

Chapitre X

Endomorphismes d'un espace euclidien

Table des matières

Rappels sur les espaces préhilbertiens réels	2
1. Rappels sur le produit scalaire	2
2. Rappels et compléments sur l'orthogonalité	5
Projection orthogonale	15
1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	15
2. Distance à un sous-espace de dimension finie	16
Partie A : Adjoint d'un endomorphisme	19
1. Représentation des formes linéaires	19
2. Adjoint d'un endomorphisme	20
3. Propriétés de l'adjoint	21
Partie B : Isométries vectorielles et matrices orthogonales	26
1. Matrices orthogonales	26
2. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	27
3. Isométries vectorielles	27
4. Isométries vectorielles en dimension 2	31
5. Réduction des isométries vectorielles	38
Partie C : Endomorphismes autoadjoints	42
1. Définition et propriétés	42
2. Réduction des endomorphismes autoadjoints	45
3. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs	50

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel (pas forcément de dimension finie).

Partie *

Rappels sur les espaces préhilbertiens réels

1. Rappels sur le produit scalaire

a. Produit scalaire

Définition *1. Produit scalaire

Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque *1.

Usuellement, on note un produit scalaire de deux vecteurs $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$, $\langle u, v \rangle$ ou même $u \cdot v$. Dans la suite, on utilisera principalement la notation $(\cdot|\cdot)$.

Exercice *1.

Donner des exemples de produits scalaires sur les espaces : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $C(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

- pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des vecteurs de $\ell^2(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(u|v) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

- pour f et g des vecteurs de $C(I)$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(f|g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

— pour A et B des vecteurs de $M_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

Définition *2. Espace préhilbertien

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$, ou simplement E s'il n'y a pas d'ambiguïté, est appelé **espace préhilbertien**.

Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Exemple *1. Important

L'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ où, pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY,$$

est un espace euclidien. Le produit scalaire précédent est souvent désigné comme le produit scalaire **canonique** de $M_{n,1}$.

b. Norme associée à un produit scalaire

Définition *3. Norme associée au produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ et on appelle **norme associée au produit scalaire** $(\cdot|\cdot)$, l'application :

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \rightarrow \\ x & \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}. \end{cases} \mathbb{R}_+$$

De plus, on note $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ et on appelle distance associée à $\|\cdot\|$, l'application définie, pour $x, y \in E$, par :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Théorème *1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'inégalité suivante, pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Et de plus, on a $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soit $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \|tx + y\|^2 = (tx + y|tx + y).$$

Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = t^2(x|x) + 2(x|y) + (y|y) = t^2\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2.$$

Pour $x \neq 0_E$, f est une fonction polynomiale de degré 2 et on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant Δ est négatif i.e.

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Par suite,

$$(x|y)^2 \leq (\|x\|\|y\|)^2$$

Et cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$ - et c'est même une égalité dans ce cas. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, si $x \neq 0_E$ et y colinéaire à x , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et

$$|(x|y)| = |\lambda|\|x\|^2 = \pm\|x\| \cdot |\lambda|\|x\| = \|x\|\|y\|.$$

Réciproquement, pour $x \neq 0_E$, si l'égalité est vérifiée, alors $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$ donc f possède une racine λ i.e.

$$(\lambda x + y|\lambda x + y) = f(\lambda) = 0.$$

Donc par définie positivité du produit scalaire, $\lambda x + y = 0_E$; d'où x et y sont colinéaires. $\square$

Proposition *1.

Soit E un espace préhilbertien réel. La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire est une norme sur E .

Démonstration.

- $\|\cdot\|$ est positive par positivité du produit scalaire).
- Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0$, alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$ car le produit scalaire est défini positif.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$, on a :

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2(x|x) = \lambda^2\|x\|^2,$$

d'où l'homogénéité.

- Soit $x, y \in E$. On a :

$$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2,$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

d'où l'inégalité triangulaire. □

Exercice *2.

Soit $x, y \in E$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $d(x, y) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)}$.
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (*Identité du parallélogramme*).
3. $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (*Identité de polarisation*).

Correction.

Tout cet exercice repose sur les égalités :

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y | x \pm y) = \|x\|^2 \pm 2(x|y) + \|y\|^2.$$

1. On a :

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= \|x - y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 4(x|y) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Rappels et compléments sur l'orthogonalité

Définition *4. Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel.

— Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x \perp y$ si $(x|y) = 0$.

- Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ et on appelle **orthogonal** de A , l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (a|x) = 0\}.$$

- Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **orthogonaux** et on note $F \perp G$ si, pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$, $(x|y) = 0$. Autrement dit si $F \subset G^\perp$ (ou de manière équivalente, $G \subset F^\perp$).

Exercice *3.

Soit E un espace préhilbertien réel et $A \subset E$.

- Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de deux façons.
- Montrer que $A^\perp$ est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|$.

Correction.

1. Pour la première façon, il s'agit d'utiliser la définition de sous-espace vectoriel.
Pour la deuxième, on remarque que $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \text{Ker}(\varphi_a)$ où, pour $a \in A$, $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$, donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E .

2. On reprend l'égalité $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \text{Ker}(\varphi_a)$ et on remarque que :
 - pour $a \in A$ et $x \in X$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f_a(x)| = |(a|x)| \leq \|a\| \|x\|.$$

Donc f_a est $\|a\|$ -lipschitzienne et donc continue pour $\|\cdot\|$.

- $\text{Ker}(\varphi_a) = \varphi_a^{-1}(\{0\})$ donc $\text{Ker}(\varphi_a)$ est un fermé pour $\|\cdot\|$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Par suite, $A^\perp$ est fermé pour $\|\cdot\|$ comme intersection de fermé.

Exemple *2.

- Dans un espace préhilbertien réel E , on a : $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $\{(1, -1)\}^\perp = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique,

$$\text{Vect}((1, 1, 1), (1, 2, 3)) \perp \text{Vect}(1, -2, 1).$$

Définition *5. Famille orthogonale/orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{F}$ est :

— **orthogonale** si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$,

$$(x_i | x_j) = 0.$$

— **orthonormale** si, pour tous $i, j \in I$,

$$(x_i | x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

On dit qu'une famille de E est une **base orthonormale** si c'est une base et une famille orthonormale.

Exercice *4.

Soit E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les propositions suivantes :

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
2. On suppose que E admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$. Montrer que, pour tous $x, y \in E$ de décompositions dans $\mathcal{B}$, $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ (sommes finies), on a :

$$(x | y) = \sum_{i \in I} x_i y_i \text{ et } x = \sum_{i \in I} (x | e_i) e_i.$$

3. (Théorème de Pythagore) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie orthogonale de vecteurs de E . Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Proposition 1.

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien de dimension n , $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$(x | y) = {}^tXY \quad (= \langle X, Y \rangle) \text{ où } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de $\mathcal{B}$. Alors, si on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ les décompositions de x, y dans $\mathcal{B}$, par bilinéarité du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et par orthonormalité

de $\mathcal{B}$, on a, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY$$

□

Proposition *2. Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale** de E . Si on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors :

$$A = ((u(e_j)|e_i))_{1 \leq i, j \leq n},$$

et, pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x)|y) = {}^tX^tAY = {}^tYAX \text{ où } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'une part, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n (u(e_j)|e_i)e_i$ et d'autre part, par définition de A , $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$; ainsi, par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ij} = (u(e_j)|e_i)$.
- Soit $x, y \in E$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = AX$ et donc :

$$(u(x)|y) = {}^tAXY = {}^tX^tAY.$$

□

Proposition *3. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale de E telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k).$$

Plus précisément, on peut construire une telle famille $(e_1, \dots, e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt : pour $k = 1, \dots, n$

$$e_k = \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \text{ où } \varepsilon_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)e_i.$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence finie sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pour montrer que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ où les e_i sont donnés par le procédé de Gram-Schmidt :

- *Initialisation.* Pour $k = 1$, la propriété est vraie car

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

- *Hérédité.* Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose la propriété vraie pour k . On a, par hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^k (x_{k+1}|e_i)e_i}_{\in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}).$$

Par suite, $e_{k+1} = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$. De plus, on a, pour $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_{k+1} | \varepsilon_l) &= (x_{k+1} - \sum_{i=1}^k (x_{k+1} | e_i) e_i | x_l - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i) e_i) \\
 &= (x_{k+1} | x_l) - \sum_{i=1}^k (x_{k+1} | e_i)(x_l | e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_i) + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^k (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_j) \underbrace{(e_i | e_j)}_{=0 \text{ si } j \neq i} \\
 &= (x_{k+1} | x_l) - \sum_{i=1}^k (x_{k+1} | e_i)(x_l | e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_i) + \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_i) \\
 &= (x_{k+1} | x_l) - \sum_{i=1}^k (x_{k+1} | e_i)(x_l | e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_i) + \sum_{i=1}^{l-1} (x_l | e_i)(x_{k+1} | e_i)
 \end{aligned}$$

□

Corollaire *1.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F admet une base orthonormale.

Démonstration.

