valeurs dans E . La suite u converge vers $(\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$ dans E si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i .

Démonstration.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}})$ une suite à valeurs dans E .

- ($\Rightarrow$). On suppose que u converge vers $\ell = (\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$ dans E .
 Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|u_n^{(i)} - \ell^{(i)}\|_{(i)} \leq \max(\|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}\|_{(1)}, \dots, \|u_n^{(k)} - \ell^{(k)}\|_{(k)}) = \|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i .

- ($\Leftarrow$). On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i . On pose $\ell = (\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)})$.
 Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|u_n - \ell\| &= \max(\|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}\|_{(1)}, \dots, \|u_n^{(k)} - \ell^{(k)}\|_{(k)}) \\ &\leq \underbrace{\|u_n^{(1)} - \ell^{(1)}\|_{(1)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \dots + \underbrace{\|u_n^{(k)} - \ell^{(k)}\|_{(k)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Donc u converge vers ℓ dans E . □

Exemple 12.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \left(1 - e^{-n}, n \sin\left(\frac{1}{1+n^2}\right)\right)$ converge dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vers le vecteur $(1, 0)$.

On a $1 - e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $n \sin\left(\frac{1}{1+n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, d'après la proposition précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vers le vecteur $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{1+n^2}\right)\right) = (1, 0)$.

Définition-Proposition 18. Suites composantes

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose E de dimension finie p . Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Il existe une unique famille $((u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ de suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ appelées **suites composantes de u dans la base $\mathcal{B}$** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i.$$

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelé la **i -ème suite composante de u** dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, comme $\mathcal{B}$ est une base de E , il existe une unique famille de scalaires $(u_{i,n})_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ telle que $u_n = \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} u_{i,n} e_i$.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est bien définie.

L'unicité de la décomposition de u_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$ assure alors l'unicité de la famille $((u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}})_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$. □

Proposition 19.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E ; on munit E de la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$.

Soit $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i \in E$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E .

La suite u converge vers ℓ dans $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$ si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la i -ème suite composante $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de u dans la base $\mathcal{B}$ converge vers ℓ_i dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Démonstration.

On considère l'isomorphisme $u : E \rightarrow \mathbb{K}^p$ donné par $f : x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_p)$.

On munit $\mathbb{K}^p$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty}$ qui correspond à la norme produit sur ce produit cartésien où chaque facteur $\mathbb{K}$ est muni de $|\cdot|$.

On a alors $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}} = \|\cdot\|_{\infty} \circ f$, d'après l'exemple 8.

De ce fait, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i$ dans $(E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}})$ si, et seulement si, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ dans $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_{\infty})$.

Ainsi, on a, d'après la proposition précédente :

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i \text{ dans } (E, \|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}});$$

si, et seulement si,

$$\text{la suite } (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f(\ell) = (\ell_1, \dots, \ell_p) \text{ dans } (\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_{\infty});$$

si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell_i \text{ dans } (\mathbb{K}, |\cdot|).$$

□

c. Relations de comparaisons

Dans ce paragraphe, on étend, pour des suites à valeurs vectorielles, les notations de Landau, "o" et "O" vues dans le cadre de l'analyse réelle (et complexe).

Définition 19. Domination et négligeabilité

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que u est **dominée** par a en $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout entier $n \geq N$:

$$\|u_n\| \leq M|a_n|.$$

On note alors $u = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(a)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(a_n)$.

- On dit que u est **négligeable** devant a en $+\infty$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$:

$$\|u_n\| \leq \varepsilon|a_n|.$$

On note alors $u = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(a)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(a_n)$.

L'exercice suivant donne une vision plus intuitive des relations de domination et de négligeabilité.

Exercice 17.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}^*$.

1. $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(a_n)$ si, et seulement si, la suite $\left(\frac{1}{a_n}u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est bornée.
2. $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(a_n)$ si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}u_n = 0_E$.

Correction.

1. En remarquant qu'une suite est bornée si, et seulement si, elle est bornée à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(a_n)$$

si, et seulement si,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq M|a_n|,$$

si, et seulement si,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left\|\frac{1}{a_n}u_n\right\| \leq M,$$

si, et seulement si,

$$\left(\frac{1}{a_n}u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

2. On a :

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(a_n)$$

si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \varepsilon|a_n|,$$

si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left\|\frac{1}{a_n}u_n - 0_E\right\| \leq \varepsilon,$$

si, et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}u_n = 0_E.$$

On peut alors comparer les suites à valeurs dans E entre elles :

Définition 20. Domination, négligeabilité et équivalence

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E .

- On dit que u est **dominée** par v en $+\infty$ et on note $u = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v)$ ou $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(v_n)$ si :

$$u_n = O(\|v_n\|).$$

- On dit que u est **négligeable** devant v en $+\infty$ et on note $u = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v)$ ou $u_n =$

$\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$ si :

$$u_n = o(\|v_n\|).$$

— On dit que u **équiva**ut à v en $+\infty$ et on note $u \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ si :

$$u_n - v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\|v_n\|).$$

Remarque 15.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence entre les suites à valeurs dans E . On pourra donc employer la terminologie : " u et v sont équivalentes en $+\infty$ " si la suite u équiva

Exercice 18.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E . On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0_E$.

Montrer que si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} = 1.$$

Correction.

On a suppose $u_n \sim v_n$. Alors $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|u_n - v_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|.$$

Soit $n \geq N$. Alors,

$$\left| \frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} - 1 \right| = \frac{1}{\|v_n\|} \| \|u_n\| - \|v_n\| \| \leq \frac{1}{\|v_n\|} \|u_n - v_n\| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|}{\|v_n\|} = 1$.

3. Suites extraites et valeurs d'adhérence

On emploie ici la même terminologie que pour les suites à valeurs réelles ou complexes :

Définition 21. Suite extraite / sous-suite

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite u , la suite

$$(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Remarque 16.

La fonction φ - la *fonction extractrice* - est souvent notée de la façon suivante : pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k := \varphi(k)$. Ainsi, on désignera souvent par $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u .

Exercice 19.

1. Montrer que si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
2. Soit u une suite à valeurs dans E et v une sous-suite de u . Montrer que si w est une sous-suite de v , alors w est une sous-suite de u .

Correction.

1. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ car φ est strictement croissante et à valeurs entières. On prouve alors le résultat en raisonnant par récurrence sur $\mathbb{N}$ et en utilisant cette remarque.
2. Il suffit de remarquer que la composition de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.

Proposition 20.

Soit u une suite à valeurs dans E et $\ell \in E$.

La suite u converge vers ℓ si, et seulement si, **toute** sous-suite de u converge vers ℓ .

Démonstration.

Comme u est en particulier une sous-suite de u (la fonction extractrice est donnée par l'identité sur $\mathbb{N}$), si toute sous-suite de u converge vers ℓ , alors u converge vers ℓ . Montrons la réciproque.

On suppose que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$. Soit $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u . Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, donc pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq N$ d'où :

$$\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que v converge vers ℓ . □

Définition 22. Valeur d'adhérence

Soit u une suite à valeurs dans E et $x \in E$.

On dit que x est une **valeur d'adhérence** de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers x .

Exemple 13.

- Les nombres 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $u = \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) (-1)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- le nombre complexe i est une valeur d'adhérence de la suite $v = (e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 20.

1. Pour les exemples précédents, déterminer des sous-suites qui convergent vers les valeurs d'adhérence.
2. Quelles sont les autres valeurs d'adhérence de la suite v de l'exemple précédent.

Correction.

- $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 . $(v_{2+8n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers i (elle est même constante en i).
- Les valeurs d'adhérence de v sont exactement les valeurs de v_n pour $n = 0, 1, \dots, 7$.

Proposition 21.

Soit u une suite à valeurs dans E . Si u converge, alors u possède une unique valeur d'adhérence.

Démonstration.

D'après la proposition 20, si u converge vers ℓ , toutes les sous-suites de u convergent également vers ℓ . Donc ℓ est une valeur d'adhérence de u et c'est la seule par unicité de la limite. $\square$

Remarque 17.

- La contraposée de la proposition précédente nous donne une manière de prouver qu'une suite est divergente, c'est-à-dire :
Si u possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors u diverge.
- Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! Il existe des suites divergentes qui ne possèdent qu'une seule valeur d'adhérence, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 21.

On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n(1 + (-1)^n))_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que u possède une unique valeur d'adhérence. En déduire que la réciproque de la proposition 21 est fausse.

Correction.

La sous-suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante en 0 et donc a pour limite 0. Par suite, 0 est une valeur d'adhérence de u . Montrons que c'est la seule.

