

Corrigé de la feuille d'exercices n°20

Partie A

Théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes :

1. $\left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \right)$
2. $\left(\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \right)$
3. $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} dx \right)$
4. $\left(\int_0^1 f(t^n) dt \right)$, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Correction.

Dans chaque cas, on va appliquer le théorème de convergence dominée.

1. Pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $(\tan t)^n \rightarrow 0$ car $\tan t \in [0, 1[$. De plus, pour tout $t \in [0, \pi/4[$, on a $|\tan t| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est une fonction intégrable sur $]0, \pi/4[$. Toutes les fonctions invoquées étant continues par morceaux, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt = \int_0^{\pi/4} 0 dt = 0.$$

Remarquons que le fait que $((\tan(\pi/4))^n)$ ne tende pas vers 0 ne pose pas de problèmes. Il suffit d'avoir la convergence simple sur l'intervalle ouvert.

2. Remarquons que l'intégrale considérée converge pour $n \geq 2$ par comparaison à une intégrale de Riemann. Pour tout $t > 1$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$, on a

$$\left| \frac{1}{1+t^n} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction à droite de l'inégalité est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n} dt = 0.$$

Remarquons qu'on peut aussi très bien prouver ce fait sans utiliser le théorème de convergence dominée. En effet, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$ et $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$ pour trouver

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \leq \frac{1}{n-1}$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors $\frac{-x}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$ et par composition des limites $\exp(-x/n) \rightarrow \exp(0) = 1$ si $n \rightarrow +\infty$. On a donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, soit $x \in]0, +\infty[$ et $n \geq 1$. Alors $-x/n \leq 0$ et donc $\exp(-x/n) \leq 1$. Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x/n)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Pour tout $t \in [0, 1[$, (t^n) tend vers 0 et donc, par continuité de f , $(f(t^n))$ tend vers $f(0)$. L'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée est un peu plus subtile à obtenir, mais le raisonnement est très classique. On remarque que, puisque f est continue sur $[0, 1]$, elle y est bornée, disons par $M \geq 0$. Mais alors, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$|f(t^n)| \leq M$$

et M (qui est une constante) est intégrable sur l'intervalle borné $]0, 1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt = \int_0^1 f(0) dt = f(0).$$

Exercice 2.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \rightarrow e^x$ et que $|f_n(x)| \leq e^x$.
2. En déduire, pour $b > 1$, la limite de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx$.

Correction.

1. On a

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n}$ et donc, par composition des limites, $f_n(x) \rightarrow e^x$. De plus, pour $u > 0$, on a $\ln(1 + u) \leq u$. On en déduit que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n \times \frac{x}{n}\right) \leq \exp(x).$$

2. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_n(x) = f_n(x)e^{-bx}$. En effet, cette suite de fonctions converge simplement vers $e^{(1-b)x}$ et, pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$, on a la majoration $|g_n(x)| \leq e^{(1-b)x}$ et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ (car $b > 1$). On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} dx = \int_0^1 e^{(1-b)x} dx = \frac{1}{b-1}.$$

Exercice 3.

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx$.

Correction.

1. Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$, on a $f_n(x) \geq 0$. Pour déterminer le maximum de f_n sur $[0, 1]$, on dérive cette fonction :

$$f'_n(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1 - (n+1)x).$$

La dérivée s'annule en $x_n = 1/(n+1)$ et donc, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(x_n) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq 1.$$

2. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée. Par comparaison des fonctions polynômes et puissances, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f_n(x) \rightarrow 0$. De plus, $|f_n| \leq 1$ et les constantes sont intégrables sur l'intervalle borné $[0, 1]$. Par le théorème de convergence dominée, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx = 0.$$

Exercice 4.

Déterminer la limite des suites suivantes :

$$1. \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x} \right) \quad 2. \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}} \right)$$

Correction.

1. Posons, pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$. Alors,
 - Pour tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$ si $n \rightarrow +\infty$;
 - $f_n(1) \rightarrow \frac{1}{1+e}$.
 - Pour tout $x > 1$, on a $f_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ et cette fonction est intégrable. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x} = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

2. Posons $g_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$. On écrit

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^n)\right).$$

Pour $x \in]0, 1]$, on en déduit que $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$. Pour $x > 1$, on a

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n} n \ln(x) + \frac{1}{n} \ln(1+x^{-n})\right) \rightarrow x.$$

De plus, on a pour tout $x > 0$, $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, fonction qui est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)x}.$$

Reste à calculer chaque intégrale. La première ne pose pas de problèmes, elle vaut $\pi/4$. Pour la seconde, on écrit

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{dx}{(1+x^2)x} &= \int_1^X \frac{dx}{x} - \int_1^X \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^X \\ &= \ln(X) - \frac{1}{2} \ln(1+X^2) + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre X vers $+\infty$, et on remarque que

$$\ln(X) - \frac{1}{2} \ln(1+X^2) = \ln(X) - \ln(X) - \frac{1}{2} \ln(1+X^{-2}) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 5.

Déterminer la limite des suites suivantes :

$$1. \quad \left(\int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx \right) \qquad 2. \quad \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx \right)$$

Correction.