Comme F est de dimension finie (disons p), il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$ de F . Alors on orthonormalise cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base $\mathcal{B}'$ orthonormale de F . □

Exercice *5.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Déterminer, grâce au procédé de Gram-Schmidt, la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de la base formée des vecteurs :

$$(1, 1, 1), \quad (1, 2, 3), \quad (1, -2, 1).$$

Remarque *2.

Pour $A, B \subset E$ et F un sous-espace vectoriel de E , on a les propriétés suivantes :

- Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$,
- $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Définition-Proposition *6. Somme directe orthogonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace préhilbertien réel et $(F_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .

Si $F_1, \dots, F_n$ sont deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Dans ce cas, on dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en **somme directe orthogonale** et on note $F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_n$ la somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

Démonstration.

On suppose que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $F_i \perp F_j$.

Soit $y = x_1 + \dots + x_n \in \sum_{i=1}^n F_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in F_i$. On suppose $y = 0_E$. Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a, par linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire :

$$0 = (y|x_j) = \left(\sum_{i=1}^n x_i | x_j \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i|x_j)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = (x_j|x_j),$$

et donc $x_j = 0_E$ par définie positivité du produit scalaire.

Il en résulte que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. □

Proposition *4.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E . Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Démonstration.

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $\underbrace{(x|x)}_{\in F} = \underbrace{(x|x)}_{\in F^\perp} = 0$ donc par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x = 0_E$.

De plus, par définition, $F \perp F^\perp$.

Par suite, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale. □

Définition *7. Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F **admet un supplémentaire orthogonal** dans E si $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$ et dans ce cas, on dit que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F dans E .

Proposition *5.

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E .

— On suppose que F et G sont supplémentaires. Alors $F \perp G$ si, et seulement si, $G = F^\perp$.

— Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

- On suppose $F \perp G$. Alors $G \subset F^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in F^\perp = E = F \oplus G$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ et on a :

$$\begin{aligned} (x - x_G | x - x_G) &= (x - x_G | x_F) \\ &= \underbrace{(x | x_F)}_{=0} - \underbrace{(x | x_G)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, par définie positivité de $(\cdot | \cdot)$, $x - x_G = 0_E$, d'où $x = x_G \in G$.

Par suite, $G = F^\perp$.

La réciproque est immédiate car $F^\perp \perp F$.

- On applique le point précédent à " F " = $F^\perp$ et " G " = F . Comme $F^\perp \perp F$, on obtient alors $F = (F^\perp)^\perp$.

□

Exemple *3.

On considère les espaces vectoriels suivants munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs.

- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P} : x + y = 0$. Alors la droite $\mathcal{P}^\perp = \text{Vect}(1, 1, 0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
- Dans $C([0, 1], \mathbb{R})$, on considère le sous-espace vectoriel F des fonctions constantes. Alors le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle est le supplémentaire orthogonal de F .
- Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère le sous-espace vectoriel F des suites stationnaires en 0. Alors $F^\perp = \{0_{\ell^2(\mathbb{N})}\}$ et donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

- Comme l'équation de $\mathcal{P}$ est $x + y = 0$, le vecteur $(1, 1, 0)$ est normal (i.e. orthogonal) à $\mathcal{P}$. Ainsi, $\text{Vect}(1, 1, 0) \perp \mathcal{P}$ et ils sont donc en somme directe d'après la définition-proposition 6. De plus, on a $\dim(\mathcal{P}) + \dim(\text{Vect}(1, 1, 0)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc ils sont supplémentaires. Il en résulte, d'après la proposition 5, que $\text{Vect}(1, 1, 0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
- En analysant le problème, on remarque que si $f \in F^\perp$, alors $\int_0^1 f(t) dt = (f | \mathbf{1}) = 0$. On conjecture donc que :

$$F^\perp = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\} = \{\mathbf{1}\}^\perp.$$

Montrons le par double inclusion :

⊂. Soit $f \in F^\perp$. Alors, en particulier, on a $\mathbf{1} \in F$ donc :

$$\left(\underbrace{f}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{\mathbf{1}}_{\in F} \right) = 0$$

$$\text{D'où } f \in \{\mathbf{1}\}^\perp = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}.$$

⊃. Soit $f \in \{\mathbf{1}\}^\perp$. Pour tout $g \in F$, g est constante sur $[0, 1]$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g = c\mathbf{1}$, d'où :

$$(f | g) = (f | c\mathbf{1}) = c(f | \mathbf{1}) = 0$$

Par suite, pour tout $g \in F$, $(f|g) = 0$ et donc $f \in F^\perp$.

Notre conjecture est donc vérifiée.

— Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u(k) = (u(k)_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u(k)_n = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u(k) \in F$ car $u(k)$ est stationnaire en 0 à partir du rang $k+1$.

Soit $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^\perp$. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = (u(k)|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{kn} v_n = v_k,$$

donc v est la suite nulle.

Il en résulte que $F^\perp = \{0_{\ell^2(\mathbb{N})}\}$.

Proposition *6.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

D'après la proposition 4, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale. Montrons alors que $E = F + F^\perp$.

Soit $x \in E$. Le sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie alors on peut considérer une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de F . On pose $x_F = \sum_{i=1}^p (x|e_i) e_i \in F$. Alors on a, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (x - x_F|e_j) &= (x|e_j) - (x_F|e_j) \\ &= (x|e_j) - \sum_{i=1}^p (x|e_i)(e_i|e_j) \\ &= (x|e_j) - (x|e_j) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $x - x_F$ est orthogonal avec chacun des éléments d'une base de F , donc $x - x_F \in F^\perp$. Ainsi, $x = x_F + (x - x_F) \in F + F^\perp$.

Il en résulte que $E = F \oplus F^\perp$.

De plus, d'après ce qui précède, on a $E = F \oplus F^\perp$ et on applique alors la proposition 5. $\square$

Corollaire *2.

Soit E un espace **euclidien** et F un sous-espace vectoriel de E . Alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E).$$

Démonstration.

Comme E est de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont de dimension finie et donc d'après la proposition précédente, on a $E = F \oplus F^\perp$, d'où le résultat. $\square$

Exercice *6.

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. On pose

$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(1-t) = f(t)\} \text{ et } G = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$.
3. Que peut-on dire alors de l'existence d'un supplémentaire orthogonal pour les sous-espaces de dimension infinie ?

Correction.

1. — On a $F = \text{Ker}(u)$ où $u : E \rightarrow E$ est l'application linéaire $u : f \mapsto u(f) : t \mapsto f(t) - f(1-t)$, donc F est une sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E .
— On a $G = \text{Ker}(\varphi)$ où $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$, donc G est une sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E .
2. — Analysons le problème : si $g \in E$, alors, pour tout $f \in F$, on a, en effectuant le changement de variable $x = 1 - t$:

$$\begin{aligned} (f|g) &= \int_0^1 f(t)g(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)g(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)g(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^0 \underbrace{f(1-t)}_{=f(t)} g(1-t) dt \\ (f|g) &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)(g(t) + g(1-t)) dt \end{aligned}$$

Si $g \in F^\perp$, cette quantité doit être nulle et comme la fonction f peut prendre toutes les

valeurs possibles sur $[0, \frac{1}{2}]$, on conjecture que :

$$F^\perp = \{g \in E \mid \forall t \in [0, 1], g(1-t) = -g(t)\}.$$

Montrons la par double inclusion :

- ⊂. Soit $g \in F^\perp$. On considère la fonction $f : t \mapsto g(t) + g(1-t)$. Celle-ci est continue sur E car g l'est et on a, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(1-t) = g(1-t) + g(t) = f(t)$; d'où $f \in F$.

Alors, d'après la calcul effectué dans l'analyse précédente, on a :

$$0 = (f|g) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)(g(1-t) + g(t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)^2 dt$$

La fonction f est ainsi continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc, f est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$.

De plus, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $1-t \in [0, \frac{1}{2}]$ donc, comme $f \in F$, on a $f(t) = f(1-t) = 0$.

Il en résulte que $f = 0_E$ i.e. pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = 0$ et donc $g(1-t) = -g(t)$.

D'où $F^\perp \subset \{g \in E \mid \forall t \in [0, 1], g(1-t) = -g(t)\}$.

- ⊃. Soit $g \in E$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, $g(1-t) = -g(t)$. Alors, pour tout $f \in F$, on a, en utilisant le calcul effectué dans l'analyse initiale :

$$(f|g) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \underbrace{(g(t) + g(1-t))}_{=0} dt = 0.$$

Par suite, $g \in F^\perp$. Ainsi, $\{g \in E \mid \forall t \in [0, 1], g(1-t) = -g(t)\} \subset F^\perp$.

Notre conjecture est donc vérifiée.

- En analysant le problème, on se rend compte que si $f \in G^\perp$, f doit être nulle sur $]0, 1]$ et donc, par continuité de f en 0, que $f = 0_E$.

On conjecture ainsi que $G^\perp = \{0_E\}$. Montrons l'inclusion $G^\perp \subset \{0_E\}$; la seconde inclusion étant immédiate car $G^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Soit $f \in G^\perp$. On considère $g : t \mapsto tf(t)$. Alors g est continue sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions continues sur $[0, 1]$ et $g(0) = 0f(0) = 0$ donc $g \in G$.