Soit $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de u . Si φ prend une infinité de valeurs impaires alors 0 est une valeur d'adhérence de v , donc quitte à passer à une sous-suite de v , on peut supposer que $\varphi(\mathbb{N}) \cap 2\mathbb{N} + 1$ est fini.

Par suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\varphi(n)$ est pair ; donc

$$v_n = u_{\varphi(n)} = 2\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Donc 0 est bien la seule valeur d'adhérence de u .

De plus, u ne converge pas : en effet, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Par suite, la réciproque de la proposition 21 est fausse.

La caractérisation suivante est très utile, via son corollaire, pour montrer qu'une suite ne possède pas de valeur d'adhérence.

Proposition 22. *Caractérisation des valeurs d'adhérence*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $x \in E$.

L'élément x est une valeur d'adhérence de u si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose que x est une valeur d'adhérence de u . Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de u qui converge vers x , i.e.

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|u_{\varphi(n)} - x\| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $k \geq n_0$, $\|u_{\varphi(k)} - x\| \leq \varepsilon$.

Considérons l'entier $n = \varphi(\max(N, n_0))$. Alors $n \geq \varphi(N) \geq N$ et $n \geq \varphi(n_0) \geq n_0$. Par suite, $n \geq N$ et $n \geq n_0$ donc :

$$\|u_n - x\| = \|u_{\varphi(\max(N, n_0))} - x\| \leq \varepsilon.$$

- ($\Leftarrow$). On suppose

$$\forall \varepsilon, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - x\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

On construit, par récurrence sur $\mathbb{N}$, une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Initialisation : D'après (*), pour $\varepsilon = 1 = \frac{1}{2^0}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_{n_0} - x\| \leq \frac{1}{2^0}$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $n_0 < \dots < n_k$ des entiers tels que $\|u_{n_k} - x\| \leq \frac{1}{2^k}$.

D'après (*), pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ et $N = n_k$, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$\|u_{n_{k+1}} - x\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Il en résulte que la sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x . □

Corollaire 4.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E .

S'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous entiers $n, m \geq N$ avec $n \neq m$, $\|u_n - u_m\| > \varepsilon$, alors u ne possède pas de valeur d'adhérence.

Démonstration.

Raisonnons par contraposée. On suppose que u possède une valeur d'adhérence, disons $x \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme x est une valeur d'adhérence de u , d'après la proposition précédente, il existe un entier $n \geq N$, $\|u_n - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

En appliquant de nouveau le corollaire précédent pour ε et $n + 1$ à la place de N , on obtient l'existence d'un entier $m \geq n + 1 \geq N$ et donc différent de n tel que $\|u_m - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par suite, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|u_n - u_m\| \leq \|u_n - x\| + \|x - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, par contraposée, on a montré l'assertion voulue. □

Exemple 14.

On considère $E = \mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme canonique. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ne possède pas de valeur d'adhérence.

Pour tous entiers n, m avec $n \neq m$, on a, pour $p = \min(n, m)$ et $q = \max(n, m)$:

$$(f_n - f_m)(x) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } x \in [-q, -p[\cup]p, q] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, comme $p \neq q$, on a :

$$\|f_n - f_m\|_\infty = 1.$$

Par suite, d'après le corollaire précédent, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence.

Exercice 22.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$. Déterminer deux normes sur E et une suite à valeurs dans E telle que cette suite converge pour la première norme et ne possède pas de valeur d'adhérence pour la seconde.

Correction.

Prenons par exemple la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E .

— Pour la norme $\mathcal{N}_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_1(X^n - 0) = \mathcal{N}_1(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour $\mathcal{N}_1$.

— Pour la norme $\|\cdot\|_\infty : P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$, on a, pour tous entiers n, m avec $n \neq m$:

$$\|X^n - X^m\|_\infty = 1,$$

donc $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. Suites et adhérence d'une partie

Dans ce paragraphe, A désigne un sous-ensemble de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

On va définir ici les points "qui collent" (à distance nulle!) à une partie d'un espace vectoriel normé. On introduit ainsi la notion de points adhérents et d'adhérence d'une partie, notamment en vue de la notion de limite d'une application que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Nous reparlerons plus longuement de l'adhérence dans le chapitre consacré à la topologie.

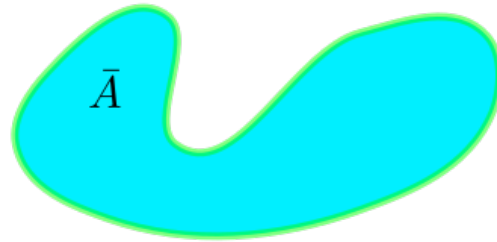
a. Définitions et premières propriétés

Définition 23. *Point adhérent et adhérence d'une partie*

Soit $x \in E$. On dit que x est un **point adhérent** à A si, pour tout réel $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de A l'ensemble noté $\overline{A}$ des points adhérents à A .



Remarque 18.

Attention de ne pas confondre avec la notation $\bar{A}$ vue en probabilité pour le complémentaire, il n'y a aucun rapport !

Ne pas confondre non plus avec la notation $\bar{R}$ vue en Sup' pour la droite réelle achevée même si, dans ce cas, il y a tout de même un rapport, mais qui dépasse la définition de l'adhérence dans notre cadre des espaces vectoriels normés.

Proposition 23.

- On a $A \subset \bar{A}$.
- Soit $B \subset E$. Si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Démonstration.

- Toute boule ouverte de rayon strictement positif centrée en $x \in E$ contient x donc $A \subset \bar{A}$.
- On suppose $A \subset B$. Pour tout $x \in \bar{A}$, on a :

$$B(x, r) \cap B \supset B(x, r) \cap A \neq \emptyset,$$

donc $x \in \bar{B}$.
Ainsi, $\bar{A} \subset \bar{B}$.

□

Question 5.

La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ?

Réponse.

Non ! Si on s'en convainc en reprenant le dessin initial et en changeant les "morceaux de bord" d'endroit sur A .

Proposition 24.

Soit $A \subset E$ une partie non vide et $x \in E$. On a :

$$x \in \overline{A} \text{ si, et seulement si, } d(x, A) = 0.$$

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose $x \in \overline{A}$.
Alors, pour tout réel $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Par suite, pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) \leq d(x, a) < r$. Donc $d(x, A) = 0$.
- $(\Leftarrow)$. On suppose $d(x, A) = 0$.
Alors, pour tout réel $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < r$. Donc $a \in B(x, r) \cap A$. D'où $B(x, r) \cap A$ non vide. Par suite $x \in \overline{A}$.

□

Pour l'instant, on se contente des exemples suivants, nous en verrons de plus élaborés dans le chapitre sur la topologie.

Exemple 15.

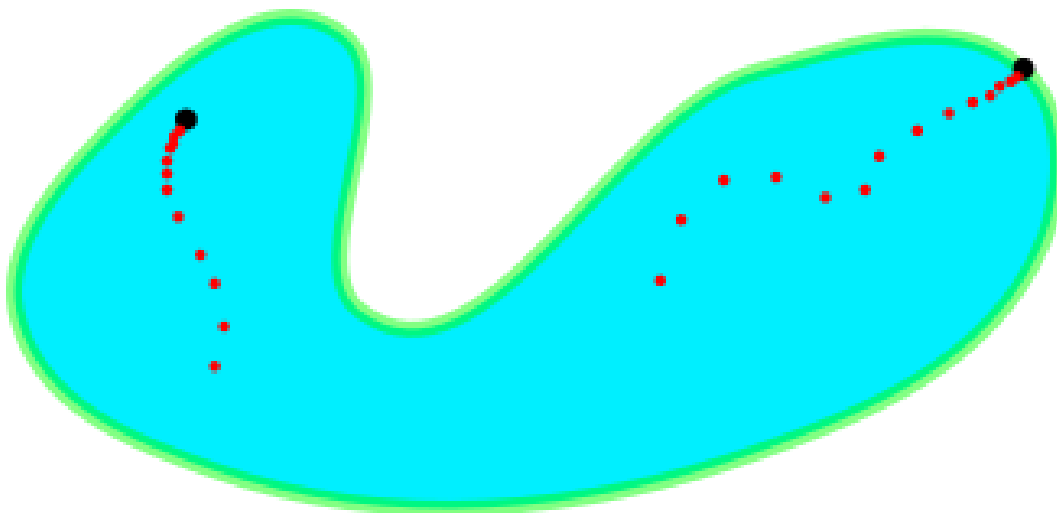
- On a $\overline{E} = E$ et $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- On se place dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On a $\overline{]a, b[} = [a, b]$.
Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\overline{I}$ est l'intervalle fermé de même bornes que I .