1. Posons $f_n(x) = \arctan(nx) e^{-x^n}$. Pour $x > 0$, $\arctan(nx) \rightarrow \pi/2$. Pour $x \in]0, 1[$, $\exp(-x^n) \rightarrow 1$, pour $x = 1$, $\exp(-x^n) \rightarrow e^{-1}$ tandis que pour $x > 1$, $\exp(-x^n) \rightarrow 0$. De plus, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

avec $g(x) = \pi/2$ si $x \in [0, 1]$ et $g(x) = \pi e^{-x}/2$ si $x > 1$. La fonction g étant intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$. Alors
- Pour $x \in]0, 1[$, $f_n(x) \rightarrow 0$;
 - $f_n(1) = 1/2$;
 - Pour $x > 1$, $f_n(x) \rightarrow 1/x^2$.

Reste à trouver une fonction dominante intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée. Posons $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$. Alors g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et il est facile de vérifier que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$. Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$

Exercice 6.

Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Correction.

On pose $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0, n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, pour n assez grand, $x \in [0, n]$. On a alors

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n \left(-\frac{x}{n} + o(1/n)\right)\right) \\ &= \exp(-x + o(1)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$. De plus, puisque $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$, on obtient

$$0 \leq f_n(x) \leq \exp\left(n\left(-\frac{x}{n}\right)\right) \leq e^{-x}$$

(cette inégalité est valable même si $x \notin [0, n]$). Puisque la fonction e^{-x} est intégrable, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

En réalité, ici, l'usage du théorème de convergence dominée est complètement inutile. L'intégrale se calcule très facilement

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \left[-\frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1},$$

quantité qui tend bien évidemment vers 1.

Exercice 7.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Correction.

On va appliquer le théorème de convergence dominée, mais après le changement de variables $t = x^n$ dans la première intégrale. On a alors

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt.$$

Posons alors, pour $n \geq 1$ et $t \geq 1$, $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}$. Il est clair que, pour tout $t \geq 1$, $f_n(t) \rightarrow \frac{e^{-t}}{t}$. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut encore vérifier l'hypothèse de domination. Mais, tout $t \geq 1$ et $n \geq 1$, on a $0 \leq \frac{t^{1/n}}{t} = \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}} \leq 1$. Autrement dit, on a prouvé que, pour tout $t \geq 1$ et tout $n \geq 1$, on a

$$|f_n(t)| \leq e^{-t}.$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Il est donc légitime d'appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 8.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaître dans $\frac{1}{e^t-1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. Alors

- Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

- Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

2. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n \geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

Exercice 9.

1. (a) Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

- (b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

2. En calculant de deux façons $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$, déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Correction.

1. (a) Posons $u_n(x) = x^{2n}(1-x)$. Chaque fonction u_n est positive. De plus, pour tout $x \in]0, 1[$, la série $\sum_n u_n(x)$ converge simplement vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

(somme géométrique), fonction qui est continue sur $]0, 1[$. De plus, on a

$$\int_0^1 u_n(x) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. D'après le théorème d'intégration termes à termes, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

- (b) On a également

$$\int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Tenant compte de la parité des termes, on a finalement

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = \ln 2.$$

2. Posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n x^{2n}(1-x)$. Pour $x \in]0, 1[$, la suite $S_N(x)$ converge vers $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$ (toujours par un argument de série géométrique). De plus, on sait d'après la première question que la série $\sum_n \int_0^1 |(-1)^n x^{2n}(1-x)| dx$ est convergente. On peut donc à nouveau appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}(1-x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} (1-x) dx \\ &= \left[\arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

On obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 10.

Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sum_n a_n n!$ converge absolument. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n!.$$

Correction.

On démontre facilement par récurrence que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. Mais alors, les hypothèses de l'exercice nous disent que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |a_n x^n e^{-x}| dx = \sum_{n \geq 0} |a_n| n!$$

est convergente. De plus, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente sur tout segment $[0, A]$, car on peut majorer $|a_n x^n| \leq |a_n| A^n \leq |a_n| n!$ pourvu que n soit assez grand. La fonction somme est donc continue sur $[0, +\infty[$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration termes à termes et on trouve

$$\sum_{n \geq 0} a_n n! = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_n x^n e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n e^{-x} dx$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. On pose $I_n = n \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx$. Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. On suppose de plus que f est $\mathcal{C}^1$, de dérivée bornée, et vérifie $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.
3. On ne suppose plus que f est $\mathcal{C}^1$, mais uniquement que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = f'(0)$.

- (a) Justifier que g est bornée.
- (b) Démontrer que le résultat obtenu à la question précédente reste vrai.

Correction.

1. Effectuons le changement de variables $u = nx$. Alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n) e^{-u} du.$$

Mais, pour tout $u > 0$, $f(u/n)e^{-u}$ tend vers $f(0)e^{-u}$ lorsque n tend vers l'infini (par continuité de f en 0). De plus, on a pour tout $n \geq 1$ et tout $u > 0$,

$$|f(u/n)e^{-u}| \leq \|f\|_{\infty} e^{-u}.$$

Cette dernière fonction étant intégrable, on en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u} du = f(0).$$

2. Les hypothèses nous invitent à effectuer une intégration par parties, en dérivant $u \mapsto f(u/n)$ et en intégrant $u \mapsto e^{-u}$. C'est légitime car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u/n)e^{-u} = 0$. On obtient

$$I_n - f(0) = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} f'(u/n) e^{-u} du.$$

En appliquant un raisonnement identique à celui de la première question (ou même en appliquant directement le résultat de la première question à f'), on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(u/n) e^{-u} du = f'(0) \neq 0.$$

