Chapitre XI

Fonctions vectorielles de la variable réelle

Table des matières

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$; $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A
Dérivation des fonctions vectorielles

1. Dérivée en un point

a. Définition et premières propriétés

Définition 1. *Dérivabilité et vecteur dérivé*

Soit $f : I \to E$ une fonction et $t_0 \in I$.
On dit que f est **dérivable** en t_0 si l'application $\tau_{t_0} : I \setminus \{t_0\} \to E$, appelée **taux d'accroissement de f en t_0** et définie par :

$$\tau_{t_0} : t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

admet une limite $\ell \in E$ en t_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **vecteur dérivé** de f en t_0 et est notée :

$$f'(t_0) \quad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Proposition 1. *Développement limité à l'ordre 1*

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, elle admet une développement limité à l'ordre 1 en t_0 i.e. s'il existe un vecteur $\ell \in E$ et une fonction $\varepsilon : I \to E$ avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0_E$ telle que, pour tout $t \in I$:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)\ell + (t - t_0)\varepsilon(t).$$

Dans ce cas, on a $f'(t_0) = \ell$.

Proposition 2.

Soit $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0.

On rappelle la définition suivante :

Définition-Proposition 2. *Fonctions composantes*

Soit $f : I \to E$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Il existe un unique n-uplet $(f_1, ..., f_n)$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ appelées **fonctions composantes** de f, qui vérifie, pour tout $t \in I$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

Proposition 3.

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction composante f_i de f est dérivable en t_0.

Dans ce cas, on a :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

Exemple 1.

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\arctan(t), \arcsin(t))$. Alors f est dérivable en tout point de $]-1, 1[$ et on a, pour $t_0 \in]-1, 1[$,

$$f'(t_0) = (\frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}).$$

Exercice 1.

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t^2) & \sin(\frac{1}{1-t}) \\ 2^{t^3+1} & \frac{1}{\ln(t^2)^2+1} \end{pmatrix}$.

Quelle est le domaine de définition de f ? En quels points cette fonction est-elle dérivable et quel est le vecteur dérivée dans ce cas ?

b. Dérivée à gauche et à droite en un point

Définition 3. *Vecteur dérivée à gauche/à droite*

Soit $f : I \to E$, $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable à gauche (resp. à droite) en** t_0 si le taux d'accroissement τ_{t_0} de f admet une limite à gauche (resp. à droite) en t_0.

Dans cette limite est appelée **vecteur dérivé à gauche (resp. à droite)** de f en t_0 et est notée

$$f_g'(t_0) \quad (\text{resp. } f_d'(t_0))$$

c. Fonction dérivée

Définition 4. *Fonction dérivée*

Soit $f : I \to E$. On dit que f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On note alors f' (ou encore $\dfrac{df}{dt}$) la fonction de I dans E définie par :

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

Exercice 2.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable sur $\mathring{I}$ et sa fonction dérivée f' est nulle sur $\mathring{I}$.
2. En déduire qu'une fonction $f : I \to E$ est constante si, et seulement si, elle est dérivable sur $\mathring{I}$ et sa fonction dérivée f' est nulle sur $\mathring{I}$.

2. Opérations sur les fonctions dérivables

a. Combinaisons linéaires

Proposition 4.

Soit $f, g : I \to E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$. Si f et g sont dérivables en t_0, alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0).$$

De plus, si f et g sont dérivables sur I, on a $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Remarque 1.

On en déduit que l'ensemble des fonctions de I dans E dérivables sur I est un espace vectoriel sur K et que l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire de l'ensemble des fonctions de I dans E dérivables sur I vers l'ensemble des fonctions de I dans E.

b. Compositions

Proposition 5. *Composition de fonctions*

Soit $f : I \to E$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in J$ avec $\varphi(t_0) \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0)).$$

De plus, si φ est dérivable sur J avec $\varphi(J) \subset I$ et f est dérivable sur I, alors on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

Proposition 6. *Composition par une application linéaire*

Soit F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, $f : I \to E$, $L : E \to F$ une application linéaire et $t_0 \in I$. Si f est dérivable en t_0, alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0)).$$

De plus, si f est dérivable sur I, alors on a $(L \circ f)' = L \circ f'$.

Démonstration.