- Par définition, $\overline{E}$ est un sous-ensemble de E et d'après la proposition 23, $E \subset \overline{E}$ donc $\overline{E} = E$.
Ainsi, en passant au complémentaire, on a bien $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- On a $]a, b[\subset \overline{]a, b[}$. De plus, pour tout $r > 0$, on a $B(a, r) \cap]a, b[=]a - r, a + r[\cap]a, b[=]a, \min(a + r, b)[\neq \emptyset$ et de même $B(b, r) \cap]a, b[\neq \emptyset$ d'où $a, b \in \overline{]a, b[}$. Ainsi, $[a, b] \subset \overline{]a, b[}$.
De plus, pour tout $x \notin [a, b]$, on a $d(x, [a, b]) = \min(|x - a|, |x - b|) > 0$ donc, d'après la proposition 24, $x \notin \overline{]a, b[}$.
Il en résulte que $\overline{]a, b[} = [a, b]$.
On raisonne de manière similaire pour un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

b. Caractérisation séquentielle des points adhérents.**Théorème 1.** Caractérisation séquentielle des points adhérents

Soit $A \subset E$ et $x \in E$.

L'élément x appartient à $\overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x .



Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose $x \in \overline{A}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

$$a_n \in B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A.$$

On a donc construit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers x ; en effet, on a :

$$\|a_n - x\| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- ($\Leftarrow$). On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers x . Soit $r > 0$. Montrons que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|a_N - x\| < r.$$

Par suite, a_N appartient à $B(x, r) \cap A$, d'où $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout réel $r > 0$, on a donc $x \in \overline{A}$.

□

Exemple 16.

L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrons que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

— F est non vide. En effet $0_E \in F \subset \overline{F}$.

— Soit $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On cherche à montrer que $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$.

Comme x, y sont des points adhérents à F , d'après d'après la caractérisation séquentielle des points adhérents (Théorème 1), il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans F tels que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

Par suite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + \mu y_n \in F$, et

$$\|\lambda x_n + \mu y_n - (\lambda x + \mu y)\| = \|\lambda(x_n - x) + \mu(y_n - y)\| \leq |\lambda| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + |\mu| \underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans F converge vers $\lambda x + \mu y$. D'après d'après la caractérisation séquentielle des points adhérents (Théorème 1), $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. Il en résulte que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 25.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A et $x \in E$. Si x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $x \in \overline{A}$.

En particulier, la limite d'une suite convergente à valeurs dans A appartient à l'adhérence de A .

Démonstration.

On suppose que x est une valeur d'adhérence de $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de u qui converge vers x . Comme u est à valeurs dans A , la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans A , donc, d'après la caractérisation séquentielle des points adhérents (Théorème 1), x appartient à $\overline{A}$. $\square$

Partie C

Comparaison de normes

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a discuté tout au long des parties précédentes, de propriétés d'ensembles ou de convergence de suites, qui ne sont pas en général invariantes par changement de norme dans notre espace E . Par exemple, on a vu que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C([0, 1], \mathbb{R})$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$, est convergente pour la norme de la convergence en moyenne mais pas pour la norme de la convergence uniforme.

On peut alors légitimement se demander quelles conditions sur deux normes N_1 et N_2 sur E données pourraient nous permettre d'assurer que, si une certaine propriété est vraie pour N_1 , alors elle l'est également pour N_2 .

Voici tout l'enjeu de la partie "Comparaison de normes".

1. Domination de normes

a. Définition et propriétés

Définition 24.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . On dit que N_1 est **dominée** par N_2 s'il existe un réel $C > 0$ tel que $N_1 \leq C.N_2$ i.e. pour tout $x \in E$:

$$N_1(x) \leq C N_2(x).$$

Dans ce cas, on dira également que la norme N_2 est **plus fine** que N_1 .

Exemple 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, la norme infinie est dominée par la norme un et la norme un est dominée par la norme deux.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

— On a, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$, donc :

$$\|x\|_\infty = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_j|) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

D'où la norme un domine la norme infinie.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$ i.e. pour $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $(a | b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Alors on a, en notant $x' = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 = (x' | \mathbf{1}).$$

Ainsi, la norme deux étant alors la norme associée au produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, on obtient, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x\|_1 = (x' | \mathbf{1}) \leq \|x'\|_2 \cdot \|\mathbf{1}\|_2.$$

Or, on a :

$$\|x'\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|x_i|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|_2 \text{ et,}$$

$$\|\mathbf{1}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |1|^2} = \sqrt{n}.$$

Par suite :

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Il en résulte que la norme deux domine la norme un.

Proposition 26.

La relation de domination entre normes de E est un préordre i.e. une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des normes de E .

Démonstration.

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sur E et on note $\preccurlyeq$ la relation $N_1 \preccurlyeq N_2 \Leftrightarrow N_1$ est dominée par N_2 , pour $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$.

Soit $N_1, N_2, N_3 \in \mathcal{N}$.

- Reflexivité : On a bien $N_1 \preccurlyeq N_1$ car $N_1 \leq 1.N_1$.
- Transitivité : On suppose $N_1 \preccurlyeq N_2$ et $N_2 \preccurlyeq N_3$. Alors il existe des réels C_1, C_2 strictement positifs tels que $N_1 \leq C_1 N_2$ et $N_2 \leq C_2 N_3$. Par suite, on a $N_1 \leq (C_1.C_2)N_3$ avec $C_1.C_2 > 0$ donc $N_1 \preccurlyeq N_3$.

□

Question 6.

La relation de domination entre normes de E est-elle une relation d'ordre sur l'ensemble des normes de E ?

Réponse.

Non... sinon on l'aurait dit dans la proposition précédente !

Plus rigoureusement, lorsque E n'est pas réduit à $\{0_E\}$, c'est bien-sûr l'antisymétrie qui fait défaut à cette relation. En effet, si N est une norme sur E , d'après la proposition 12, $N' = 2N$ est une norme sur E et on a :

$$N \leq 1.N' \leq 33.N,$$

donc $N \preceq N'$ et $N' \preceq N$. Or, pour $x \neq 0_E$, comme $N(x) \neq 0$ par contraposée de la séparation, on a $N(x) \neq 2N(x) = N'(x)$ d'où $N \neq N'$.

Ainsi, la relation de domination n'est pas antisymétrique et n'est donc pas une relation d'ordre.

Proposition 27.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . N_1 est dominée par N_2 , si, et seulement si, il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1$ implique $N_1(x) \leq C$.

Autrement dit, N_1 est dominée par N_2 , si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que la boule unité fermée pour la norme N_2 est incluse dans la boule fermée pour la norme N_1 de centre 0_E et de rayon C .

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose N_1 dominée par N_2 . Alors il existe un réel $C > 0$ tel que $N_1 \leq C.N_2$. Soit $x \in B^{N_2}(0_E, 1)$. Ainsi, $N_2(x) \leq 1$ et donc :

$$N_1(x - 0_E) = N_1(x) \leq C N_2(x) \leq C.$$

D'où $x \in B^{N_1}(0_E, C)$.

Par suite, $B^{N_2}(0_E, 1) \subset B^{N_1}(0_E, C)$.

- $(\Leftarrow)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1$ implique $N_1(x) \leq C$. Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors $N_1(x) = 0 \leq 0 = C N_2(x)$. On suppose $x \neq 0_E$. Alors $u = \frac{1}{N_2(x)}x$ vérifie $N_2(u) = 1 \leq 1$ donc, par hypothèse,

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} = N_1(u) \leq C.$$

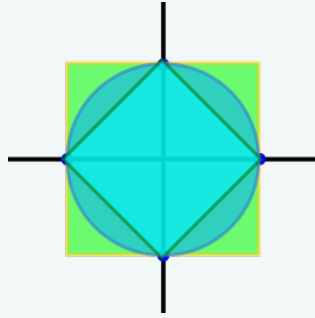
D'où le résultat. □

Exemple 18.

Sur $\mathbb{R}^2$, en examinant les boules unités des normes un, deux et infini, on peut, dans un premier temps, remarquer les relations suivantes :

la norme un est plus fine que la norme deux qui est plus fine que la norme infinie, i.e.

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1.$$



Exercice 23.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que, sur $C([a, b], \mathbb{R})$:

1. les normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sont dominées par la norme de la convergence uniforme ;
2. la norme de la convergence en moyenne est dominée par la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Correction.

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.

1. On a :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a)\|f\|_\infty,$$

et de même,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2 dt} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

Donc les normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sont dominées par la norme de la convergence uniforme.