Ceci entraîne que

$$I_n - f(0) \sim_{+\infty} \frac{f'(0)}{n}.$$

3. (a) g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (parce que f est dérivable en 0) et tend vers 0 en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Utilisons que $f(0) = n \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$ pour écrire

$$\begin{aligned} I_n - f(0) &= n \int_0^{+\infty} (f(x) - f(0)) e^{-nx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (f(u/n) - f(0)) e^{-u} du \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} u e^{-u} du. \end{aligned}$$

Or, pour tout $u > 0$, on a

$$\frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} u e^{-u} \rightarrow f'(0) u e^{-u}.$$

De plus, en notant M un majorant de $|g|$, on a

$$\left| \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} u e^{-u} \right| = |g(u/n)| u e^{-u} \leq M u e^{-u}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On déduit donc du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u/n) - f(0)}{u/n} u e^{-u} du \rightarrow \int_0^{+\infty} f'(0) u e^{-u} du = f'(0),$$

ce qui redémontre le résultat de la question précédente sous des hypothèses plus faibles.

Exercice 12.

On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt.$$

1. Déterminer $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

Correction.

1. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$\left| \frac{1}{1+t^n} \right| \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0, 1[$. On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 1 dt = 1.$$

2. On a

$$I_n - \ell = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1 \right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \int_0^1 t \times \frac{t^{n-1}}{1+t^n} dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve que

$$I_n = \frac{1}{n} [\ln(1+t^n)]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt = 0,$$

ce qui se redémontre ou bien en majorant ou bien par le théorème de convergence dominée. On en conclut que

$$\ell - I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n}.$$

Exercice 13.

Soit la fonction Γ définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En introduisant $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$, démontrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Correction.

On commence par calculer $I_n(x)$: par un changement de variables, puis par des intégrations par parties successives, on trouve

$$\begin{aligned} I_n(x) &= n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du \\ &= n^x \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= n^x \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \end{aligned}$$

On voit donc que pour résoudre l'exercice, il suffit de prouver que $I_n(x)$ converge, à x fixé, vers $\Gamma(x)$. Introduisons $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Alors :

- Pour chaque t , on a $f_n(t) \rightarrow e^{-t} t^{x-1}$;
- De plus, utilisant que $\ln(1+x) \leq x$ (car le logarithme est concave), on a

$$\ln(1 - t/n) \leq -\frac{t}{n}.$$

Ainsi

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$$

pour $|t| \leq n$. On en déduit que

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1},$$

fonction qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne le résultat.

Exercice 14.

Soit (a_n) une suite de $]0, +\infty[$ qui converge vers 0. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx$.

Correction.

Commençons par observer que, pour chaque entier n , l'intégrale est bien définie. En effet, si $C > 0$ est tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \geq 0$, alors on a

$$\left| \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} \right| \leq \frac{C a_n}{a_n^2 + x^2}$$

et la fonction à droite de l'inégalité est intégrable (le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, et elle est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $C a_n / x^2$). Déterminons maintenant la limite en utilisant le théorème de convergence dominée. Pour cela, on réalise le changement de variables $x = a_n u$. L'intégrale est alors égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(a_n u)}{1 + u^2} du.$$

Posons $g(x) = \frac{\|f\|_\infty}{1+x^2}$. Alors la fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$\left| \frac{f(a_n x)}{1 + x^2} \right| \leq g(x).$$

En outre, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n x)}{1 + x^2} = \frac{f(0)}{1 + x^2}.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Exercice 15.

Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π .

1. Démontrer que

$$\Re \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} dx \right) = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

2. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta} x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} dx.$$

3. Conclure que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

Correction.

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$ est continue sur $[0, 1]$ (le dénominateur ne s'annule pas). Il n'y a pas de problèmes d'intégrabilité, et il s'agit juste d'un calcul d'intégrales :

$$\begin{aligned} \Re e \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x} dx \right) &= \int_0^1 \Re e \left(\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x} dx \right) \\ &= \int_0^1 \frac{\cos \theta - x}{1-2x \cos \theta + x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \ln(1-2x \cos \theta + x^2) \right]_0^1 \\ &= -\ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right|. \end{aligned}$$

2. Posons $S_N(x) = \sum_{n=0}^N e^{i(n+1)\theta} x^n$. On a

$$S_N(x) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(N+2)\theta} x^{N+1}}{1 - e^{i\theta} x}$$

soit

$$|S_N(x)| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta} x|}.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0, 1]$ et ne dépend pas de N . De plus, pour tout $x \in]0, 1[$, $S_N(x)$ converge vers $\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}$ lorsque N tend vers $+\infty$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 e^{i(n+1)\theta} x^n dx = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x} dx.$$

Remarquons qu'on ne pouvait appliquer le théorème d'intégration terme à terme ici car la série de terme général $\int_0^1 |e^{i(n+1)\theta} x^n| dx$ est divergente.

3. La première somme apparaissant ci-dessus vaut encore $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$. Il suffit alors de prendre la partie réelle de l'égalité et d'appliquer le résultat de la première question.

Exercice 16.

Le but de cet exercice est de démontrer la remarquable identité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}.$$

1. Justifier la convergence de chacun des membres de l'égalité précédente.
2. Pour p et q des entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx$; justifier la convergence de cette intégrale.
3. Calculer $I(m, 0)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $I(p, q)$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

5. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, justifier que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n, n).$$

6. Conclure.

Correction.