On suppose f dérivable en t_0. Comme E est de dimension finie, L est continue sur E. Notons τ_{t_0} le taux d'accroissement de f. On a, pour tout $t \in I$ avec $t \neq t_0$, par linéarité et continuité de L :

$$\frac{L \circ f(t) - L \circ f(t_0)}{t - t_0} = L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \xrightarrow[t \to t_0]{} L(f'(t_0)).$$

D'où le résultat. $\square$

c. Produit de fonctions

Proposition 7.

Soit E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, G un espace vectoriel normé, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, $f : I \to E$, $g : I \to F$ des fonctions et $t_0 \in I$. Si f et g sont dérivables en t_0, alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et on a :

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

De plus, si f et g sont dérivables sur I, alors on a $(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration.

On suppose que f et g sont dérivables en t_0. Alors on a, par bilinéarité de B, pour tout $t \in I$ avec $t \neq t_0$:

$$\begin{aligned} B(f,g)(t) - B(f,g)(t_0) &= B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0)) \\ &= B(f(t) - f(t_0), g(t)) + B(f(t_0), g(t) - g(t_0)). \end{aligned}$$

Comme E et F sont de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{B(f,g)(t) - B(f,g)(t_0)}{t - t_0} &= \underbrace{B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f'(t_0), g(t_0))} + \underbrace{B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f(t_0), g'(t_0))} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)). \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Exemple 2. *Produit scalaire de fonctions*

Soit E un espace euclidien sur $\mathbb{K}$ de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et $f, g : I \to E$ des fonctions dérivables sur I.

Alors l'application $(f|g) : t \mapsto (f(t)|g(t))$ est dérivable sur I et

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g').$$

Exercice 3.

Soit E un espace euclidien de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et $f : I \to E$ une fonction dérivable sur I.

1. Discuter de la dérivabilité de la fonction $\|f\| : t \mapsto \|f(t)\|$ et déterminer sa dérivée aux points de dérivabilité.
2. On suppose que pour tout $t \in I$, $f(t) \in S(0,1)$. Montrer que, pour tout $t \in I$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

3. Fonctions de classe C^k

a. Définitions

Définition 5. *Fonctions de classe C^1*

Soit $f : I \to E$. On dit que f est de **classe** C^1 sur I si f est dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est continue sur I. On note $C^1(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I.

On peut généraliser cette notion par récurrence :

Définition 6. *Fonctions de classe C^k*

Soit $f : I \to E$. On dit que f est :

- **de classe** C^0 **sur** I si f est continue sur I ;
- **de classe** C^k **sur** I, pour $k \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable sur I et que f' est de classe C^{k-1} sur I ;
- **de classe** C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $C^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

Proposition 8.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $C^k(I, E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. De plus, si $k \geq 1$, l'application $D : C^k(I, E) \to C^{k-1}(I, E)$ telle que $D : f \mapsto f'$ est une application linéaire.

Remarque 2.

On a $C^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I,E)$.

b. Opérations sur les fonctions de classe C^k

Proposition 9. *Opérations usuelles*

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit $f, g : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(J) \subset I$.
Soit $L : E \to F$ une application linéaire.

— Si f, g sont de classe C^k sur I, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^k sur I ;

— Si f, φ sont de classe C^k sur I, J respectivement, alors, $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur J ;

— Si f est de classe C^k sur I, alors, $L \circ f$ est de classe C^k sur I.

Proposition 10. *Formule de Leibniz*

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Soit E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, G un espace vectoriel normé, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire et $f : I \to E$, $g : I \to F$. Si f et g sont de classe C^k sur I, alors $B(f,g)$ est de classe C^k sur I et on a, pour tout $p \leq k$:

$$(B(f,g))^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)}).$$

Partie B

Intégration des fonctions vectorielles sur un segment

Dans cette partie, a, b désignent des réels tels que $a < b$.

1. Intégration des fonctions continues par morceaux

a. Définition

Lemme 1.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(f_1, ..., f_n)$ les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}$. Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$.

Grâce au lemme précédent, on peut donner le sens suivant à l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs vectorielles :

Définition 7. *Intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(f_1, ..., f_n)$ les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}$. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ le vecteur :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i.$$

b. Propriétés de l'intégrale

Proposition 11.

On a les propriétés suivantes :

— $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est linéaire. Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$.

— pour $u : E \to F$ une application linéaire, $u(\displaystyle\int_a^b f) = \int_a^b u(f)$.