2. On considère le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $C([a, b], \mathbb{R})$, dont $\|\cdot\|_2$ est la norme associée ; les fonctions $\mathbf{1}$ constante en 1 sur $[a, b]$ et $|f| : t \mapsto |f(t)|$ qui sont bien toutes deux des éléments de $C([a, b], \mathbb{R})$. On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_1 = \langle \mathbf{1}, |f| \rangle \leq \|\mathbf{1}\|_2 \cdot \| |f| \|_2 = \sqrt{b-a}\|f\|_2.$$

Donc la norme de la convergence en moyenne est dominée par la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Pour comprendre la terminologie de "finesse" précédente qui pourrait sembler paradoxale au premier abord, il faut étudier les conséquences de la domination en termes de boules pour chaque norme :

Proposition 28.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . Si N_1 est dominée par N_2 , alors toute boule fermée pour N_1 contient une boule fermée pour N_2 .

Démonstration.

On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $N_1 \leq C.N_2$. Alors, pour tous $x \in E$ et $r > 0$,

$$B_f^{N_2}(x, \frac{r}{C}) \subset B_f^{N_1}(x, r).$$

En effet, si $y \in B_f^{N_2}(x, \frac{r}{C})$, alors

$$N_1(y) \leq C N_2(y) \leq C \frac{r}{C} = r.$$

□

Remarque 19.

On peut remplacer les mentions "boule fermée" dans la proposition précédente par "boule ouverte" et même seulement l'une des deux.

En ce qui concerne les notions d'ensemble ou d'application bornée et de convergence de suites, la norme dominante les transmet à la norme dominée :

Proposition 29.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . Si N_1 est dominée par N_2 , alors une partie bornée pour N_2 est une partie bornée pour N_1 .

Démonstration.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq C N_2$. Soit B une partie bornée pour N_2 . Alors il existe $R \geq 0$ tel que pour tout $x \in B$, $N_2(x) \leq R$. Ainsi, pour tout $x \in B$,

$$N_1(x) \leq C N_2(x) \leq C R.$$

Donc B est bornée.

□

Corollaire 5.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . On suppose N_1 dominée par N_2 .

- Toute application d'un ensemble X dans E bornée pour la norme N_2 , est bornée pour la norme N_1 .
- Toute suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_2 est bornée pour la norme N_1 .

Démonstration.

On suppose N_1 dominée par N_2 .

- Soit $f : X \rightarrow E$. Une application bornée pour N_2 . Alors $f(X)$ est une partie de E bornée pour N_2 . Par suite, d'après la proposition précédente, $f(X)$ est bornée pour N_1 . Il en résulte que f est une application bornée pour N_1 .
- On applique le point précédent en voyant une suite à valeurs dans E comme une application de $\mathbb{N}$ dans E .

□

Proposition 30.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . On suppose N_1 dominée par N_2 . Si une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_2 , alors elle converge vers ℓ pour la norme N_1 .

Démonstration.

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$. Soit (u_n) une suite à valeurs dans E . On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_2 . Par suite,

$$N_1(u_n - \ell) \leq CN_2(u_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, (u_n) converge vers ℓ pour N_1 .

□

Remarque 20.

Ainsi, pour montrer qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2 , il suffit d'exhiber une suite qui converge pour N_2 mais pas pour N_1 . On verra dans la suite une méthode plus systématique pour démonstration la non-dominance d'une norme par une autre.

Exercice 24.

Montrer que dans $C([0, 1], \mathbb{R})$, la norme de la convergence uniforme n'est pas dominée par la norme de la convergence en moyenne.

Correction.

On reprend la suite de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ qui converge vers $\mathbf{0}$ pour la norme de la convergence en moyenne, et qui ne converge pas vers $\mathbf{0}$ pour la norme de la convergence uniforme (c'est même plus fort : elle diverge pour la norme de la convergence uniforme). Par suite, d'après la contraposée de la proposition précédente, la norme de la convergence uniforme n'est pas dominée par la norme de la convergence en moyenne.

b. Caractérisation de la non-dominance

Proposition 31.

Soit N_1, N_2 des normes sur E .

La norme N_1 est dominée N_2 si, et seulement si, la fonction

$$x \mapsto \frac{N_1(x)}{N_2(x)}$$

est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

Démonstration.

Par la contraposée de l'axiome de séparation pour N_2 , pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, $N_2(x) \neq 0$ donc l'application $x \mapsto \frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ est bien définie sur $E \setminus \{0_E\}$.

($\Rightarrow$) On suppose N_1 dominée par N_2 . Alors il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $N_1 \leq C.N_2$.

On a ainsi, par hypothèse et par positivité de N_1 et N_2 , pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$0 \leq \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq C.$$

Par suite, $x \mapsto \frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons $x \mapsto \frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ bornée sur $E \setminus \{0_E\}$. Alors, il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\frac{N_1(x)}{N_2(x)} = \left| \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \right| \leq C.$$

Par suite, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$N_1(x) \leq C N_2(x).$$

De plus, pour $x = 0_E$, par séparation, on a $N_1(x) = 0 = C.N_2(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $N_1(x) \leq C N_2(x)$, d'où N_1 est dominée par N_2 . □

La négation de la proposition suivante peut-être vue comme la méthode usuelle pour montrer qu'une norme n'en domine pas une autre.

Proposition 32. Non-domination

Soit N_1, N_2 des normes sur E .

La norme N_1 n'est pas dominée par la norme N_2 si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Démonstration.

Remarque : on peut voir qu'il s'agit simplement de la négation de l'équivalence énoncée par la proposition 29, mais nous explicitons tout de même la démonstration qui n'est pas dénuée d'intérêt (surtout la démonstration de l'implication directe ici).

($\Rightarrow$) On suppose que N_1 n'est pas dominée par N_2 . Alors pour tout $C > 0$, il existe $x \in E$ tel que $N_1(x) > C.N_2(x)$; on remarque alors que cela implique que $x \neq 0_E$ car $N_1(x) \neq 0$ du fait que $N_1(x) > C.N_2(x) \geq 0$ par positivité de N_2 et de C .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $C_n = e^n > 0$. Alors, par hypothèse, il existe $x_n \in E \setminus \{0_E\}$ tel que :

$$N_1(x) > C_n.N_2(x) = e^n N_2(x),$$

or, $x_n \neq 0_E$ donc $N_2(x_n) \neq 0$ d'où :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \geq e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

($\Leftarrow$) S'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

alors la fonction $x \mapsto \frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ n'est pas bornée, donc, d'après la Proposition 31, N_1 n'est pas dominée par N_2 . □

Exemple 19.

Sur $\mathbb{K}[X]$, la norme $\|\cdot\|_\infty : P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n X^k \mapsto \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\| : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt$ et ne la domine pas non plus.

- On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $P_n = X^n$. On a :

$$\frac{\|P_n\|_\infty}{\|P_n\|} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où $\|\cdot\|$ ne domine pas $\|\cdot\|_\infty$.

- On considère la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $Q_n = \sum_{k=0}^n X^k$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|Q_n\| = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n t^k \right) dt = \sum_{k=0}^n \left(\int_0^1 t^k dt \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, comme la série hamrmonique, qui est à termes positifs, diverge, on a :

$$\frac{\|Q_n\|}{\|Q_n\|_\infty} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

d'où $\|\cdot\|$ n'est pas dominée pas $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 25.

Montrer que, sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, la norme de la convergence en moyenne quadratique n'est pas dominée par la norme de la convergence en moyenne.

Correction.

On considère notre suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "préférée" à valeurs dans $C([0, 1], \mathbb{R})$: la suite de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\star \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$\star \|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}.$$

Par suite, on obtient :

$$\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_2$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_1$.

2. Normes équivalentes**a. Définition****Définition 25.** *Normes équivalentes*

Soit N_1, N_2 des normes sur E . On dit que N_1 est équivalente à N_2 s'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

Proposition 33.

Soit N_1, N_2 des normes sur E . N_1 est équivalente à N_2 si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 .

Démonstration.

N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 ;

si, et seulement si

$$\exists K > 0, \forall x \in E, \quad N_1(x) \leq KN_2(x) \quad \text{et} \quad \exists C > 0, \forall x \in E, \quad N_2(x) \leq CN_1(x);$$

si, et seulement si

$$\exists K, C > 0, \forall x \in E, \quad \frac{1}{K}N_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x);$$

si, et seulement si (ici $c = 1/K$)

$$\exists c, C > 0, \forall x \in E, \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

□

Proposition 34.

La relation d'équivalence entre normes de E est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E .

Démonstration.

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes sur E et on note $\sim$ la relation $N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_1$ est dominée par N_2 , pour $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$.

Soit $N_1, N_2, N_3 \in \mathcal{N}$.