Par suite, on a, d'une part, $(f|g) = 0$ et d'autre part :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt = \int_0^1 tf(t)^2 dt.$$

Par suite, la fonction $t \mapsto tf(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc elle est égale à la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) = 0$ car $tf(t)^2 = 0$.

De plus, f est continue en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$ donc $f(0) = 0$.

Par suite, f est égal à 0_E .

Il en résulte que $G^\perp = \{0_E\}$.

3. Les espaces F et G sont des sous-espaces de dimension infinie de E (la famille $(t(1-t)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de F et $(t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de G) et, d'après ce qui précède, F possède un supplémentaire orthogonal (et on remarque que ce supplémentaire est de dimension infinie lui aussi) alors que G n'en admet pas.

Conclusion : pour les sous-espaces de dimension infinie, on ne peut rien dire quant à l'existence d'un supplémentaire orthogonal en général !

Partie **

Projection orthogonale

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d .

1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition **1. Projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **projection orthogonale** sur F et on note p_F , la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$. L'image $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ par la projection orthogonale sur F est appelée **projeté orthogonal** de x sur F .

Remarque **1.

Pour F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $\text{Im}(p_F) = F$ et $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$.

Proposition **1.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F vérifie :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i.$$

Démonstration.

Comme dans la démonstration de 6, on décompose $x = y + z$ avec $y = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i \in F$ et $z \in F^\perp$. Par suite,

$$p_F(x) = \underbrace{p_F(y)}_{=y} + \underbrace{p_F(z)}_{=0_E} = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i.$$

□

Remarque **2.

La famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ obtenue à partir d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ libre de E grâce au procédé de Gram-Schmidt peut alors s'exprimer de la façon suivante : pour $k = 1, \dots, n-1$, on

note

$$F_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) (= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)).$$

et on a :

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \varepsilon_{k+1} \text{ où } \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1});$$

de plus,

$$\|\varepsilon_{k+1}\| = \sqrt{\|x_{k+1}\|^2 - \|p_{F_k}(x_{k+1})\|^2}.$$

Proposition **2.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(x_1, \dots, x_k)$ une famille génératrice de F . Pour $x, y \in E$, on a :

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ (x - y | x_i) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket. \end{cases}$$

Exercice **1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Déterminer la projection orthogonale de X^n sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Correction.

On a $\deg(p_F(X^n)) = 1$ donc $p_F(X^n) = aX + b$. De plus, on a :

$$\begin{cases} (X^n - p_F(X^n)|1) = 0 \\ (X^n - p_F(X^n)|X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{n+1} = \frac{a+2b}{2} \\ \frac{1}{n+2} = \frac{2a+3b}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6n}{(n+1)(n+2)} \\ b = \frac{2-2n}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

d'où $p_F(X^n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(6nX + 2 - 2n)$.

2. Distance à un sous-espace de dimension finie

On rappelle ici la définition de distance à une partie de E :

Définition **2. Distance à une partie

Soit $x \in E$ et $A \subset E$. On appelle **distance** de x à A et on note $d(x, A)$ la quantité

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition **3.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté orthogonale $p_F(x)$ de x sur F . Autrement dit :

- $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et ;
- pour tout $y \in F$, $d(x, F) = \|x - y\|$ implique $y = p_F(x)$.

Démonstration.

Soit $y \in F$. Alors on a $x - y = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a : $d(x, F) \geq \|x - p_F(x)\|$. Or, $p_F(x) \in F$ donc $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$. Il en résulte que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

De plus, pour $y \in F$, si $d(x, F) = \|x - y\|$, alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|y - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - d(x, F)^2 = 0.$$

□

Exercice **2.

Déterminer la quantité $A = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Correction.

On remarque, en considérant $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et en notant $\mathbb{R}_1[X]$, que

$$A = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, F)^2 = d(X^2, p_F(X^2))^2$$

En reprenant le résultat de l'exercice **1, on obtient $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$, d'où

$$A = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Corollaire **1.

Soit F un sous-espace de dimension finie k , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors on a :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^k (e_i | x)^2.$$

Démonstration.

On a $p_F(x) = \sum_{i=1}^k (e_i|x)e_i$, et $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^k (e_i|x)^2.$$

□

Théorème **1.

Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormale de E . Alors on a :

$$\sum_{i=1}^k (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration.

On applique le corollaire précédent à $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Alors on a :

$$\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \sum_{i=1}^k (e_i|x)^2 \geq \sum_{i=1}^k (e_i|x)^2.$$

□

Partie A

Adjoint d'un endomorphisme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d .

1. Représentation des formes linéaires

Théorème 1. Théorème de représentation de Riesz

Soit φ une forme linéaire sur l'espace euclidien E . Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x) = (a|x).$$

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

- **Existence** : On pose $a = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$. Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a, par linéarité de f :

$$(a|x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \varphi(x).$$

- **Unicité** : Soit $a, b \in E$ tels que, pour tous $x \in E$, $(a|x) = \varphi(x) = (b|x)$. Alors, pour tous $x \in E$:

$$(a - b|x) = (a|x) - (b|x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0.$$

Ainsi, $a - b$ appartient à l'orthogonal de E d'où $a - b = 0_E$ i.e. $a = b$.

□

Corollaire 1.

Soit H un hyperplan de E . Il existe un vecteur non nul $n \in E$ tel que $H = \{n\}^\perp$.

Démonstration.

Soit H un hyperplan de E . Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe (un unique) $n \in E$ tel que $\varphi : x \mapsto (n|x)$; de plus, comme $\varphi \neq 0$, $n \neq 0_E$ et on a :

$$H = \text{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid (n|x) = \varphi(x) = 0\} = \{n\}^\perp.$$

□

Remarque 1.

Un tel vecteur n est appelé *vecteur normal* à H ; il n'y a pas unicité d'un vecteur normal : en effet, si n est normal à H , pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λn est normal à H .

Exercice 1.

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$

Démonstration.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \text{Tr}({}^tMN)$. Comme φ est une forme linéaire, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = (B|M) = \text{Tr}({}^tBM)$. Ainsi, en posant $A = {}^tB$, on obtient :

$$\varphi(M) = \text{Tr}(AM),$$

et de plus, A est unique par unicité de B . □

2. Adjoint d'un endomorphisme

Lemme 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Démonstration.

- **Existence** : Soit $y \in E$. On note $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour $x \in E$ par $\varphi_y(x) = (u(x)|y)$. Par linéarité de u et du produit scalaire par rapport à sa première variable, φ est une forme linéaire sur l'espace euclidien E . Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $a_y \in E$ tel que $\varphi_y(x) = (a_y|x)$ pour tous $x \in E$.

Par suite, l'application $v : y \mapsto a_y$ est bien définie de E dans lui-même et on a alors, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = \varphi_y(x) = (a_y|x) = (x|a_y) = (x|v(y)).$$

De plus, pour $y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in E$, par linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable :

$$\begin{aligned} (x|v(\lambda y + \mu z)) &= (u(x)|\lambda y + \mu z) \\ &= \lambda(u(x)|y) + \mu(u(x)|z) \\ &= \lambda(x|v(y)) + \mu(x|v(z)) \\ (x|v(\lambda y + \mu z)) &= (x|\lambda v(y) + \mu v(z)); \end{aligned}$$

donc $(x|v(\lambda y + \mu z) - (\lambda v(y) + \mu v(z))) = 0$, pour tout $x \in E$, d'où :

$$v(\lambda y + \mu z) = \lambda v(y) + \mu v(z).$$

Ainsi, v est un endomorphisme de E .

Ce qui prouve l'existence.

- **Unicité** : Soit $v, w \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tous $x, y \in E$:

$$(x|v(y)) = (u(x)|y) = (x|w(y)).$$

Soit $y \in E$. alors pour tout $x \in E$:

$$(x|v(y) - w(y)) = (x|v(y)) - (x|w(y)) = (u(x)|y) - (u(x)|y) = 0.$$

Par suite, $v(y) = w(y)$.

Donc $v = w$. Ce qui prouve l'unicité. □

Le lemme précédent légitime la définition suivante :

Définition 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **endomorphisme adjoint** - ou simplement **adjoint** - de u l'unique endomorphisme de E noté u^* tel que, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

Exemple 1.

- Si u est une homothétie de E , alors $u^* = u$.

En effet, pour $u = \lambda \text{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (\lambda x|y) = \lambda(x|y) = (x|\lambda y) = (x|u(y)).$$

Par suite, $u^* = u$.

- Pour $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f : (x, y) \mapsto (x + 2y, x)$, on a $f^* = g : (x, y) \mapsto (x + y, 2x)$.

En effet, pour tous $(x, y), (a, b) \in E$:

$$(f(x, y)|(a, b)) = (x + 2y)a + xb = x(a + b) + y.2a = ((x, y)|g(a, b))$$

Par suite, $f^* = g$.

3. Propriétés de l'adjoint

Proposition 2. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormale

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E . On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$. L'endomorphisme v est l'adjoint de u i.e. $v = u^*$ si, et seulement si, $B = {}^tA$. En particulier, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$.