— pour $a < b < c$, $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Proposition 12.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. On a :

$$\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

c. Sommes de Riemann

On rappelle et on généralise les résultats sur les sommes de Riemann (ici dans le cas particulier d'une subdivision régulière)

Définition 8. *Somme de Riemann*

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **somme de Riemann d'ordre n de f** le vecteur

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Théorème 1.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],E)$. Alors les sommes de Riemann d'ordre n convergent vers $\int_a^b f$ quand n tend vers l'infini i.e.

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Exercice 4.

Rappels de sup. Déterminer les limites des suite de termes généraux suivants :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2} \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

2. Primitives et intégrales

a. Extension de la définition de l'intégrale

On rappelle qu'une fonction est continue par morceaux sur I (autrement dit, $f \in C_{pm}(I,E)$) si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Définition 9. *Extension de l'intégrale*

Soit $f \in C_{pm}(I, E)$ et $a, b \in I$. On pose

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_a^b f(t)dt & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_b^a f(t)dt & \text{si } a > b. \end{cases}$$

Proposition 13. *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}(I, E)$ et $a, b, c \in I$ avec $a \leq b \leq c$. Alors on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

b. Primitives des fonctions continues

Définition 10. *Primitive*

Soit $f : I \to E$ une fonction continue. On dit qu'une fonction $g : I \to E$ est **une primitive** de f sur I si g est dérivable sur I et $g' = f$.

Proposition 14.

Soit $f, g, h \in C(I, E)$. Si g et sont des primitives de f sur I, alors $g - h$ est une fonction constante sur I.

Théorème 2. *Théorème fondamental de l'Analyse*

Soit $f \in C(I, E)$ et $t_0 \in I$.

i) L'application $g : I \to E$ définie par :

$$g : t \mapsto \int_{t_0}^t g(x)dx$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en t_0.

ii) Pour toute primitive F de f sur I, on a, pour $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

c. Inégalité des accroissements finis

Théorème 3. *Inégalités des accroissements finis*

Soit $f \in C(I, E)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathring{I}$. S'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathring{I}$,

$$\|f'(t)\| \leq M$$

alors, pour tout $a, b \in I$, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Démonstration.

On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in \mathring{I}$, $\|f'(t)\| \leq M$.

— *Cas particulier :* $a, b \in \mathring{I}$. Alors $f \in C^1([a, b], E)$ donc, d'après le théorème fondamental de l'Analyse

$$\|f(b) - f(a)\| = \| \int_a^b f'(t)dt\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt \leq M(b - a).$$

— *Cas général :* $a, b \in I$. Soit $x, y \in \mathring{I}$. D'après le cas précédent, on a :

$$\|f(y) - f(x)\| =\leq M(y - x).$$

Et donc en passant à la limite quand $x \to a$ puis quand $y \to b$, on obtient le résultat. □

d. Exercices de révision

Exercice 5.

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} \quad t \mapsto \frac{1}{1 + t^3} \quad t \mapsto \left(\frac{2t}{\sqrt{1 - t^4}}, e^t \cos(t)\right).$$

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^2 + 2t + 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on a, par division euclidienne :

$$t^3 + t^2 - 1 = (t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1$$

donc

$$\frac{t^3 + t^2 - 1}{t^2 + 2t + 2} = \frac{(t^2 + 2t + 2)(t - 1) + 1}{t^2 + 2t + 2} = t - 1 + \frac{1}{t^2 + 2t + 2}$$

et de plus, $t^2 + 2t + 2 = 1 + (t + 1)^2$, donc :

$$\int \frac{1}{t^2 + 2t + 2}dt = \int \frac{1}{1 + (t + 1)^2}dt = \arctan(t + 1)$$

Par suite,

$$\int \frac{t^3+t^2-1}{t^2+2t+2}dt = \frac{t^2}{2} - t + \arctan(t+1) + \text{ constante.}$$

Partie C
Formules de Taylor

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 4. *Formule de Taylor avec reste intégrale*

Soit $f \in C^{n+1}(I, E)$. Pour $a, b \in I$, on a :

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i + R_n,$$

où

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n dt.$$

Exercice 6.

Montrer que le reste R_n peut s'écrire :

$$R_n = (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+t(b-a))}{n!}(1-t)^n dt.$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 5. *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $f \in C^{n+1}(I, E)$. S'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $t \in I$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$, alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\|f(b) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Formule de Taylor-Young

Théorème 6. *Formule de Taylor-Young*

Soit $f \in C^n(I, E)$ et $x_0 \in I$. Alors on a :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$