- Reflexivité : On a bien $N_1 \sim N_1$ car $1.N_1 \leq N_1 \leq 1.N_1$.
- Symétrie : On suppose $N_1 \sim N_2$. Ainsi, d'après la proposition 33, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1 d'où N_2 est dominée par N_1 et N_1 est dominée par N_2 et ainsi, toujours d'après la proposition 33, $N_2 \sim N_1$.
- Transitivité : On suppose $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Alors il existe des réels c_1, c_2, C_1, C_2 strictement positifs tels que $c_1.N_1 \leq N_2 \leq C_1.N_1$ et $c_2.N_2 \leq N_3 \leq C_2.N_2$. Par suite, on a $(c_1.c_2)N_1 \leq N_3 \leq (C_1.C_2)N_1$ avec $c_1.c_2 > 0$ et $C_1.C_2 > 0$ donc $N_1 \sim N_3$.

□

Remarque 21.

- Puisqu'il s'agit d'une relation d'équivalence, on pourra dire désormais " N_1 et N_2 sont équivalentes" pour " N_1 est équivalente à N_2 ".
- On pouvait directement conclure qu'"être équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E grâce à la proposition 26 : en effet, si $\preccurlyeq$ est un préordre sur un ensemble X , alors la relation $\sim$ sur X définie, pour $x, y \in X$, par $x \sim y \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x)$ est une relation d'équivalence sur X .

Exemple 20.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, les normes un, deux et infinie sont équivalentes.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

- La fonction carrée étant croissante, elle préserve l'ordre et ainsi, on a :

$$\|x\|_\infty^2 = (\max(|x_1|, \dots, |x_n|))^2 = \max(|x_1|^2, \dots, |x_n|^2) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

— On a :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i x_j|}_{\geq 0},$$

donc

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \|x\|_1^2.$$

— On a :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} \leq n \|x\|_\infty.$$

On obtient alors :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Par suite, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. De plus, comme "être équivalentes" est une relation d'équivalence, par transitivité, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. D'où l'équivalence des normes un, deux et infinie.

b. Non-équivalence

Proposition 35. Normes non équivalentes

Soit N_1, N_2 des normes sur E .

Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ ou } +\infty.$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) On suppose que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. Alors N_1 n'est pas dominée par N_2 ou N_2 n'est pas dominée par N_1 .

Si N_1 n'est pas dominée par N_2 , alors d'après la proposition 32, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Et N_2 n'est pas dominée par N_1 , alors d'après la proposition 32, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que $\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, on a : $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

($\Leftarrow$) S'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E \setminus \{0_E\}$ telle que :

$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ ou } +\infty.,$$

alors, dans le cas $+\infty$, d'après la proposition 32, N_1 n'est pas dominée par N_2 et donc N_1

et N_2 ne sont pas équivalentes et dans le cas 0, on a $\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après la proposition 32, N_2 n'est pas dominée par N_1 et donc N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. $\square$

Exemple 21.

Sur $C([0, 1], \mathbb{K})$, la norme de la convergence uniforme et la norme de la convergence en moyenne ne sont pas équivalentes.

On considère, une fois n'est pas coutume, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $C([0, 1], \mathbb{K})$ définie par $f_n : t \mapsto t^n$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par suite, la norme de la convergence uniforme et la norme de la convergence en moyenne ne sont pas équivalentes.

Exercice 26.

On considère les normes suivantes sur $\mathbb{K}[X]$, définies pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ par :

$$\begin{aligned} \|P\|_1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| & \|P\|_\infty &= \sup_{k \in \mathbb{N}} (|a_k|) \\ \|P\|_a &= \sup_{t \in [0,1]} (|P(t)|) & \|P\|_b &= \sup_{t \in [0,2]} (|P(t)|) \end{aligned}$$

Montrer que ces quatre normes sont deux à deux non équivalentes.

Correction.

Commençons par ce qu'on devrait toujours tester en premier, notre suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "préférée" à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$: la suite de terme général $P_n = X^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Nous verrons ce que cela nous donne avec cette suite, puis nous aviserons si celle-ci ne permet pas de conclure. Pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,n} X^k$ où, pour $k \in \mathbb{N}$, $\delta_{k,n}$ vaut 1 si $k = n$ et 0 sinon. Ainsi, on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

- ★ $\|P_n\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{k,n} = 1$;
- ★ $\|P_n\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} (\delta_{k,n}) = 1$;
- ★ $\|P_n\|_a = \sup_{t \in [0,1]} (t^n) = 1^n = 1$;
- ★ $\|P_n\|_b = \sup_{t \in [0,2]} (t^n) = 2^n$.

Par suite, on a, pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ ou $\|\cdot\|_a$:

$$\frac{\|P_n\|_b}{\|P_n\|} = \frac{2^n}{1} = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_b$ n'est équivalente à aucune des trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_a$.
Par contre, entre ces trois normes, on ne peut rien dire pour l'instant !

- Recherchons une nouvelle suite pour prouver la non-équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Intuitivement, comme la norme $\|\cdot\|_1$ est la somme des coefficients (en module) et la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne prend en compte que le plus grand coefficient (en module), on a l'idée de "fabriquer" une suite de polynômes qui ont de plus en plus de coefficients mais qui restent bornés (au global pour toute la suite) et donc plus simplement, qui sont tous égaux.

On pense alors naturellement à la suite de terme général $Q_n = \sum_{k=0}^n X^k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Voyons ce que cela donne : pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \star \|Q_n\|_1 &= \sum_{k=0}^n 1 = n+1; \\ \star \|Q_n\|_\infty &= \sup(\{1, 0\}) = 1; \\ \star \|Q_n\|_a &= \sup_{t \in [0,1]} (\sum_{k=0}^n t^k) = \sum_{k=0}^n 1^k = n+1. \end{aligned}$$

Par suite, on a, pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_a$:

$$\frac{\|Q_n\|_\infty}{\|Q_n\|} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_1$ ni à $\|\cdot\|_a$ (coup de chance pour cette dernière !). Mais cette dernière suite ne permet pas non plus de conclure pour la non-équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_a$.

- Recherchons donc une nouvelle suite pour prouver la non-équivalence de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_a$. Ici, on aimerait, pour notre suite de polynômes, que les sommes des coefficients (en module) augmentent pendant que les fonctions polynomiales associées restent bornées, au global, sur $[0, 1]$. L'idée est alors d'utiliser la formule du binôme de Newton : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0, 1]$, la fonction polynomiale associée à $(1 - X)^n$ a pour plus grande valeur 1 et son coefficient en module devant X est $\binom{n}{1} = n$. Parfait !

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = (1 - X)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} X^k$. Alors on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \star \|R_n\|_1 &= \sum_{k=0}^n \left| (-1)^k \binom{n}{k} \right| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n; \\ &\text{(on aurait également pu se satisfaire de } \|R_n\|_1 \geq \binom{n}{1} = n \text{ pour } n \geq 1 \text{ !)} \\ \star \|R_n\|_a &= \sup_{t \in [0,1]} ((1 - t)^n) = 1. \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$\frac{\|R_n\|_1}{\|R_n\|_a} = \frac{2^n}{1} = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_a$ ne sont pas équivalentes.

c. Propriétés invariantes par passage à une norme équivalente

Proposition 36. Conservation du caractère borné d'une partie

Soit N_1, N_2 deux normes sur E . On suppose N_1 et N_2 équivalentes.

Une partie est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2 .

Démonstration.

On applique la proposition 29 pour N_1 dominée par N_2 puis pour N_2 dominée par N_1 . $\square$

Corollaire 6.

Soit N_1, N_2 deux normes sur E . On suppose N_1 et N_2 équivalentes.

- Une application d'un ensemble X dans E est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, est bornée pour la norme N_2 .
- Une suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour la norme N_2 .

Proposition 37. Conservation de la convergence d'une suite

Soit N_1, N_2 des normes sur E . On suppose N_1 et N_2 équivalentes. Une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour la norme N_2 .

Démonstration.

On applique la proposition 30 pour N_1 dominée par N_2 puis pour N_2 dominée par N_1 . $\square$

d. Équivalence des normes en dimension finie

Le théorème suivant confirme l'intuition que l'on a pu se faire pour les normes sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Nous ne le démontrerons que dans un chapitre ultérieur, lorsque nous aurons étudié la notion d'ensemble compact. Même si nous reportons la démonstration à plus tard, nous utiliserons allègrement ce résultat dans la suite du cours !

Théorème 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque 22.

Du fait de l'équivalence des normes en dimension finie, on pourra, dans un espace vectoriel de dimension finie, parler de partie bornée ou de la nature d'une suite sans préciser la norme sous-jacente !