1. Pour la série, il suffit de remarquer que, pour $m \geq 2$, on a

$$0 \leq \frac{1}{m^m} \leq \frac{1}{m^2}.$$

Puisque la série $\sum_m \frac{1}{m^2}$ converge, il en est de même de la série $\sum_m \frac{1}{m^m}$. Concernant l'intégrale impropre, on commence par écrire

$$f(x) = \frac{1}{x^x} = \exp(-x \ln x).$$

Cette fonction est continue sur $]0, 1]$, et se prolonge même par continuité en 0 par $f(0) = 1$, car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. Ainsi, f se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, et en fait on n'a pas affaire à une intégrale impropre.

2. La fonction $x \mapsto x^p (\ln x)^q$ est continue sur $]0, 1]$. De plus,

$$\sqrt{x} \times (x^p (\ln x)^q) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

Ainsi, en 0, $x^p (\ln x)^q = o(1/\sqrt{x})$, et comme $1/\sqrt{x}$ est intégrable sur $[0, 1]$, il en est de même de $x \mapsto x^p (\ln x)^q$.

3. C'est un calcul de primitive direct, et on trouve $I(m, 0) = \frac{1}{m+1}$.
4. Supposons $q \geq 1$. On va intégrer par parties :

$$\int_0^1 x^p (\ln x)^q dx = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (\ln x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1} x^{p+1} \frac{q}{x} (\ln x)^{q-1} dx = -\frac{q}{p+1} I(p, q-1).$$

Par une récurrence immédiate, on trouve

$$I(p, q) = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^q} I(p, 0) = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

5. On écrit à nouveau que $\frac{1}{x^x} = \exp(-x \ln x)$, et on utilise que pour tout réel u , on a $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\ln x)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n dx.$$

On peut alors justifier la permutation de la somme et de l'intégrale en utilisant le théorème de convergence dominée : en effet, pour $N \geq 1$, on utilise que

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} x^n (\ln x)^n \right| \leq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n \leq \frac{1}{x^x},$$

et cette dernière fonction est intégrable.

On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I(n, n).$$

6. On remplace $I(n, n)$ par sa valeur, puis on fait un changement d'indices :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}.$$

Exercice 17.

1. Démontrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
2. Plus généralement, démontrer que, pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge par continuité en 1 (car $e^t - 1 \sim_0 t$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à te^{-t} qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est négligeable devant t^{-2} par exemple). L'idée ensuite est de reconnaître dans $\frac{1}{e^t - 1}$ la somme d'une série géométrique. Pour cela, on factorise par e^t et on trouve,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

Cette égalité est valable dès que $e^{-t} < 1$, c'est-à-dire dès que $t > 0$. Posons $f_n(t) = te^{-nt}$. Alors

2. Chaque f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \text{ (intégration par parties).}$$

3. Pour tout $t > 0$, la série $\sum_n f_n(t)$ converge vers $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

4. La méthode est exactement identique et les détails sont laissés aux lecteurs. On trouve une somme à partir de 0 et non de 1 car

$$\frac{e^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n \geq 0} te^{-(a+nb)t}.$$

Exercice 18.

Démontrer que $\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Correction.

On sait que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$. On en déduit que, pour tout $x \geq 0$, $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$. Posons, pour $x > 0$, $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$. Alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ vers $\cos(\sqrt{x})e^{-x}$. De plus, on a

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{(2n)!} dx.$$

Or, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ et donc

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(2n)!}$$

et ceci est une série convergente, comme on peut le constater en appliquant le critère de d'Alembert. On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Partie B

Intégrales à paramètres

1. Exercices basiques

Exercice 19.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Correction.

1. Il n'y a bien sûr pas de problèmes si $x = 0$. Si $x \neq 0$, alors $\sin(xt) \sim_0 xt$ et donc la fonction se prolonge par continuité en 0. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a pour $t \geq 1$,

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} \right| \leq e^{-t}.$$

La fonction e^{-t} étant intégrable sur $[0, +\infty[$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Posons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$. Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt)e^{-t}.$$

C'est donc une fonction continue des deux variables x et t . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$$

et cette dernière fonction est intégrable. On en déduit, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vaut

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt.$$

3. On peut calculer cette dernière intégrale en écrivant $\cos(xt)$ comme $\Re(e^{ixt})$. On a donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) \\ &= \Re \left(\frac{1}{1-ix} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

4. En intégrant F' entre 0 et x , on trouve que

$$F(x) - F(0) = \arctan(x) - \arctan(0) \implies F(x) = \arctan(x).$$

Exercice 20.