Démonstration.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, u^* son adjoint, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E . On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

($\Rightarrow$) On suppose $v = u^*$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$b_{ij} = (u^*(e_j)|e_i) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = a_{ji}.$$

car u^* est l'adjoint de u .

Par suite, on a $B = {}^tA$.

($\Leftarrow$) On suppose $B = {}^tA$. Soit $x, y \in E$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. On a :

$$(u(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX \underbrace{{}^tA}_{=B} Y = {}^tX(BY) = (x|v(y))$$

Par suite, par unicité de l'adjoint de u , on a $v = u^*$. □

Proposition 3.

L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

Notons $\text{Ad} : u \mapsto u^*$.

— 1ère façon : avec la définition.

L'application Ad va bien de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) \\ &= \lambda(x|u^*(y)) + \mu(x|v^*(y)) \\ ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= (x|(\lambda u^* + \mu v^*)(y)). \end{aligned}$$

Donc, par unicité de l'adjoint :

$$\text{Ad}(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda \text{Ad}(u) + \mu \text{Ad}(v).$$

Par suite Ad est linéaire.

Montrons que Ad est involutive. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $v = u^*$. Pour tous $x, y \in E$:

$$(v(x)|y) = (u^*(x)|y) = (x|u(y)),$$

donc $v^* = u$ par unicité de l'adjoint. Ainsi, $\text{Ad}^2(u) = \text{Ad}(v) = v^* = u$ i.e. Ad est une involution.

Ainsi, Ad est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(\mathcal{L}(E)), +, \circ)$ car, étant une involution, il est sa propre inverse ; d'où Ad est bijective et donc un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

- 2^{de} façon : avec la proposition précédente. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . L'application $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (et même d'algèbres) et l'application $T : A \mapsto {}^tA$ est un automorphisme involutif de $M_n(\mathbb{R})$. Or, on a :

$$\text{Ad} = M^{-1} \circ T \circ M,$$

en effet, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a, d'après la proposition précédente :

$$M^{-1} \circ T \circ M(u) = M^{-1}(T(A)) = M^{-1}({}^tA) = u^* = \text{Ad}(u).$$

Donc $\text{Ad} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels comme composée d'isomorphismes d'espaces vectoriels.

De plus, comme T est involutif, on a :

$$\text{Ad}^2 = (M^{-1} \circ T \circ M) \circ (M^{-1} \circ T \circ M) = M^{-1} \circ T^2 \circ M = M^{-1} \circ T \circ M = \text{Ad}.$$

Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.
□

Proposition 4.

Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Correction.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} (u \circ v(x)|y) &= (u(v(x))|y) \\ &= (v(x)|u^*(y)) \\ &= (x|v^*(u^*(y))) \\ (u \circ v(x)|y) &= (x|v^* \circ u^*(y)). \end{aligned}$$

Donc, par unicité de l'adjoint $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Remarque : on aurait pu également utiliser une base orthonormale et utiliser la caractérisation matricielle de l'adjoint en remarquant que, pour toutes matrices A, B , ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Proposition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp \text{ et } \text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrons tout d'abord les inclusions suivantes :

- Montrons $\text{Ker}(u^*) \subset \text{Im}(u)^\perp$. Soit $x \in \text{Ker}(u^*)$. Alors, pour tout $y \in \text{Im}(u)$, il existe

$x' \in E$ tel que $y = u(x')$ et on a :

$$(x|y) = (x|u(x')) = \underbrace{(u^*(x)|x')}_{=0_E} = 0$$

D'où $x \in \text{Im}(u)^\perp$. Par suite, $\text{Ker}(u^*) \subset \text{Im}(u)^\perp$.

- Montrons que $\text{Im}(u^*) \subset \text{Ker}(u)^\perp$. Soit $y \in \text{Im}(u^*)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^*(x)$ et on a, pour tout $x' \in \text{Ker}(u)$:

$$(y|x') = (u^*(x)|x') = (x|\underbrace{u(x')})_{=0_E} = 0$$

D'où $y \in \text{Ker}(u)^\perp$. Par suite, $\text{Im}(u^*) \subset \text{Ker}(u)^\perp$.

Montrons les inclusions réciproques. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (comme E est euclidien ici, tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie), $(F^\perp)^\perp = F$ et si $A, B \subset E$ tels que $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Ainsi, on a, d'après les inclusions précédentes appliquées à $v = (u^*)^* = u$ (car la passage à l'adjoint est involutif) :

—

$$\text{Ker}(u) = \text{Ker}((u^*)^*) \subset \text{Im}(u^*)^\perp$$

d'où :

$$\text{Ker}(u)^\perp \supset \text{Im}(u^*).$$

Par suite, $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$.

—

$$\text{Im}(u) = \text{Im}((u^*)^*) \subset \text{Ker}(u^*)^\perp$$

d'où :

$$\text{Im}(u)^\perp \supset \text{Ker}(u^*).$$

Par suite, $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.

□

Exercice 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer (par forcément dans l'ordre indiqué) que :

$$\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u) \quad \text{Tr}(u^*) = \text{Tr}(u) \quad \det(u^*) = \det(u)$$

et en terme de réduction :

$$\chi_{u^*} = \chi_u \quad \text{Sp}(u^*) = \text{Sp}(u) \quad \pi_{u^*} = \pi_u.$$

En déduire les liens potentiels entre diagonalisation/trigonalisation de u et u^* .

Proposition 6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

Démonstration.

On suppose F stable par u . Soit $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $u(y) \in F$ et :

$$(u^*(x)|y) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in F}) = 0$$

D'où $u^*(x) \in F^\perp$.

Il en résulte que $F^\perp$ est stable par u^* . □

Partie B

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d .

1. Matrices orthogonales

a. Définitions

Définition 2. Matrice orthogonale

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit M est une **matrice orthogonale** si ${}^tMM = I_n$.

On appelle **groupe orthogonal** d'ordre n et on note $O_n(\mathbb{R})$ (ou encore $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ i.e.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}.$$

Définition-Proposition 3.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$;

— si $\det(M) = 1$, on dit M est une matrice orthogonale **directe** (ou **positive**) ;

— si $\det(M) = -1$, on dit M est une matrice orthogonale **indirecte** (ou **négative**) ;

On appelle **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et on note $SO_n(\mathbb{R})$ (ou encore $SO(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales directes i.e.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Définition 4. Matrices orthogonalement semblables

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **orthogonalement semblables** s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PA{}^tP$.

b. Propriétés des matrices orthogonales

On justifie ici la terminologie de "groupe" (spécial) orthogonal :

Proposition 7.

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

En particulier, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} = {}^tM$.

Proposition 8.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

La matrice M est une matrice orthogonale si, et seulement si, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Le même résultat est valable pour les lignes de M .

2. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

On rappelle que dans cette partie, E est en particulier un espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 5. Orientation

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ **définissent la même orientation de E** si $\det(P) > 0$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Orienter l'espace E revient à se fixer une base $\mathcal{B}$ de référence. Ce choix étant fait, on appelle **bases directes**, les bases qui définissent la même orientation que $\mathcal{B}$ et **bases indirectes**, les autres.

Exemple 2.

On oriente $\mathbb{R}^3$ grâce à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors la base (e_2, e_3, e_1) est directe et la base (e_1, e_3, e_2) est indirecte.

Exercice 3.

Montrer que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ne change pas l'orientation d'une base.

Proposition 9.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ et de plus, $P \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ définissent la même orientation de E .

Proposition 10.

On suppose que E est orienté. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E , alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

3. Isométries vectorielles

a. Définitions et premières propriétés

Définition 6. Isométrie vectorielle

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou également un **automorphisme orthogonal**) si, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in O(E)$ alors u est un automorphisme de E .

Démonstration.

On suppose $u \in O(E)$. Alors $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$; en effet, si $x \in \text{Ker}(u)$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0$, donc par séparation de la norme, $x = 0_E$. Par suite, u est un endomorphisme injectif en dimension finie : il est donc bijectif; ainsi, u est un automorphisme de E . $\square$

Proposition 12.

Soit $u \in O(E)$. On a $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors, pour tout vecteur propre unitaire x associé à λ , on a :

$$1 = \|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

D'où $\lambda = \pm 1$. $\square$

Exemple 3.

— Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

En effet, soit s une symétrie orthogonale de E . Alors s est la symétrie sur $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $F^\perp$, donc, pour tout $x \in E$, on a $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$ et donc $s(x) = y - z$; ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|s(x)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc s est une isométrie vectorielle.

— En particulier, toute réflexion i.e. symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, est une isométrie vectorielle.

b. Caractérisations des isométries vectorielles

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$(u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Démonstration.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tous $x, y \in E$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x)|u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|.$$

D'où $u \in O(E)$.

($\Rightarrow$) Soit $x, y \in E$. On a :

$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2} (\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x|y).$$

□

Proposition 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, $u^* = u^{-1}$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) On suppose $u \in O(E)$. Soit $x, y \in E$. Comme u est bijective, il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Par suite, comme $z = u^{-1}(y)$ et d'après la proposition précédente :

$$(u(x)|y) = (u(x)|u(z)) \underset{u \in O(E)}{=} (x|z) = (x|u^{-1}(y))$$

Ainsi, par unicité de l'adjoint de u , $u^* = u^{-1}$.