Théorème 3. Conséquences de l'équivalence des normes en dimension finie

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les notions suivantes sont indépendantes de la norme choisie sur cet espace :

- la convergence et la limite d'une suite à valeurs dans cet espace ;
- le caractère borné d'une partie de cet espace ;
- le caractère borné d'une fonction ou d'une suite à valeurs dans cet espace.

Démonstration.

D'après les propositions 37, 36 et 6, comme toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes ces notions sont indépendantes de la norme choisie sur cet espace. $\square$

Théorème 4.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose E est de dimension finie p . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $\ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i \in E$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans E pour n'importe quelle norme sur E si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_i dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Démonstration.

D'après la proposition 19, l'équivalence est valable si E est muni de la norme infinie $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{B}}$. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes ; ainsi, la convergence et la limite d'une suite étant invariantes par passage à une norme équivalente (Théorème 37), l'équivalence reste valable pour toute norme sur E . $\square$

E&P

Exercices et problèmes

Exercice 27.

On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E .

1. Pour $f \in E$, on pose :

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme sur E .

2. Pour $f \in E$, on pose :

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N' est une norme sur E .

3. Montrer que N et N' sont équivalentes.

4. Les normes N et N' sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Correction.

1. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) **(Positivité)** $N(f)$ positif comme somme de quantités positives.
ii) **(Séparation)** On suppose $N(f) = 0$. Alors $|f(0)| = 0 = \|f'\|_\infty$. Par suite, $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 0$. Donc f est constante en 0 i.e. est égale à la fonction nulle.

- iii) **(Homogénéité)** Par la linéarité de la dérivée et l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$N(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N(f).$$

- iv) **(Inégalité triangulaire)** Par la linéarité de la dérivée et l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$N(f+g) = |(f+g)(0)| + \|(f+g)'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$

2. Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) **(Positivité)** $N'(f)$ positif comme somme de quantités positives.
ii) **(Séparation)** On suppose $N'(f) = 0$. Alors, en particulier, $\|f\|_\infty = 0$. Par suite, d'après l'axiome de séparation pour $\|\cdot\|_\infty$, f est égale à la fonction nulle.
iii) **(Homogénéité)** Par la linéarité de la dérivée et l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$N'(\lambda f) = \|(\lambda f)\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N'(f).$$

- iv) **(Inégalité triangulaire)** Par la linéarité de la dérivée et l'inégalité triangulaire de $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$N'(f+g) = \|(f+g)\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N'(f) + N'(g).$$

3. On a tout d'abord,

$$N(f) = \underbrace{|f(0)|}_{\leq \|f\|_\infty} + \|f'\|_\infty \leq N'(f).$$

Puis, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t) dt| \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt = |f(0)| + x\|f'\|_\infty \leq N(f).$$

Donc, $\|f\|_\infty \leq N(f)$. Par suite,

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq N(f)} + \underbrace{\|f(0)\| + \|f'\|_\infty}_{= N(f)} \leq 2N(f).$$

Conclusion :

$$N \leq N' \leq 2N,$$

donc N et N' sont équivalentes.

4. Prenons notre suite préférée de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f'_n : t \mapsto nt^{n-1}$ et ainsi :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } N(f_n) = 0 + \|f'_n\|_\infty = n.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes. Et comme N' est équivalente à N , N' ne peut-être équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 28.

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction.

1. Le point "délicat" est la séparation : si $N_a(P) = 0$, alors $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$. Or, comme $|P'|$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, alors $P'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Alors P' est un polynôme qui possède une infinité de racine ; par suite $P' = 0$ et donc P est un polynôme constant. Or $P(a) = 0$, donc P est le polynôme nul.

2. Considérons notre suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ préférée avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$N_a(P_n) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} dt = a^n + 1 \text{ et, de même, } N_b(P_n) = b^n + 1.$$

Alors on a, comme $b > 1$:

$$N_b(P_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b^n \text{ et } N_a(P_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \\ 2 & \text{si } a = 1 \\ a^n & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient, comme $0 < \frac{b}{a} < 1$:

$$\frac{N_b(P_n)}{N_a(P_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} b^n & \text{si } a < 1 \\ \frac{b^n}{2} & \text{si } a = 1 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^n & \text{si } a > 1 \end{cases} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty.$$

Donc N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t) dt \leq \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Ainsi,

$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq N_a(P).$$

Il vient :

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq 2N_a(P).$$

On a, de la même façon :

$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq N_b(P)$$

et donc

$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$

Les deux normes sont bien équivalentes.

Problème 1. Portrait robot d'une norme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Portrait robot d'une norme sur E .

Dans ce problème, nous allons étudier ce qui fait l'essence géométrique d'une norme : nous allons voir tout d'abord que la connaissance de la boule unité (fermée ou ouverte) d'une norme permet de la déterminer totalement. Puis, fort de ce constat, nous établirons le portrait robot d'une boule unité ; nous répondrons à la question suivante : quelles sont les bonnes propriétés d'une

partie A de E qui permettent de fabriquer une norme dont A est *presque* la boule unité de cette norme? Par "*presque*", on entend "aux points de la sphère près" i.e. $B(0_E, 1) \subset A \subset B_f(0_E, 1)$. Dans la suite, ce "*presque*" aura toujours cette signification.

Nous aurons besoin des notations et définitions suivantes :

Soit $A, B \subset E$, $x \in E$, $I \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notations :

- On note $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
- On note $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Pour $\lambda = -1$, on note $-A = (-1)A$.
- On note $IA = \{ta \mid t \in I, a \in A\} \quad (= \bigcup_{t \in I} tA)$.
- On note $Ix = \{tx \mid t \in I\} \quad (= I\{x\})$.

Définitions :

- On dit que A est **symétrique** si $-A \subset A$.
- On dit que A est **équilibrée** si, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$ implique $\lambda A \subset A$.
- On dit que A est **absorbante** si, pour tout $x \in E$, il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq c$ implique $\lambda x \in A$.
- On dit (*on rappelle en fait !*) que A est **convexe** si, pour tout $t \in [0, 1]$, $tA + (1 - t)A \subset A$.

Dans tout le problème, A est une partie de E .

1. Échauffement utile avec les notations et définitions

1. Montrer que si A est équilibrée et non vide ou si A est absorbante, alors $0_E \in A$.
2. Montrer que si A est symétrique, alors $-A = A$.
3. On suppose A équilibrée.
 - (a) Montrer que A est symétrique.
 - (b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ avec $|\lambda| \leq 1$, $\lambda A = A$.
 - (c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda A = |\lambda|A$.
4. Montrer que si A est convexe et $0_E \in A$, alors $[0, 1]A \subset A$.

2. Normes et boules unité

5. Soit N_1, N_2 des normes sur E . Dans cette question, on notera en exposant les normes auxquelles sont associées les boules considérées.
Montrer que si $B^{N_1}(0_E, 1) = B^{N_2}(0_E, 1)$ ou si $B_f^{N_1}(0_E, 1) = B_f^{N_2}(0_E, 1)$ alors $N_1 = N_2$.

On a ainsi prouvé qu'une norme sur E est entièrement déterminée par sa boule unité ouverte (ou fermée).

Maintenant, on va étudier quatre propriétés nécessaires d'une boule unité :

6. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . On note $B = B(0_E, 1)$ la boule unité ouverte de $\|\cdot\|$.
 - (a) Montrer que B est une partie équilibrée de E .
 - (b) Montrer que B est une partie convexe de E .

- (c) Montrer que B est une partie absorbante de E .
- (d) Montrer que B ne contient pas de demi-droite ouverte issue de l'origine i.e. pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\mathbb{R}_+^* x \not\subset B$.

Dans la suite, on va alors montrer que ces propriétés sont suffisantes pour qu'une partie de E soit *presque* la boule unité d'une norme sur E .

3. Fonctionnelle de Minkowski / Jauge

Pour A une partie de E , on note j_A et on appelle **jauge** ou **fonctionnelle de Minkowski** de A l'application $j_A : E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ définie, pour $x \in E$, par :

$$j_A(x) = \inf(\{r > 0 \mid x \in rA\}) = \inf\left(\left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\right\}\right)$$

où on convient que $\inf(\emptyset) = +\infty$.

A. Exemples de jauges

7. *Exemple motivant.* On munit E d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer que, pour $A = B(0_E, 1)$, on a $j_A = \|\cdot\|$.
8. *Quelques calculs de jauges.* Expliciter la jauge de A dans les cas suivants :
 - (a) A un sous-espace vectoriel de E .
 - (b) $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$.
 - (c) $A = \{x \in E \mid |f(x)| \leq c\}$ où $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$.