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de f en 0.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, en 0, elle est équivalente à t^{x-1} . Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$. Le domaine de définition de f est donc $]0, +\infty[$.
2. On va appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Pour cela, on fixe un segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, et on va appliquer le théorème de continuité sur ce segment. Remarquons que l'application $(x, t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $[a, b] \times]0, 1[$ comme fonction de deux variables. De plus, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in]0, 1[$, on a

$$0 \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq \frac{t^{a-1}}{1+t}$$

(pour prouver cette inégalité, écrire $t^{x-1} = \exp((x-1)\ln t)$ par exemple). Or, la fonction $t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1[$. On peut donc bien appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres, ce qui prouve que f est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^x}{1+t} dt = \int_0^1 t^{x-1} \frac{1+t}{1+t} dt = \frac{1}{x}.$$

4. Si $x \rightarrow 0$, alors $f(x+1)$ tend vers $f(1)$ car f est continue en 1, et donc $f(x+1) = o(1/x)$. On en déduit que $f(x) \sim_0 \frac{1}{x}$.
5. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. Pour tout $x \geq 1$, on a en effet

$$\left| \frac{t^{x-1}}{1+t} \right| \leq \frac{1}{1+t}$$

qui est une fonction intégrable sur $]0, 1[$. De plus, pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} = 0.$$

On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Une autre possibilité, sans le théorème de convergence dominée, était simplement d'utiliser l'encadrement

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

puis d'appliquer le théorème des gendarmes.

Exercice 21.

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n(x)$.
2. Calculer $I_1(x)$.

3. Démontrer que I_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et former une relation entre $I'_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
4. En déduire qu'il existe une suite (λ_n) telle que, pour tout $x > 0$, on a

$$I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}.$$

Que vaut λ_n ?

Correction.

1. Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(t^2+x^2)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}}.$$

Par comparaison, la fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Il s'agit d'une intégrale connue :

$$I_1(x) = \left[\frac{1}{x} \arctan(t/x) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

3. Posons $f_n(x, t) = \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$ qui est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

Fixons maintenant $0 < a < b$ et supposons $x \in [a, b]$. Alors,

$$\left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend pas de x pourvu que $x \in [a, b]$), est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc I_n est de classe C^1 sur $[a, b]$. Puisque a et b sont arbitraires, I_n est C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$I'_n(x) = -2nxI_{n+1}(x)$$

pour $x > 0$.

4. On va prouver ce résultat par récurrence sur $\mathbb{R}$, et on va en même temps obtenir une relation de récurrence pour la suite (λ_n) . Le résultat est vrai pour $n = 1$, avec $\lambda_1 = \pi/2$. Supposons-le démontré au rang n , et prouvons-le au rang $n + 1$. Pour $x > 0$, d'après la question précédente,

$$I_{n+1}(x) = \frac{-1}{2nx} \times \frac{-(2n-1)\lambda_n}{x^{2n}} = \frac{\lambda_{n+1}}{x^{2n+1}}$$

avec $\lambda_{n+1} = \frac{(2n-1)\lambda_n}{2n}$. On en déduit (classiquement) que

$$\lambda_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \pi.$$

Exercice 22.

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Justifier que F tend vers 0 en $+\infty$.
3. Démontrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Correction.

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $(x, t) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a, pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$,

$$\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc l'intégrale définissant $F(x)$ converge. D'ailleurs, elle converge aussi pour $x = 0$.

2. On peut appliquer le théorème de convergence dominée ou, plus simplement, remarquer que, pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}.$$

On en déduit, par intégration de l'inégalité, que

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

d'où la limite désirée d'après le théorème des gendarmes.

3. Posons $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$. Alors, pour tous $x, t > 0$, la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x d'ordre 1 et 2 qui sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

Ces dérivées partielles sont continues comme fonctions des deux variables x et t . Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (on peut majorer sa valeur absolue par e^{-xt} qui est intégrable). De plus, fixons $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t > 0$, on a

$$\left| t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq e^{-at}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

En particulier, pour tout $x > 0$, on a

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Exercice 23.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de I .

Correction.

1. La fonction $u : (x, t) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle par rapport à x valant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -2x(1+t^2) \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} = -2xe^{-x^2} e^{-(tx)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue comme fonction des deux variables sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$. De plus, si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée sur le compact $[a, b] \times [0, 1]$ disons par le réel $M > 0$. Comme M est intégrable sur l'intervalle borné $]0, 1[$, on en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que g est dérivable et que l'on a

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt.$$

De plus, par le théorème fondamental du calcul intégral, f est dérivable, de dérivée e^{-x^2} . Posons alors $h = g + f^2$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0 \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variables $u = tx$. Ainsi, $h' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction h est constante. De plus,

$$h(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

ce qui prouve le résultat.

2. On va faire tendre x vers $+\infty$, et prouver que $g(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. C'est très facile en utilisant le théorème de convergence dominée. On peut aussi remarquer que, pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$$

et donc

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

Par le théorème des gendarmes, ceci prouve que g tend vers 0 en $+\infty$. D'après l'équation précédente, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \frac{\pi}{4}$. Puisque I est positive (comme intégrale d'une fonction positive), on en déduit que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 24.

Pour $x > 0$, on définit

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{t+x} dt.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et étudier les variations de f .
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, démontrer que

$$f(x) \sim_{0+} -\ln x.$$

4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Correction.