($\Leftarrow$) On suppose $u^* = u^{-1}$. Soit $x \in E$. On a :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|\underbrace{u^*(u(x))}_{=u^{-1}(u(x))}) = (x|x) = \|x\|^2.$$

Par suite, u est une isométrie vectorielle de E .

□

Proposition 15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E . Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, l'image de la base $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormale de E .

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

- $(\Rightarrow)$. On suppose $u \in O(E)$. Comme u est un isomorphisme, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de E . De plus, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}.$$

Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale.

- $(\Leftarrow)$. On suppose que $\mathcal{B}' = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale. Soit $x \in E$. On a :

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)u(e_i),$$

Par suite, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Il en résulte que $u \in O(E)$.

□

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Cela découle du fait que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$. □

Remarque 2.

On a alors un isomorphisme de groupes entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.

c. Le groupe spécial orthogonal

Proposition 16.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration.

On suppose $u \in O(E)$. Alors, pour $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , on a, d'après le corollaire précédent, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\det(u) = \det(M) = \pm 1$. □

Définition 7.

Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle **directe** si $\det(u) = 1$ et **indirecte** si $\det(u) = -1$.

On appelle **groupe spécial orthogonal** et on note $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles directes de E i.e.

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}.$$

Remarque 3.

On considère que E est orienté. Si $u \in SO(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe, alors la base orthonormale formée par l'image de $\mathcal{B}$ par u est directe.

Proposition 17.

Le groupe orthogonal est un sous-groupe de $GL(E)$ et le groupe spécial orthogonal $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

4. Isométries vectorielles en dimension 2

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien de dimension 2.

Notation 1.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Proposition 18.

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

- $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$.
- R_θ est inversible et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Démonstration.

— On a, d'après les formules d'additions de cos et sin :

$$\begin{aligned}
 R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
 R_\theta R_{\theta'} &= R_{\theta + \theta'}
 \end{aligned}$$

De plus, $R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta' + \theta} = R_{\theta + \theta'} = R_\theta R_{\theta'}$.

— D'après le résultat précédent, on a :

$$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta - \theta} = R_0 = I_2.$$

donc R_θ est inversible et son inverse est $R_{-\theta}$.

□

Proposition 19.

Soit E un espace euclidien de dimension 2, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in O(E)$.

— Si u est indirecte il existe un unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta.$$

— Si u est directe i.e. $u \in SO(E)$, il existe un unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta.$$

Démonstration.

Soit E un espace euclidien de dimension 2, $u \in O(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E .

Alors, comme u est linéaire, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $u(e_1) = ae_1 + be_2$ et $u(e_2) = ce_1 + de_2$. Comme $u \in O(E)$, d'après la proposition 15, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormale de E et donc

$$\begin{cases} \text{i)} & a^2 + b^2 = \|u(e_1)\|^2 = 1 \\ \text{ii)} & c^2 + d^2 = \|u(e_2)\|^2 = 1 \\ \text{iii)} & ac + bd = (u(e_1)|u(e_2)) = 0 \end{cases}$$

Par suite, d'après les égalités i) et ii), il existe des uniques (à 2π près) $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ et $c = \sin(\theta')$, $d = \cos(\theta')$.

De plus, on a, d'après l'égalité iii) :

$$\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') = bd + ac = 0$$

Ainsi $\theta + \theta' = 0 \pmod{\pi}$ d'où $\theta' = -\theta + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$d = (-1)^k \cos(\theta) \text{ et } c = (-1)^{k+1} \sin(\theta)$$

i.e.

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_{\theta} \text{ ou } S_{\theta}$$

On remarque alors que $\det(R_{\theta}) = 1$ et $\det(S_{\theta}) = -1$. Ainsi :

- Si u est indirecte, $\det(u) = -1$ d'où $M = S_{\theta}$.
- Si u est directe, $\det(u) = 1$ d'où $M = R_{\theta}$.

□

Théorème 2. Classification des matrices orthogonales 2×2

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

- Si M est indirecte i.e. $\det(M) = -1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = S_{\theta}$.
- Si M est directe i.e. $\det(M) = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_{\theta}$.

Démonstration.

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. On considère alors l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M . Alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

Par suite, d'après le corollaire 2, $u \in O(\mathbb{R}^2)$. On remarque que $\det(M) = \det(u)$ et donc, d'après la proposition 19 :

- Si $\det(M) = -1$, alors $\det(u) = -1$ d'où, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = S_{\theta}$.
- Si $\det(M) = 1$, alors $\det(u) = 1$ d'où, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_{\theta}$.

□

Proposition 20.

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Démonstration.

Soit $M, N \in SO_2(\mathbb{R})$. D'après le théorème précédent, il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $M = R_{\theta}$ et $N = R_{\theta'}$. Ainsi, d'après la proposition 18, on a :

$$MN = R_{\theta}R_{\theta'} = R_{\theta'}R_{\theta} = NM.$$

Donc $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

□

Théorème 3. Classification des isométries vectorielles en dimension 2

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in O(E)$.

- Si u est indirecte, alors u est une réflexion i.e. une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle (car $\dim(E) = 2$).
- Si u est directe i.e. $u \in SO(E)$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ à 2π près tel que, **pour toute**

base orthonormale directe $\mathcal{B}$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_{\theta}$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe.

- On suppose u est indirecte. D'après la proposition 19, il existe un unique, à 2π près, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S_{\theta}$. De plus, on a $M^2 = I_2$, donc $u^2 = \text{Id}_E$ d'où u est une symétrie. De plus, pour $x, y \in E$ tels que $u(x) = x$ et $u(y) = -y$, on a, comme $u \in O(E)$:

$$(x|y) = (u(x)|u(y)) = (x|-y) = -(x|y),$$

d'où $(x|y) = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux, d'où u est une symétrie orthogonale.

Comme $\det(u) = -1$, $u \neq \pm I_2$, donc u étant une symétrie de E de dimension 2, on a $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id}_E)) = 1$ et ainsi, u est une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.

Remarque : on aurait également pu considérer la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que :

$$\varepsilon_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2 \text{ et } \varepsilon_2 = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$$

et montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E et que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc que u est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(\varepsilon_1)$.

- On suppose u est directe. D'après la proposition 19, il existe une unique, à 2π près, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_{\theta} \in SO_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale directe et donc de même orientation que $\mathcal{B}$. Notons $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

D'après la proposition 9, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$. Ainsi, par commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$, on a :

$$N = P^{-1}MP = P^{-1}PM = M.$$

Il en résulte que la forme matricielle de u ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie et donc θ est le même (toujours à 2π près) quelque soit la base orthonormale directe choisie. □

Proposition 21.

Les groupes $(\mathbb{U}, \times)$ et $(SO(E), \circ)$ sont isomorphes.

Démonstration.

On suppose que E est orienté. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E . Pour $r \in SO(E)$, d'après le théorème précédent, il existe un unique, à 2π près, $\theta_r \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_{\theta_r}$. On construit alors l'application $\varphi : SO(E) \rightarrow \mathbb{U}$ telle que, pour $r \in SO(E)$:

$$\varphi(r) = e^{i\theta_r}.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)}$, l'unicité à 2π près de θ_r pour $r \in SO(E)$ garantit que $\varphi(r)$ est bien défini et donc que φ est bien définie sur $SO(E)$.

— Montrons que φ est un morphisme. On a, pour tout $r, r' \in SO(E)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r \circ r') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r') = R_{\theta_r}R_{\theta_{r'}} = R_{\theta_r + \theta_{r'}},$$

donc

$$\varphi(r \circ r') = e^{i(\theta_r + \theta_{r'})} = e^{i\theta_r}e^{i\theta_{r'}} = \varphi(r)\varphi(r')$$

Par suite, φ est un morphisme de groupes.

— Montrons que φ est injective. Si $r \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(r) = 1 = e^{i0}$, donc $\theta_r = 0 [2\pi]$. Par suite, $r = \text{Id}_E$. Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{Id}_E\}$ et donc φ est injective.

— Montrons que φ est surjective. Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . On pose $r = \text{Mat}_{\mathcal{B}}^{-1}(R_{\theta})$. Alors, par construction de φ , on a $\varphi(r) = e^{i\theta}$.

Par suite, φ est surjective.

Il en résulte que φ est un isomorphisme et donc $\mathbb{U}$ et $SO(E)$ sont isomorphes. $\square$

Lemme 2.

On note $U = S(0_E, 1)$ l'ensemble des vecteurs unitaires de E .

— pour tous $u, v \in U$, il existe un unique $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$.

— La relation binaire $\sim$ sur U^2 définie, pour $(u, v), (u', v') \in U^2$, par :

$$(u, v) \sim (u', v') \text{ si } \exists r \in SO(E), v = r(u) \text{ et } v' = r(u')$$

est une relation d'équivalence sur U^2 .

— Les classes d'équivalence de $\sim$ sont en bijection avec $SO(E)$.

Démonstration.