B. Propriétés d'une jauge

On pourra adopter les règles suivantes : pour $c, t \in \mathbb{R}_+$ avec $t \neq 0$:

$$t \times +\infty = +\infty; \quad +\infty + c = +\infty = c + (+\infty); \quad +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

9. Montrer que si $0_E \in A$, alors $j_A(0_E) = 0$.
10. (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $j_A(-x) = j_{-A}(x)$.
 (b) En déduire que si A est symétrique, alors, pour tout $x \in E$, $j_A(-x) = j_A(x)$.
11. Montrer que si A est absorbante, alors j_A est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
12. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in E$, $j_A(tx) = tj_A(x)$.
13. Montrer que si A est équilibrée, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et tout $x \in E$, $j_A(\lambda x) = |\lambda|j_A(x)$.
14. Montrer que si A est convexe, alors j_A vérifie l'axiome de l'inégalité triangulaire i.e. pour tout $x, y \in E$, $j_A(x+y) \leq j_A(x) + j_A(y)$.
15. Soit $x \in E$.
 - (a) Montrer que si $j_A(x) = 0$, alors il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ qui tend vers $+\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n x \in A$.
 - (b) En déduire que si $j_A(x) = 0$, alors $\mathbb{R}_+^* x \subset]0, 1[A$.
 - (c) On suppose que A est un convexe qui contient 0_E . Montrer que si A ne contient pas $\mathbb{R}_+^* x$, alors $j_A(x) \neq 0$.

C. Quand la jauge devient une norme

Soit A est une partie absorbante, équilibrée, convexe de E et qui, de plus, ne contient pas de demi-droite ouverte issue de l'origine.

16. Montrer que j_A est une norme sur E .
17. On note B la boule unité ouverte de j_A (en tant que norme sur E) et B_f sa boule unité fermée. Montrer que $B \subset A \subset B_f$.

Correction.

1. Échauffement utile avec les notations et définitions

1. — Si A est équilibrée, alors, comme $|0| = 0 \leq 1$, $0A \subset A$. Or $0A \subset \{0_E\}$ et comme A est non vide, il existe $a_0 \in A$, d'où $0_E = 0a_0 \in 0A$. Par suite, $\{0_E\} = 0A \subset A$.
— On suppose A absorbante. Comme $0_E \in E$, alors il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout scalaire λ avec $|\lambda| \leq r$, $\lambda 0_E \in A$.
Ainsi, en particulier pour $\lambda = 0$, $0_E = 0.0_E = s.0_E \in A$.
2. On suppose A symétrique. Alors $-A \subset A$. Ainsi, pour tout $a \in A$, $-a \in A$ donc $a = -(-a) \in -A$. Par suite, $A \subset -A$ et donc $-A = A$.
3. On suppose A équilibrée.
 - (a) Comme $|-1| = 1 \leq 1$, on a $-A = (-1)A \subset A$ donc A est symétrique.
 - (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| = 1$. Comme A est équilibrée, $\frac{1}{\lambda}A \subset A$ car $|\frac{1}{\lambda}| = 1 \leq 1$. Ainsi, pour tout $a \in A$, $a = \lambda(\underbrace{\frac{1}{\lambda}a}_{\in A}) \in \lambda A$. D'où $A \subset \lambda A$ et comme $\lambda A \subset A$ par hypothèse, on en déduit $\lambda A = A$.
 - (c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On note $\mu = \frac{\lambda}{|\lambda|}$. Alors $|\mu| = 1$, donc, d'après la question précédente, $\frac{\lambda}{|\lambda|}A = \mu A = A$. Il en résulte que $\lambda A = |\lambda|A$.
4. On suppose A est convexe et $0_E \in A$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $a \in A$, on a $ta = ta + (1-t)0_E \in A$. Par suite, $[0, 1]A \subset A$.

2. Normes et boules/sphère unité

5. Soit N_1, N_2 des normes sur E . On suppose $B^{N_1}(0_E, 1) = B^{N_2}(0_E, 1)$. On a $N_1(0_E) = 0 = N_2(0_E)$. Soit $x \neq 0_E$ et $r \in]0, 1[$. On pose $y = \frac{r}{N_1(x)}x$ (bien défini par séparation pour N_1). Alors $N_1(y) = r < 1$, d'où $y \in B^{N_1}(0_E, r) = B^{N_2}(0_E, r)$ et donc $N_2(y) < 1$. Ainsi, comme $x = \frac{N_1(x)}{r}y$, on obtient, par homogénéité pour N_2 :

$$N_2(x) = N_2\left(\frac{N_1(x)}{r}y\right) = \frac{N_1(x)}{r} \underbrace{N_2(y)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{r}N_1(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $r \in]0, 1[$, on peut faire tendre r vers 1 dans l'inégalité précédente et on obtient :

$$N_2(x) \leq N_1(x).$$

On procède de même en échangeant N_1 et N_2 dans le raisonnement précédent pour trouver $N_1(x) \leq N_2(x)$. D'où $N_1(x) = N_2(x)$.

Par suite, $N_1 = N_2$.

La démonstration est similaire dans le cas $B_f^{N_1}(0_E, 1) = B_f^{N_2}(0_E, 1)$, on peut même prendre $r = 1$ directement !

6. On note $B = B(0_E, 1)$ la boule unité ouverte de $\|\cdot\|$.

(a) Soit $x \in B$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $|\lambda| \leq 1$, on a, par homogénéité :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \leq \|x\| < 1.$$

donc $\lambda x \in B$.

Par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| < 1$, $\lambda B \subset B$. D'où B est équilibrée.

(b) Soit $x, y \in B$ et $t \in [0, 1]$. On a, par inégalité triangulaire et homogénéité :

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| < t + (1-t) = 1.$$

D'où $tx + (1-t)y \in B$.

Par suite, B est convexe.

(c) Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, alors, pour $c = 1 > 0$, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq c$, $\lambda x = \lambda \cdot 0_E = 0_E \in B$.

On suppose $x \neq 0_E$. On pose $c = \frac{1}{2\|x\|} > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq c$, on a, par homogénéité :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq c \|x\| = \frac{1}{2} < 1.$$

Il en résulte que B est absorbante.

(d) Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On pose $r = \|x\| > 0$. Alors, pour $t = \frac{2}{r} > 0$, on a $\|tx\| = 2$ donc $tx \notin B$. Ainsi, on a $\mathbb{R}_+^* x \not\subset B$.

Il en résulte que B ne contient pas de demi-droite ouverte issue de l'origine.

3. Fonctionnelle de Minkowski / Jauge

A. Exemples de jauges

7. *Exemple motivant.* Soit $x \in E$. Alors, pour $r > 0$, on a $\frac{1}{r}x \in A = B(0_E, 1)$ si, et seulement si, $\|\frac{1}{r}x\| < 1$ si, et seulement si, $\|x\| < r$ ie. $r \in]\|x\|, +\infty[$. Par suite, on a :

$$j_A(x) = \inf(]\|x\|, +\infty[) = r = \|x\|.$$

Ainsi, $j_A = \|\cdot\|$.

8. *Quelques calculs de jauges.*

(a) A une sous-espace vectoriel de E . Soit $x \in E$.

— Si $x \in A$, alors, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}x \in A$ car A est un sous-espace vectoriel de E , ainsi $\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\} =]0, +\infty[$. Dans, ce cas, on a alors $j_A(x) = \inf(]0, +\infty[) = 0$.

— Si $x \notin A$, alors, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}x \notin A$ car, A étant un sous-espace vectoriel, par l'absurde, si $\frac{1}{r}x \in A$ alors $x = r(\frac{1}{r}x) \in A$, contradiction ! Ainsi $\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\} = \emptyset$. Dans, ce cas, on a alors $j_A(x) = \inf(\emptyset) = +\infty$.

Ainsi, j_A est la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$

(b) $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$, alors, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}x \in]0, 1[$ si, et seulement si, $r > x$. Ainsi $j_A(x) = \inf(]x, +\infty[) = x$.
- Si $x \leq 0$, alors, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}x \leq 0$ donc $\frac{1}{r}x \notin A$. Ainsi, $j_A(x) = \inf(\emptyset) = +\infty$.

Ainsi, j_A est la fonction $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{si } x \in]-\infty, 0]. \end{cases}$

(c) $A = \{x \in E \mid |f(x)| \leq c\}$ où $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$.

On a, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}x \in A$ si, et seulement si, $|f(\frac{1}{r}x)| \leq c$ si, et seulement si, $r \geq \frac{|f(x)|}{c}$. Ainsi $j_A(x) = \inf\left(\left[\frac{|f(x)|}{c}, +\infty\right[\right) = \frac{|f(x)|}{c}$.