1. Posons $u(x, t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$, définie et continue sur $]0, +\infty[\times [0, \pi/2]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $[0, \pi/2]$ (c'est une fonction continue sur un segment). Cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est elle-même continue sur $]0, +\infty[\times [0, \pi/2]$. De plus, fixons $[a, b] \subset]0, +\infty[$ (en particulier, $a > 0$). Alors pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in [0, \pi/2]$, on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{(a+t)^2}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[0, \pi/2]$. Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(t)}{(t+x)^2} dt \leq 0.$$

Ainsi, f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Il n'est pas besoin d'appliquer un théorème sophistiqué. Ici, on a en effet

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt = \ln \left(\frac{x + \pi/2}{x} \right) \rightarrow 0.$$

Par le théorème d'encadrement, f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Par encadrement, on a donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x} dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt,$$

soit

$$-\ln(x) + \ln(x + \pi/2) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x} dt \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x + \pi/2).$$

Le seul terme qui pose encore problème est l'intégrale. Mais, on remarque que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t+x} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Il vient

$$-\ln(x) + \ln(x + \pi/2) - \frac{\pi}{8} \leq f(x) \leq -\ln(x) + \ln(x + \pi/2).$$

Il suffit ensuite de diviser par $-\ln x$ et de faire tendre x vers 0 pour en déduire le résultat voulu.

4. Il suffit d'encadrer le plus simplement possible le dénominateur. En effet, on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x + \pi/2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt.$$

Il vient

$$\frac{1}{x + \pi/2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

et donc

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Exercice 25.

Soient $a, b > 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

1. Justifier l'existence de $F(x)$.
2. Prouver que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + C.$$

4. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt,$$

$$\text{où } \psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}.$$

5. En déduire la valeur de C .

Correction.

1. Définissons sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$$

qui est une fonction continue. Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, on a

$$f(x, t) \rightarrow (b - a)$$

lorsque t tend vers 0 (faire un DL par exemple). Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ se prolonge par continuité en 0. De plus, au voisinage de $+\infty$,

$$t^2 f(x, t) \rightarrow 0 \implies f(t, x) =_{+\infty} o(1/t^2).$$

Ainsi, $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $F(x)$ est bien définie.

2. La fonction f est de classe C^1 , et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-bt} - e^{-at}$$

et cette dernière fonction, qui ne dépend plus de x , est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi, F est C^1 et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt.$$

Or, il est facile de voir que, pour tout $c > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sin(xt) dt = \Im \left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t} dt \right) = \frac{x}{c^2 + x^2}.$$

On en déduit que

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} - \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

3. Il suffit d'intégrer la relation précédente.
 4. La relation demandée est une simple intégration par parties (généralisée), justifiée par la convergence de toutes les intégrales en jeu (faites-le).
 5. Faisons tendre x vers $+\infty$. On a d'une part,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = C,$$

et d'autre part, de

$$|F(x)| \leq \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} |\psi'(t)| dt,$$

on tire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. On en déduit que $C = 0$.

Exercice 26.

On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x).$$

2. En déduire que pour tout x réel, $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$, puis que

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Correction.

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^{-itx} e^{-at^2}| = e^{-at^2}$$

qui est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $a > 0$. Ceci démontre à la fois que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et aussi que F est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a majoré l'intégrande (qui est continue) par une fonction intégrable ne dépendant pas de x . De plus, la fonction $(x, t) \mapsto e^{-itx} e^{-at^2}$ est de classe C^1 , et sa dérivée partielle par rapport à x est $(x, t) \mapsto -ite^{-itx} e^{-at^2}$. Cette fonction vérifie

$$|-ite^{-itx} e^{-at^2}| \leq |t| e^{-at^2}$$

et la fonction qui est à droite de l'inégalité est intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendante de x . Ceci prouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-itx} e^{-at^2} dt.$$

Une intégration par parties permet de se ramener à F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{i}{2a} e^{-at^2} e^{-itx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2a} e^{-at^2} (-ixe^{-itx}) dt \\ &= -\frac{x}{2a} F(x). \end{aligned}$$

2. On résout l'équation différentielle vérifiée par F : $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$. De plus,

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

3. Démontrer que f est développable en série entière.

Correction.

1. Posons $u(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$, définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. u est de classe C^∞ , ses dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à x étant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \theta) = -\sin(\theta) \sin(x \sin \theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \theta) = -\sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \theta) \right| \leq 1.$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0, \pi]$. On en déduit que f est de classe C^2 puis que

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta, \quad f''(x) = \int_0^\pi -\sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

2. Utilisant $-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$, on a

$$xf''(x) + xf(x) = \int_0^\pi x \cos^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos \theta \times (x \cos(\theta) \cos(x \sin \theta)) d\theta.$$

On réalise alors une intégration par parties dans cette dernière intégrale, pour trouver

$$xf''(x) + f(x) = -f'(x).$$

3. En utilisant le développement en série entière de $\cos u$, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin \theta)^{2n} x^{2n} d\theta.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin \theta)^{2n} x^{2n} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

et le terme de gauche est le terme général d'une série (indépendante de θ) qui converge. On en déduit donc que, à x fixé, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin \theta)^{2n} x^{2n}$ converge normalement sur $[0, \pi]$. On peut donc permuter la somme et l'intégrale, et on trouve que

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n} d\theta x^{2n}.$$

On a bien développé f en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- (b) En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.
5. (a) Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leq -u$.
(b) Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) := \begin{cases} t^{x-1} (1-t/n)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Gamma(x)$.

6. En déduire que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du.$$

7. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part, en 0, elle est équivalente à t^{x-1} qui, par le critère de Riemann, est intégrable si et seulement si $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$, la fonction est toujours intégrable. En effet, si t est assez grand, on a

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$$

et on conclut à l'intégrabilité par le théorème de majoration. On a donc prouvé que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$.