— Soit $u, v \in U$. On pose $e_1 = u$ et on complète la famille (e_1) en une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E . Alors $v = xe_1 + ye_2$ et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$x^2 + y^2 = \|v\|^2 = 1$$

Considérons l'application linéaire $r : E \rightarrow E$ telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, ${}^tMM = I_2$ et $\det(M) = 1$ (faire les calculs), alors $r \in SO(E)$. De plus, on a :

$$r(u) = r(e_1) = xe_1 + ye_2 = v$$

D'où l'existence de $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$.

Montrons l'unicité : soit $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$. On reprend les notations utilisées

dans l'existence, et on pose $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , $N \in O_2(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc la première colonne de B est $N_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; or comme $N \in O_2(\mathbb{R})$, sa deuxième colonne est $N_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ car (N_1, N_2) est une base orthonormale de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. On aurait le même résultat pour $r' \in SO(E)$ tel que $v = r'(u)$, d'où, pour tous $r, r' \in SO(E)$ tels que $r(u) = v = r'(u)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r')$$

Et donc $r = r'$ par injectivité de l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$.
D'où l'unicité.

- Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur U^2 .
 - (Réflexivité)
Soit $(u, v) \in U^2$. D'après le point précédent, il existe $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$ (et $v = r(u)$), d'où $(u, v) \sim (u, v)$.
 - (Symétrie)
Soit $(u, v), (u', v') \in U^2$. On suppose $(u, v) \sim (u', v')$. Alors il existe $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$ et $v' = r(u')$; donc il existe $r \in SO(E)$ tel que $v' = r(u')$ et $v = r(u)$. D'où $(u', v') \sim (u, v)$.
 - (Transitivité)
Soit $(u, v), (u', v'), (u'', v'') \in U^2$. On suppose $(u, v) \sim (u', v')$ et $(u', v') \sim (u'', v'')$. Alors il existe $r, r' \in SO(E)$ tels que $v = r(u)$ et $v' = r(u')$, et $v' = r'(u')$ et $v'' = r'(u'')$; par unicité du $r \in SO(E)$ tel que $v' = r(u')$ (point précédent), on a $r = r'$ donc $v = r(u)$ et $v'' = r(u'')$ i.e. $(u, v) \sim (u'', v'')$.
- On considère l'application $f : U^2 \rightarrow SO(E)$ qui à un couple $(u, v) \in U^2$ associe $r \in SO(E)$ telle que $v = r(u)$. L'application f est bien définie par unicité d'un tel r . Voyons quelques propriétés de f qui nous aiderons à construire notre bijection :
 - * pour $(u, v) \in U^2$ et pour tout couple $(u', v') \in \text{Cl}(u, v)$ (classe d'équivalence de (u, v)), on a, par définition de $\sim$, $f(u, v) = f(u', v')$.
Par suite, f est constante sur chaque classe d'équivalence.
 - ** Réciproquement, si pour $(u, v), (u', v') \in U^2$, $f(u, v) = r = f(u', v')$, alors $v = r(u)$ et $v' = r(u')$, donc $(u, v) \sim (u', v')$.
 - *** L'application f est surjective : en effet, pour $r \in SO(E)$, on a, pour $u \in U$, $f(u, r(u)) = r$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. On construit alors l'application $\tilde{f} : \mathcal{C} \rightarrow SO(E)$ de la manière suivante :

pour $C \in \mathcal{C}$, on pose $\tilde{f}(C) = f(u, v)$ pour un certain (u, v) quelconque dans C .

D'après *, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\tilde{f}(C)$ est bien défini, et donc l'application $\tilde{f}$ est bien définie.

Remarque : cette construction est classique quand on a une application constante sur des classes d'équivalence, on l'appelle la factorisation de f

Montrons que $\tilde{f}$ est une bijection.

- (injectivité) Soit $C, C' \in \mathcal{C}$. On suppose $\tilde{f}(C) = \tilde{f}(C')$. Alors pour $(u, v) \in C$ et $(u', v') \in C'$, on a :

$$f(u, v) = \tilde{f}(C) = \tilde{f}(C') = f(u', v')$$

donc d'après **, $(u, v) \sim (u', v')$ et donc $C = C'$.

D'où $\tilde{f}$ est injective.

- (surjectivité) Pour $r \in SO(E)$, d'après ***, il existe $(u, v) \in U^2$ tel que $f(u, v) = r$. On pose $C = \text{Cl}(u, v) \in \mathcal{C}$. Alors,

$$\tilde{f}(C) = f(u, v) = r$$

D'où $\tilde{f}$ est surjective.

Il en résulte que $\tilde{f}$ est une bijection.

□

Dans cette définition, on reprend les notations du lemme précédent.

Définition 8. Angle orienté

Soit $(u, v) \in (E \setminus \{0_E\})^2$. On appelle **angle orienté** du couple (u, v) et on note $\widehat{(u, v)}$ la classe d'équivalence du couple $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ par la relation d'équivalence $\sim$.

En utilisant le lemme 2 et le théorème 3, on justifie la bonne définition de la notion de *mesure d'un angle orienté* :

Définition 9. Mesure d'un angle orienté

On suppose E orienté.

Soit $\widehat{(u, v)}$ l'angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls (u, v) . On appelle **mesure de l'angle orienté** $\widehat{(u, v)}$ l'unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $r = R_\theta$ où r est l'unique élément de $SO(E)$ qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{v}{\|v\|}$.

Remarque 4.

L'orientation de E est importante : si on change l'orientation de E i.e. on prend une base orthonormale indirecte par rapport à l'orientation initiale et qu'on oriente E avec cette nouvelle base, la mesure d'un angle qui valait θ vaudra $-\theta$.

Définition 10. Rotation d'un espace de dimension 2

Soit $\widehat{(u, v)}$ l'angle orienté de mesure $\theta \in \mathbb{R}$.

On appelle **rotation d'angle orienté** $\widehat{(u, v)}$ l'unique élément r de $SO(E)$ qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{v}{\|v\|}$.

De plus, si E est orienté, on dira que r est la **rotation d'angle de mesure** θ .

Proposition 22.

Soit $r \in SO(E)$ et $u \in E \setminus \{0_E\}$.

- l'application r est la rotation d'angle orienté $\widehat{(u, r(u))}$.
 - si E est orienté et si on note θ est la mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, r(u))}$, alors r est la rotation d'angle de mesure θ .
- En particulier, dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale directe de E ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_{\theta}.$$

5. Réduction des isométries vectorielles

a. Cas général

Proposition 23.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est une isométrie vectorielle de F i.e. $u_F \in O(F)$.

Démonstration.

Pour tout $x \in F$, on a :

$$\|u_F(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc $u_F \in O(F)$. □

Proposition 24.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u , alors $F^{\perp}$ est stable par u .

Démonstration.

Soit $y \in F^{\perp}$. Comme $u_F \in O(F)$, u_F est une bijection, pour tout $x \in F$, il existe $x' \in F$ tel que $x = u_F(x') = u(x')$ et donc on a :

$$(u(y)|x) = (u(y)|u(x')) = (\underbrace{y}_{\in F^{\perp}} | \underbrace{x'}_{\in F}) = 0.$$

Ainsi, $u(y) \in F^{\perp}$ donc $F^{\perp}$ est stable par u . □

Lemme 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors E possède un sous-espace vectoriel stable par u de dimension 1 ou 2 i.e. une droite ou un plan.

Démonstration.

Le polynôme minimal π_u de u est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et comme $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$ alors π_u se décompose en produit $P_1 \dots P_k$ de facteurs irréductibles de degré 1 ou 2. De plus, comme π_u est annulateur, on a : $\pi_u(u) = P_1(u) \circ \dots \circ P_k(u) = 0$, donc il existe $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $P_i(u)$ n'est pas injectif. Alors, pour $x \in \text{Ker}(P_i(u))$, $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u . En effet, comme $P_i(u)(x) = 0$ et $\deg(P_i) = 1$ ou 2 , $u^2(x)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u(x)$ et de x .

Il en résulte que F est une droite ou un plan stable par u . $\square$

Théorème 4.

Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs où les blocs sont de la forme :

$$I_p \quad ; \quad -I_q \quad ; \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $p, q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

On démontre le résultat par récurrence double sur la dimension de E , c'est-à-dire, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$\mathcal{P}_n$ = "pour tout espace euclidien de dimension n , pour tout $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle la matrice de u possède la forme annoncée."

est vraie.

• Initialisation :

- Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Soit E un espace euclidien de dimension 1 et $u \in O(E)$. Comme u est linéaire et E de dimension 1 sur $\mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u : x \mapsto ax$. Or, comme $u \in O(E)$, on a, pour $x \in E \setminus \{0_E\}$ (un tel x existe car $\dim(E) > 0$) :

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|ax\| = |a|\|x\|$$

d'où $a = \pm 1$. Il en résulte que toute matrice de u (et donc dans une base orthonormée de E) possède la forme annoncée - ici (± 1) .