Ainsi, j_A est la fonction $x \mapsto \frac{|f(x)|}{c}$.

B. Propriétés d'une jauge

On pourra adopter les règles suivantes : pour $c, t \in \mathbb{R}_+$ avec $t \neq 0$:

$$t \times +\infty = +\infty; +\infty + c = +\infty = c + (+\infty); +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

9. On suppose $0_E \in A$. Alors :

$$\left\{r > 0 \mid \frac{1}{r}0_E \in A\right\} = \{r > 0 \mid 0_E \in A\} =]0, +\infty[.$$

Par suite, $j_A(0_E) = 0$.

10. (a) Soit $x \in E$. On a, comme A est symétrique, on a, pour tout $r > 0$, $\frac{1}{r}(-x) \in A$ si, et seulement si, $\frac{1}{r}x \in -A$, d'où :

$$j_A(-x) = \{r > 0 \mid \frac{1}{r}(-x) \in A\} = \{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in -A\} = j_{-A}(x).$$

(b) Si A est symétrique, on a $-A = A$ d'après la question 2, d'où, d'après la question précédente, $j_{-A} = j_A$.

11. On suppose A absorbante. Montrons que, pour tout $x \in E$, $j_A(x) \neq +\infty$ ce qui équivaut à $\{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\} \neq \emptyset$.

Soit $x \in E$. Comme A est absorbante, il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout scalaire λ avec $|\lambda| \leq c$, $\lambda x \in A$. Ainsi, pour $\lambda = c$, λ est un réel strictement positif et on a $\frac{1}{\lambda}x = \lambda x \in A$,

donc $\frac{1}{\lambda} \in \{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\}$ qui est donc non vide. D'où $j_A(x) \neq +\infty$.

Il en résulte que si A est absorbante, j_A est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

12. Soit $x \in E$ et un réel $t > 0$. On a, pour tout $r > 0$, comme $t \neq 0$:

$$\frac{1}{r}(tx) \in A \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{r}{t}}x \in A$$

Par suite, on obtient, comme t est positif :

$$\begin{aligned}
j_A(tx) &= \inf \left(\left\{ r > 0 \mid \frac{1}{r}(tx) \in A \right\} \right) \\
&= \inf \left(\left\{ r > 0 \mid \frac{1}{\frac{r}{t}}x \in A \right\} \right) \\
&= \inf \left(\left\{ t\frac{r}{t} > 0 \mid \frac{1}{\frac{r}{t}}x \in A \right\} \right) \\
&= \inf \left(\left\{ tr' > 0 \mid \frac{1}{r'}x \in A \right\} \right) \\
&= t \inf \left(\left\{ r' > 0 \mid \frac{1}{r'}x \in A \right\} \right) \\
j_A(tx) &= tj_A(x).
\end{aligned}$$

13. On suppose A équilibrée. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. D'après la question 3c, on a $\frac{1}{\lambda}A = \frac{1}{|\lambda|}A$, donc, pour tout $r > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}(\lambda x) \in A &\Leftrightarrow \frac{1}{r}x \in \frac{1}{\lambda}A \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{r}x \in \frac{1}{|\lambda|}A \\
\frac{1}{r}(\lambda x) \in A &\Leftrightarrow \frac{1}{r}(|\lambda|x) \in A.
\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question 12, on obtient, comme $|\lambda| > 0$:

$$j_A(\lambda x) = j_A(|\lambda|x) = |\lambda|j_A(x).$$

14. On suppose A convexe. Soit $x, y \in E$.

— Si $j_A(x) = +\infty$ ou $j_A(y) = +\infty$, alors $j_A(x+y) \leq +\infty = j_A(x) + j_A(y)$.

— On suppose $j_A(x), j_A(y) \in \mathbb{R}_+$.

Alors les ensembles $R_x = \{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\}$ et $R_y = \{r > 0 \mid \frac{1}{r}y \in A\}$ sont non vides.

Soit $\alpha \in R_x$ et $\beta \in R_y$. Alors $\frac{1}{\alpha}x \in A$ et $\frac{1}{\beta}y \in A$ donc, pour $t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in [0, 1]$, par convexité de A , on a :

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{1}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{\beta}y = t\left(\frac{1}{\alpha}x\right) + (1-t)\left(\frac{1}{\beta}y\right) \in A.$$

Par suite, $\alpha + \beta \in \{r > 0 \mid \frac{1}{r}(x+y) \in A\}$ et ainsi, $j_A(x+y) \leq \alpha + \beta$.

Par suite, ceci étant vrai pour tout $\alpha \in R_x$, $j_A(x+y) - \beta$ est un minorant de R_x , d'où $j_A(x+y) - \beta \leq j_A(x)$ et ainsi ceci étant vrai pour tout $\beta \in R_y$, $j_A(x+y) - j_A(x)$ est un minorant de R_y , d'où $j_A(x+y) - j_A(x) \leq j_A(y)$. Il en résulte que :

$$j_A(x+y) \leq j_A(x) + j_A(y).$$

15. Soit $x \in E$.

(a) On suppose $j_A(x) = 0$. Alors, par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

- $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^+ et
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{r_n}x \in A$.

Par suite, en posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1}{r_n}$, la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède les propriétés recherchées.

(b) On suppose $j_A(x) = 0$. D'après la question précédente, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

- $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n x \in A$.

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_{n_0} > c$ d'où, pour $t = \frac{c}{t_{n_0}} \in]0, 1[$:

$$cx = t \underbrace{(t_{n_0}x)}_{\in A} \in]0, 1[A.$$

Il en résulte que $\mathbb{R}_+^*x \subset]0, 1[A$.

(c) On suppose A convexe et contient 0_E . Alors, d'après la question 4, $]0, 1[A \subset [0, 1]A \subset A$.

Supposons de plus que A ne contient pas $\mathbb{R}_+^*x$. Alors, comme $\mathbb{R}_+^*x \not\subset A$ et $]0, 1[A \subset A$, on a $\mathbb{R}_+^*x \not\subset]0, 1[A$, d'où, par contraposée de la question précédente, $j_A(x) \neq 0$.

C. Quand la jauge devient une norme

Soit A est une partie absorbante, équilibrée, convexe de E et qui, de plus, ne contient pas de demi-droite ouverte issue de l'origine.

16. Remarquons tout d'abord que d'après la question 1, A contient 0_E .

Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

0) (**Bonne définition**) Comme A est absorbante, d'après la question 11, j_A est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (et donc ne prend pas la valeur $+\infty$ ce que ne tolère pas la définition de norme!).

i) (**Positivité**) Par définition, j_A est à valeurs positives (borne inférieure d'un ensemble de nombres positifs).

ii) (**Séparation**). Si $j_A(x) = 0$, alors, comme A est un convexe contenant 0_E , d'après la contraposée de la question 15c, $\mathbb{R}_+^*x \subset A$. Par hypothèse, pour tout $y \neq 0_E$, $\mathbb{R}_+^*y \not\subset A$, donc $x = 0_E$.

iii) (**Homogénéité**) Comme A est équilibrée, d'après la question 13, l'homogénéité est vérifiée si $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Reste à le vérifier pour $\lambda = 0$. On a $j_A(x) \in \mathbb{R}_+$ (d'après la "bonne définition"), donc, en utilisant la question 9 :

$$j_A(0x) = j_A(0_E) = 0 = 0 \cdot j_A(x).$$

(Remarque : on voit sur cette dernière égalité ($0 = 0 \cdot j_A(x)$) que l'hypothèse d'absorbance est cruciale pour éviter le $0 \times +\infty$ qui n'aurait pas permis d'avoir l'homogénéité malgré l'hypothèse d'équilibre !)

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$j_A(\lambda x) = |\lambda|j_A(x).$$

iv) (**Inégalité triangulaire**) Comme A est une partie convexe, d'après la question 14, l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Il en résulte que j_A est une norme sur E !

17. — Soit $x \in A$. Alors $\frac{1}{1}x = x \in A$ donc $1 \in \{r > 0 \mid \frac{1}{r}x \in A\}$. Par suite, $j_A(x) \leq 1$ i.e. $x \in B_f$.

Par suite, $A \subset B_f$.

— Soit $x \in B$. Alors $\rho = j_A(x) < 1$ et ainsi, par propriété de la borne inférieure, il existe $r \in [\rho, 1]$ tel que $\frac{1}{r}x \in A$ i.e. $x \in rA$. Or, comme $r \in [0, 1]$ et A est équilibrée (ou convexe et contenant 0_E , ça marche aussi), $rA \subset A$. D'où, $x \in A$.

Par suite, $B \subset A$.

On a donc $B \subset A \subset B_f$: A est *presque* la boule unité d'une norme!