2. (a) La fonction g_k est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, le problème de convergence se traite comme précédemment. Au voisinage de 0, on a

$$g_k(t) \sim -t^{A-1} \ln t$$

et il s'agit d'une intégrale de Bertrand. On a $A-1 > -1$. On peut trouver c dans l'intervalle $] -1, A-1[$. On a alors

$$g_k(t) =_0 o(t^c)$$

et ceci est une intégrale de Riemann convergente (en 0).

(b) Posons $f(t, x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Alors f est C^∞ sur $]0, +\infty[^2$, et

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Soit $0 < A \leq B$ et $x \in [A, B]$. Pour $t \leq 1$, on a

$$|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln t|^k t^{A-1} e^{-t},$$

et d'autre part, pour $t \geq 1$, on a

$$|(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}| \leq |\ln t|^k t^{B-1} e^{-t}.$$

D'après la question précédente, on a majoré les dérivées partielles par rapport à x indépendamment de $x \in [A, B]$ par une fonction intégrable. Par application du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, Γ est de classe C^∞ sur n'importe quel segment $[A, B] \subset]0, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$, et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

3. On intègre par parties, et on trouve :

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Puisque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate que $\Gamma(n+1) = n!$. Enfin, pour x proche de 0, on a

$$\Gamma(x) \sim_0 \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim_0 \frac{\Gamma(1)}{x} \sim_0 \frac{1}{x}.$$

4. On a déjà calculé la dérivée seconde de Γ :

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Comme la fonction que l'on intègre est positive, il en est de même de l'intégrale. Γ est donc convexe puisque sa dérivée seconde est positive.

5. (a) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ étant concave, sa courbe représentative est sous ses tangentes, en particulier sous la tangente passant par le point $(0, \ln 1)$ d'équation $y = t$. On en déduit le résultat.

(b) Observons d'abord que

$$f_n(t) \rightarrow f(t) = t^{x-1} e^{-t} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

En effet,

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 - t/n)) \rightarrow e^{-t}.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in]0, n]$, on a, d'après la question précédente,

$$0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t).$$

La fonction f étant intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la première question, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \Gamma(x).$$

6. On fait le changement de variables $u = t/n$, et on trouve

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t/n)^n = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^n du,$$

qui est le résultat voulu.

7. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^n du = \left[\frac{u^x}{x} (1 - u)^n \right]_0^1 + n \int_0^1 \frac{u^x}{x} (1 - u)^{n-1} du.$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{x-1} (1 - u)^n du &= \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} (1 - u)^0 du \\ &= \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}. \end{aligned}$$

Exercice 29.

En formant une équation différentielle vérifiée par f , calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Correction.

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout x . En effet, on a

$$\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} \right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1 . Pour cela, on remarque que la fonction

$$g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t} e^{-t} e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0, +\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t} e^{-t} e^{itx} dt.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t) = \sqrt{t}$ et $u(t) = \frac{1}{ix-1} e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt \\ &= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)} f(x) \\ &= \frac{-x+i}{2(x^2+1)} f(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f} = \frac{-x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln |f| = \frac{-1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) + K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = C(x^2+1)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0) = C$. On a par ailleurs

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

en effectuant le changement de variables $t = u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C = \sqrt{\pi}$.

Exercice 30.

Soit f une application définie sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives, et continue. Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t) dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
2. En déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t) dt \right)^{1/\alpha}.$$

Correction.

1. Soit $\phi : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(t, \alpha) \mapsto f^\alpha(t)$. ϕ est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ et,

$$\forall (t, \alpha) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(t, \alpha) = \ln f(t) f^\alpha(t).$$

Cette application est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ et si on fixe $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t, \alpha) \in [0, 1] \times [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(t, \alpha) \right| \leq M$$

puisque $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}$ est continue sur le compact $[0, 1] \times [a, b]$. Les constantes étant intégrales sur un intervalle borné, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, et on trouve que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \ln f(t) f^\alpha(t) dt \text{ en particulier } F'(0) = \int_0^1 \ln f(t) dt.$$

2. On cherche la limite de $F(\alpha)^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right)$. Or, on a

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha}\right) &= \exp\left(\frac{\ln(1 + \alpha F'(0) + o(\alpha))}{\alpha}\right) \\ &= \exp(F'(0) + o(1)). \end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc

$$\exp(F'(0)) = \exp\left(\int_0^1 \ln f(t) dt\right).$$

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 31.

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}.$$

- Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.
- Démontrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt.$$

En déduire le sens de variation de F .

- Déterminer la limite de F en $+\infty$.
- On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+ . Démontrer que pour tout $A > 0$ et tout

$x > 1$, on a

$$\ell \geq \int_1^A \frac{dt}{1+t^x}.$$

5. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$.

Correction.