- Montrons que $\mathcal{P}_2$ est vraie. D'après le théorème 3, selon le déterminant de u , s est une réflexion ou une rotation. Or, pour une réflexion s , il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et pour une rotation r , dans n'importe quelle base orthonormale $\mathcal{B}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta$ pour un certain θ dans $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

• Hérité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Soit E un espace euclidien de dimension $n+2$ et $u \in O(E)$. D'après le lemme précédent, il existe F de dimension 1 ou 2 tel que F est stable par u . Comme $u \in O(E)$ et F est stable par u , d'après la proposition 24, $F^\perp$ est stable par u .

- Comme $\dim(F) = 1$ ou 2 et $u_F \in O(F)$ (d'après la proposition 23), d'après l'initialisation, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F tel que sa matrice possède la forme annoncée.

— On a $E = F \oplus F^\perp$ donc $\dim(F^\perp) = n$ ou $n+1$ et $u_{F^\perp} \in O(F^\perp)$ (d'après la proposition 23). Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ telle que la matrice de $u_{F^\perp}$ possède la forme annoncée.

La base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant les bases précédentes de F et $F^\perp$ est orthonormale (c'est bien une base car F et $F^\perp$ sont supplémentaires, et elle est orthonormale car F et $F^\perp$ sont orthogonaux et les deux bases sont orthonormales). De plus, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs dont le premier bloc est la matrice de u_F dans $\mathcal{B}_F$ et le second bloc est la matrice de $u_{F^\perp}$ dans $\mathcal{B}_{F^\perp}$: ainsi la matrice de u a bien la forme annoncée.

Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. $\square$

Remarque 5.

Ainsi, si u est une isométrie vectorielle, il existe une base orthonormale telle que sa matrice A dans cette base est :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{array} \right)$$

où $p, q, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (plus précisément $k \leq n/2$) et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\theta_i \in \mathbb{R}$.

b. Cas d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3

Proposition 25.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe i.e. $u \in O(\mathbb{R}^3)$ et $\det(u) = 1$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

On applique le théorème précédent et en utilisant le fait que $\det(u) = 1$. $\square$

Définition-Proposition 11. Rotation de l'espace

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe. Alors il existe une droite $\mathcal{D}$ stable par u et $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que l'endomorphisme $u_{\mathcal{P}}$ induit par u sur $\mathcal{P}$ est une rotation d'angle θ où $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à $\mathcal{D}$.

Un tel endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ est appelé **rotation d'axe $\mathcal{D}$** .

Démonstration.

D'après la proposition précédente, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale telle que :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}(e_1)$ est stable par u et le plan $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_2, e_3)$ vérifie $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$ et

$$u_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

□

Partie C

Endomorphismes autoadjoints

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d .

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n .

1. Définition et propriétés

Définition 12. *Endomorphisme autoadjoint*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** (ou encore **symétrique**) si $u^* = u$ i.e si, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Proposition 26.

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

L'endomorphisme nul vérifie, pour tous $x, y \in E$:

$$(x|0(y)) = (x|0) = 0 = (0|y) = (0(x)|y).$$

donc $0 \in \mathcal{S}(E)$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{S}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= (\lambda u(x) + \mu v(x)|y) \\ &= \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) \\ &= \lambda(x|u(y)) + \mu(x|v(y)) \\ &= (x|\lambda u(y) + \mu v(y)) \\ ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= (x|(\lambda u + \mu v)(y)) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

On aurait pu également remarquer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme noyau de l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ défini par $f : u \mapsto u^* - u$; et f est bien linéaire car $f = Ad - Id_{\mathcal{L}(E)}$. $\square$

Proposition 27.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E . Alors u est autoadjoint i.e. $u \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique i.e. $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, d'après la proposition 2, u est autoadjoint si, et seulement si, ${}^tA = A$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 6.

La proposition précédente fournit un isomorphisme entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On obtient alors que :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 28.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u alors l'endomorphisme induit u_F de u sur F est autoadjoint i.e. $u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Démonstration.

Soit $x, y \in F$. Alors on a

$$(x|u_F(y)) = (x|u(y)) = (u(x)|y) = (u_F(x)|y).$$

Donc u_F est autoadjoint. $\square$

Proposition 29.

Soit p un projecteur et $F = \text{Im}(p)$. Alors p est la projection orthogonale sur F si, et seulement si, p est autoadjoint.

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose que p est la projection orthogonale sur F . On a $F^\perp = \text{Ker}(p)$, donc pour tout $x, y \in E$, on a :

$$(p(x)|y) = (p(x)|\underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(y)}_{\in F}) = (p(x)|p(y))$$

et par un calcul similaire,

$$(x|p(y)) = (p(x)|p(y))$$

d'où $(p(x)|y) = (x|p(y))$. Ainsi, p est autoadjoint.

- ($\Leftarrow$). On suppose p autoadjoint. Il suffit de montrer que $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$. Soit $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Ker}(p)$. Alors :

$$(x|y) = (p(x)|y) = (x|p(y)) = (x|0_E) = 0.$$

Donc p est la projection orthogonale sur F .

□

Exercice 4.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E i.e. $s^2 = \text{Id}_E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $s \in \mathcal{S}(E)$.

Correction.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors p est un projecteur de E et on a :

$$s \in \mathcal{S}(E)$$

si, et seulement si,

$$p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) \in \mathcal{S}(E) \text{ (car } \mathcal{S}(E) \text{ est un espace vectoriel et } \text{Id}_E \in \mathcal{S}(E))$$

si, et seulement si,

p est un projecteur orthogonal

si, et seulement si,

$$s = 2p - \text{Id}_E \text{ est une symétrie orthogonale.}$$

Proposition 30.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$ alors

$$E_\lambda(u) \perp E_\mu(u).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda, \mu \in \text{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors on a :

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y),$$

et donc $(\lambda - \mu)(x|y) = 0$ d'où $(x|y) = 0$ car $\lambda - \mu \neq 0$.

□

Remarque 7.

Compte tenu de la proposition précédente, on sait ainsi que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont en somme directe orthogonale.

2. Réduction des endomorphismes autoadjoints

Définition 13.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe une base orthonormale de E telle que la matrice u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **orthogonalement diagonalisable** s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$A = PD^tP (= PDP^{-1}).$$

Proposition 31.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est orthogonalement diagonalisable, alors u est autoadjoint.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A est orthogonalement diagonalisable, alors A est une matrice symétrique.

Remarque 8.

Le but de ce paragraphe est de montrer que la réciproque de la proposition est vraie : il s'agira du théorème spectral.

Proposition 32.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A admet au moins une valeur propre réelle et de plus, toutes ses valeurs propres de A sont réelles i.e. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère A comme une matrice à coefficients complexes. Alors A possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ . Alors on a, d'une part :

$${}^tX A \overline{X} = {}^tA X \overline{X} = \lambda {}^tX \overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2;$$

et d'autre part

$${}^tXAX = {}^tX\overline{AX} = {}^tX\overline{\lambda X} = \overline{\lambda} {}^tX\overline{X} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2;$$

Or, comme $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$. Par suite, $\lambda = \overline{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 33.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u possède au moins une valeur propre.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique réelle. De plus, le polynôme caractéristique χ_u de u possède au moins une racine λ dans $\mathbb{C}$ et donc $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc λ est une valeur propre réelle de u . □

Proposition 34.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

Démonstration.

On applique la proposition 6 avec l'hypothèse $u^* = u$. □

Théorème 5. Théorème spectral

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u est orthogonalement diagonalisable i.e. :

- E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; ou de manière équivalente,
- E possède une base orthonormale de vecteurs propres de u .

Démonstration.

D'après le proposition 33, u possède au moins une valeur propre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ la liste de toutes les valeurs propres deux à deux distinctes de u . On note F le sous-espace vectoriel de E :

$$F = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(u).$$

Alors F est stable par u donc $G = F^\perp$ l'est aussi.

Comme u est autoadjoint, l'endomorphisme u_G par u sur G l'est aussi. Supposons par l'absurde

que $G \neq \{0_E\}$, u_G est autoadjoint donc il possède une valeur propre réelle λ et ainsi un vecteur propre $x \in G \setminus \{0_E\}$ associé à λ . Or tout vecteur propre appartient à F , donc $x \in F \cap G = F \cap F^\perp = \{0_E\}$. contradiction !

Par suite $F^\perp = \{0_E\}$ et donc

$$E = F \oplus F^\perp = F = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(u).$$

□

Théorème 6. Théorème Spectral (version matriciel)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A est orthogonalement diagonalisable i.e. il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que

$$A = PD^tP$$

Démonstration.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, de sa base canonique $\mathcal{B}$ qui est orthonormale pour ce produit scalaire et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A . Alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc, comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$. Par suite, la matrice P formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ vérifie que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et de plus, comme ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $P \in O_n(\mathbb{R})$. □

Remarque 9.

Attention, ce dernier résultat est faux dans $\mathbb{C}$: une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable (cf. exercice suivant) .

Exercice 5.

1. Diagonaliser dans une base orthonormale la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Que dire de la diagonalisabilité de la matrice symétrique complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Correction.

1. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, on a $A = PD^tP$ où

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $\begin{vmatrix} X-i & -1 \\ -1 & X+i \end{vmatrix} = X^2$. Par suite la matrice est nilpotente non nulle donc elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. Norme d'opérateur d'un endomorphisme autoadjoint

On suppose $\dim(E) > 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\|u\|$ la norme d'opérateur de u de $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même et, si u possède au moins une valeur propre, on note $\rho(u) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

1. Montrer :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(u(x)|y)|,$$

puis, si $u \in \mathcal{S}(E)$:

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |(u(x)|x)|.$$

2. Montrer que si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $\rho(u) = \|u\|$.
3. Montrer que $\|u\| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

Correction.

1. On note S la sphère unité de E et $A = \{|(u(x)|y)| \mid x, y \in S\}$ et $B = \{|(u(x)|x)| \mid x \in S\}$.
On a, pour tout $x, y \in S$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u(x)|y)| \leq \underbrace{\|u(x)\|}_{\leq \|u\| \cdot \|x\|} \cdot \|y\| = \|u\|$$

Ainsi A est non vide (car S est non vide - ici $\dim(E) > 0$) et majoré par $\|u\|$ donc $\sup(A)$ existe et vérifie $\sup(A) \leq \|u\|$.

Notons $a = \sup(A)$. On a, pour tous $x, y \in E$:

$$|(u(x)|y)| \leq a\|x\| \cdot \|y\|. \quad (*)$$

En effet, si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité est vérifiée (c'est même une égalité) et sinon, on pose $x' = \frac{x}{\|x\|} \in S$ et $y' = \frac{y}{\|y\|} \in S$, et ainsi :

$$|(u(x)|y)| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |(u(x')|y')| \leq a\|x\| \cdot \|y\|$$

Par suite, on a, pour $x \in E$, en posant $y = u(x) \in E$:

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|y) \leq a\|x\| \cdot \|y\| = a\|u(x)\| \cdot \|x\|$$

D'où, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq a$$

(le cas $u(x) = 0_E$ étant immédiatement vérifié). Ainsi, on a $\|u\| \leq a$.

Il en résulte que $\|u\| = \sup(A)$.

On a $B \subset A$ et B non vide car S est non vide, donc $b = \sup(B)$ existe et $b \leq a$.

De plus, on remarque que pour tous $x, y \in E$, comme $u^* = u$:

$$(u(x \pm y)|x \pm y) = (u(x)|x) \pm 2(u(x)|y) + (u(y)|y).$$

et, par un raisonnement similaire à celui décrit pour établir (*), on a, pour tout $z \in E$,

$$(u(z)|z) \leq b\|z\|^2,$$

Ainsi, pour tous $x, y \in S$:

$$\begin{aligned} |(u(x)|y)| &= \frac{1}{4} |(u(x+y)|x+y) - (u(x-y)|x-y)| \\ &\leq \frac{1}{4} (|(u(x+y)|x+y)| + |(u(x-y)|x-y)|) \\ &\leq \frac{b}{4} (\underbrace{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}_{=2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 4}) \\ |(u(x)|y)| &\leq b. \end{aligned}$$

Par suite, $a \leq b$. Et donc $b = a$.

Il en résulte que $\|u\| = b = a$.

2. Comme u est autoadjoint, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note λ_i la valeur propre à laquelle e_i est associée.

Montrons que :

$$\|u\| = \rho(u) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

Comme $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est un ensemble fini non vide, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

Soit $x \in S$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où $x_i = (x|e_i)$ et $\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\| = 1$. De plus, on a $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ car chaque e_i est vecteur propre associé à λ_i . Par suite, $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on a :

$$|(u(x)|x)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \underbrace{|\lambda_i|}_{\leq |\lambda_{i_0}|} \leq |\lambda_{i_0}|.$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $\|u\| \leq |\lambda_{i_0}|$.

De plus, on a, $e_{i_0} \in S$ et :

$$|(u(e_{i_0})|e_{i_0})| = |\lambda_{i_0}| \cdot |(e_{i_0}|e_{i_0})| = |\lambda_{i_0}|$$

Donc $\|u\| = |\lambda_{i_0}| = \rho(u)$.

Il en résulte que $\lambda_{i_0} = \pm \|u\|$ est valeur propre de u et il s'agit de la plus grande en valeur absolue.

3. On a $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$ donc $u^* \circ u$ est autoadjoint.

Par suite, d'après la question précédente, on a $\|u^* \circ u\| = \rho(u^* \circ u)$.

Montrons alors que $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\|$.

On remarque tout d'abord que $\|u^*\| = \|u\|$ car, en utilisant la question 1, on a :

$$\|u^*\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(u^*(x)|y)| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(x|u(y))| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(u(y)|x)| = \|u\|.$$

Ainsi, on a, comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre :

$$\|u^* \circ u\| \leq \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2.$$

De plus, pour tout $x \in E$, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (u^* \circ u(x)|x) \leq \underbrace{\|u^* \circ u(x)\|}_{\leq \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|} \cdot \|x\| \leq \|u^* \circ u\| \cdot \|x\|^2,$$

d'où $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$.

Il en résulte que $\|u\|^2 = \|u^* \circ u\|$ et donc :

$$\|u\| = \sqrt{\|u^* \circ u\|} = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}.$$

3. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

a. Définitions

Définition 14.

Soit $u \in O(E)$. On dit que u est un endomorphisme autoadjoint :

- **positif** si, pour tout $x \in E$,

$$(u(x)|x) \geq 0;$$
- **défini positif** si, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$,

$$(u(x)|x) > 0.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Définition 15.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est matrice symétrique :

- **positive** si, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXAX \geq 0;$$
- **définie positive** si, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$,

$${}^tXAX > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives définies positives.

b. Propriétés

Proposition 35.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- On a $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

De même dans le cas matriciel.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et tout $x \in E$ vecteur propre associé à λ , on a, comme $x \neq 0$:

$$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \underbrace{(x|x)}_{>0}$$

donc $(u(x)|x)$ et λ sont strictement de même signe.

On en déduit les deux implications directes de la proposition.

Démontrons les implications réciproques. On suppose $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

Comme $u \in \mathcal{S}(E)$, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de u et, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note λ_i la valeur propre de u dont e_i est un vecteur propre associé.

On a alors, pour tout $x \in E$ (resp. $x \in E \setminus \{0_E\}$), on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (où $x_i = (x|e_i)$) mais ce n'est pas utile ici) et par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (u(x)|x) &= \left(u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \middle| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \underbrace{(u(e_i)|e_j)}_{=\lambda_i \delta_{ij}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \underbrace{(e_i|e_j)}_{=\delta_{ij}} \\ (u(x)|x) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2; \end{aligned}$$

or, comme $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$), on a $(u(x)|x) \geq 0$ (resp. $(u(x)|x) > 0$ car comme $x \neq 0_E$, il existe $x_k \neq 0$).

Par suite, $u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$). □

c. Exercices**Exercice 7.** *Caractérisation des produits scalaires sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$*

On pose $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E si, et seulement si, il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$:

$$\varphi(X, Y) = {}^t X A Y$$

Correction.

($\Rightarrow$) On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$, $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$.

1ère façon : sans rien remarquer ;)

Pour tous $X, Y, Z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- On remarque que pour tout $m \in \mathbb{R} = M_{1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tm = m$ d'où, par symétrie de A :

$$\varphi(X, Y) = {}^tXAY = {}^tXAY = {}^tY{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(Y, X)$$

donc φ est symétrique.

- On a, par linéarité du passage à la transposée et par distributivité du produit matriciel :

$$\varphi(\lambda X + Y, Z) = {}^t\lambda X + YAZ = \lambda {}^tXAZ + {}^tYAZ = \lambda \varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z)$$

donc φ est linéaire par rapport à sa première variable, et ainsi, par symétrie de φ , φ est bilinéaire.

- On remarque que $\varphi(X, X) = {}^tXAX$ donc, par positivité de A , $\varphi(X, X) \geq 0$ et par définie positivité de A , si $X \neq 0$, $\varphi(X, X) > 0$. Or on a $\varphi(0, 0) = 0$, donc si $\varphi(X, X) = 0$ alors $X = 0$.

2ème façon : en remarquant que $\varphi(X, Y) = \langle X, AY \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique et en utilisant le fait que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (ce qui revient quasiment à faire la 1ère façon!).

De toutes ces façons, il en résulte que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. un produit scalaire.

($\Leftarrow$) On suppose que φ est un produit scalaire. On montre tout d'abord le résultat suivant :

Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$m_{ij} = {}^tE_i M E_j$$

Démonstration : On a, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$${}^tE_i M E_j = {}^tE_i \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} = m_{ij}.$$

Montrons qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$, $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$.

On considère $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de E et on pose, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ij} = \varphi(E_i, E_j)$ puis $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Par suite, on a, pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in E$, $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n y_i E_i$

et donc, par bilinéarité de φ :

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\varphi(E_i, E_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right)}_{=(AY)_i} = {}^tXAY.$$

Il reste à montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- On a, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par symétrie de φ :

$$a_{ji} = \varphi(E_j, E_i) = \varphi(E_i, E_j) = a_{ij}$$

donc ${}^tA = A$ i.e. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On a, pour tout $X \in E$ tel que $X \neq 0$, par définie positivité de φ :

$${}^tXAX = \varphi(X, X) > 0$$

Par suite, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'où l'existence recherchée.