1. Remarquons pour commencer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On doit juste traiter le problème au voisinage de $+\infty$. Mais, si $x < 0$, t^x tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{1+t^x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

et l'intégrale impropre ne converge pas au voisinage de $+\infty$. Si $x = 0$, la fonction est constante et son intégrale ne converge pas. Enfin, si $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+t^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x}.$$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, et par comparaison à une fonction positive, l'intégrale est convergente si et seulement si $x > 1$. Autrement dit, le domaine de définition de f est $]1, +\infty[$. Fixons ensuite $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Alors si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^b}.$$

De même, si $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^a}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0, 1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit du théorème de continuité des intégrales à paramètres que f est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Posons $u(x, t) = \frac{1}{1+t^x}$, définie sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$. Alors u admet une dérivée partielle par rapport à x définie sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$ et donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^x \ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue des deux variables. Si on utilise

$$\left| \frac{t^x}{(1+t^x)^2} \right| \leq \frac{1+t^x}{(1+t^x)^2} = \frac{1}{1+t^x}$$

on trouve que, pour tout $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{1+t^b}$$

si $t \in]0, 1[$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{1+t^a}$$

si $t \geq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0, 1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^x \ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Pour obtenir la formule demandée par l'énoncé, on coupe l'intégrale en deux, entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$, puis on fait le changement de variables $u = 1/t$ dans la première intégrale. Puisque pour tout $t > 1$ et tout $x > 1$,

$$\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \leq 0$$

on en déduit que f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

3. On va séparer l'étude de l'intégrale entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$. On a d'une part, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t^x} = 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $x > 0$,

$$\left| \frac{1}{1+t^x} \right| \leq 1$$

et 1 est intégrable sur $]0, 1[$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Pour l'intégrale entre 1 et $+\infty$, on peut également utiliser le théorème de convergence dominée, ou plus simplement on peut majorer : pour $x > 1$ et $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$, et on trouve

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} = \frac{1}{x-1}.$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x} dt = 0.$$

Finalement, on en conclut que F tend vers 1 en $+\infty$.

4. Si F admet une limite ℓ en 1^+ , alors puisque F est décroissante, pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) \leq \ell.$$

Mais comme on intègre une fonction positive, on en déduit que, pour tout $A > 1$, on a

$$\int_1^A \frac{1}{1+t^x} dt \leq \ell.$$

5. Faisons tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente. Puisque, pour tout $t \in [1, A]$, $\frac{1}{1+t^x}$ tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque x tend vers 1, et que

$$\left| \frac{1}{1+t^x} \right| \leq 1$$

pour tout $t \in [1, A]$ et $x > 1$, avec 1 fonction intégrable sur le segment $[1, A]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$\int_1^A \frac{dt}{1+t} \leq \ell.$$

Ceci est vérifié pour tout $A > 1$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est positive sur $[1, A]$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t}$ est convergente. Ceci est faux par comparaison à une intégrale de Riemann divergente. C'est donc que l'hypothèse que F admet une limite finie ℓ en 1^+ est fautive. Mais F est décroissante, et donc admet une limite en 1^+ qui peut être finie ou égale à $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$.

Exercice 32.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$.

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt} dt$ converge pour $y > x$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf ?
3. On suppose f bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} Lf(x) = 0$.

Correction.

1. On pose $F(u) = \int_0^u f(t)e^{-xt} dt$. Alors,

$$\int_0^X f(t)e^{-yt} dt = \int_0^X f(t)e^{-xt} e^{-(y-x)t} dt = \int_0^X F'(t)e^{-(y-x)t} dt.$$

On réalise une intégration par parties, et on trouve :

$$\int_0^X f(t)e^{-yt} dt = F(X)e^{-(y-x)X} + (y-x) \int_0^X F(t)e^{-(y-x)t} dt.$$

Maintenant, F est majorée sur $[0, +\infty[$ (c'est une fonction continue qui admet une limite en $+\infty$). Quand X tend vers $+\infty$, $\int_0^X F(t)e^{-(y-x)t} dt$ admet donc une limite (l'intégrale est absolument convergente), et $F(X)e^{-(y-x)X}$ converge vers 0. Ainsi, $\int_0^X f(t)e^{-yt} dt$ admet une limite lorsque X tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale impropre est convergente.

2. L'ensemble de définition est donc un intervalle non-borné à droite, c'est-à-dire ou bien $] - \infty, +\infty[$, $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.
3. Il s'agit d'une simple application du théorème de convergence dominée : soit M un majorant de $|f|$. Pour $x > 1$, on a

$$|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-t}$$

qui est une fonction intégrable. D'autre part, pour chaque $t > 0$ fixé,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-xt} dt = 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-xt} dt = 0$.

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

1. On suppose que $f(0) = 0$ et on pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Justifier que, pour $x \neq 0$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$, et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose désormais que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Puisque $f(0) = 0$, le théorème fondamental du calcul intégral nous garantit que

$$f(x) = \int_0^x f'(u) du.$$

Effectuons le changement de variables $u = xt$, $du = x dt$. On obtient

$$f(x) = x \int_0^1 f'(tx) dt,$$

ce qui est le résultat demandé. Mais la formule

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$$

a un sens pour $x = 0$. Montrons que la fonction g ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 0$, la fonction $u : (x, t) \mapsto f'(xt)$ admet une dérivée partielle par rapport à x d'ordre k . De plus, si on fixe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors puisque $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ est continue, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$ (partie compacte de $\mathbb{R}^2$),

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M.$$

Les constantes étant intégrables sur un segment borné, on en déduit que g définit une fonction C^∞ .

2. C'est la même méthode, mais on remplace l'utilisation du théorème fondamental du calcul intégral par la formule de Taylor avec reste intégral. On a donc, puisque toutes les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $n - 1$ sont nulles,

$$f(x) = \int_0^x (x - u)^{n-1} \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!} du.$$

On pose encore $u = tx$, de sorte que

$$f(x) = \int_0^1 (x - xt)^{n-1} \frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!} x dt$$

soit

$$g(x) = \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!} dt.$$

Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, ceci définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.