Chapitre IX

Séries entières

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent, sauf mention contraire, des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Partie A

Définitions et généralités sur les séries entières

1. Séries entières

Définition 1. *Série entière*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série entière** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonction $\sum f_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$f_n : z \mapsto a_n z^n.$$

On notera (abusivement) $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.

On connaît déjà plusieurs séries entières :
- la série géométrique $\sum z^n$;
- la série de somme exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que $\sum a_n z^{2n}$ est une série entière.

Correction.

Attention ! Il y a un piège ! $\sum a_n z^{2n}$ est bien une série entière : il s'agit de la série entière $\sum b_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} b_n = a_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définition 2. *Somme et domaine de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
- On note D et $D_{\mathbb{R}}$ et on appelle respectivement **domaine de convergence** et **domaine**

réel de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ les ensembles :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge } \} \text{ et } D_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge } \}.$$

— On appelle **somme de la série entière** $\sum a_n z^n$ la fonction somme $S : D \to \mathbb{C}$ de la série, i.e.

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarque 1.

Par définition, le domaine de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ coïncide avec le domaine de définition de sa somme S. Ainsi, comme on l'a vu dans le Chapitre séries de fonctions, le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le plus grand ensemble sur lequel la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge simplement.

Question 1.

Que dire de la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 ?

Réponse.

Réponse : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire en 0 ; on note $N = \min_{n\in\mathbb{N}}(a_n = 0)$ et $P = \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet, la suite des sommes partielles est stationnaire en $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = P(z)$. De plus, pour la même raison, la somme S de la série entière est :

$$S : z \mapsto P(z).$$

On peut donc conclure que la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 est une fonction polynomiale !

2. Rayon de convergence

a. Lemme d'Abel

Théorème 1. *Lemme d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

On suppose que suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n|.\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq M\left(\frac{z}{z_0}\right)^n,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 car $|z| < |z_0|$.
Par suite, $\sum |a_n z^n|$ est convergente. $\square$

b. Définition et propriétés du rayon de convergence

Lemme 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. Alors I contient 0 car $(|a_n|0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
De plus, si $r \in I$, alors, pour tout $s \in [0, r]$, $s \in I$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|s^n \leq |a_n|r^n$; donc $(|a_n|s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que I est un intervalle de la forme $[0, a)$. $\square$

Ce lemme justifie la définition suivante :

Définition 3. *Rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

i) On appelle **rayon de convergence** et on note R la borne supérieure de l'intervalle $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ i.e.

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

on convient que $R = +\infty$ si l'intervalle I n'est pas majoré.

ii) On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble $\mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

iii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$.

Proposition 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $z \in \mathbb{C}$.

— Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

— On suppose $|z| < R$. Comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, alors il existe $r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ tel que $|z| < r_0 < R$.
Par conséquent, la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

— On suppose $|z| > R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

□

Remarque 2.

Si $|z| = R$, on ne peut, a priori, rien dire ! Il faut étudier la série dans ce cas.

Proposition 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et D son domaine de convergence. Alors on a :

$$\mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \subset D \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}.$$

Démonstration.

- Si $z \in \mathbb{D}(0, R)$ alors $|z| < R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc converge. D'où $z \in D$.
Il en résulte que $\mathbb{D}(0, R) \subset D$.
- Si $z \notin \overline{\mathbb{D}}(0, R)$ alors $|z| > R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. D'où $z \notin D$.
Ainsi $\overline{D}(0, R)^c \subset D^c$ et donc $D \subset \overline{D}(0, R)$.

□

Exemple 2.

— Pour la série entière $\sum z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \mathbb{D}(0, 1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0, 1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum z^n$ est :
> $$R = \sup[0, 1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, donc $\sum z^n$ diverge grossièrement.
>
> Il en résulte que $D = \mathbb{D}(0, 1)$.

— Pour la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n^2} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} z^n$ est :
> $$R = \sup[0,1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|\frac{1}{n^2} z^n| = \frac{1}{n^2}$ donc, d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.
> Il en résulte que $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries entières $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum n! z^n$.

Correction.

1. On a
$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n!} r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,+\infty[.$$
car, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n!} r^n$ est le terme général d'une série convergente - donc converge vers 0 et donc est une suite bornée.
Ainsi le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$ est :
$$R = +\infty.$$
Il en résulte que $D = \mathbb{C}$.

2. On a
$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (n! r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \{0\}.$$
En effet, pour $0 < r < 1$, à partir du rang $N = E(r) + 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $n! r^n \geq Cn \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (on peut prendre $C = (N-1)! r^N$)) donc pour tout $r > 0$, la suite $(n! r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (le cas $r \geq 1$ est immédiat - *le faire quand même pour vérifier que c'est bien immédiat !*).
Donc le rayon de convergence R de $\sum n! z^n$ est :
$$R = \sup\{0\} = 0.$$
Il en résulte que $D = \{0\}$.

3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière

a. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors on a les égalités suivantes :
- $R = \sup\{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $R = \sup\{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $R = \sup\left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $R = \sup\left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Démonstration.

On considère les ensembles suivants :
- $I_1 = \{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $I_2 = \{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $I_3 = \left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $I_4 = \left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Par suite, on a la chaîne d'inclusion :

$$I_4 \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1.$$

De plus, on remarque que $I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc, d'après le lemme 1, I_1 est un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ qui contient 0 et par définition du rayon de convergence, $R = \sup I_1$ (potentiellement $= +\infty$). Ainsi, on a $I_1 = [0, R[$ ou $I_1 = [0, R]$.
Comme $0 \in I_4$, I_4 est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ et donc il possède une borne supérieure R' (potentiellement $+\infty$ si I_4 n'est pas majorée). Ainsi, comme $I_4 \subset I_1$, on a $R' \leq R$.
Réciproquement : soit $r \in [0, R[$. Alors, d'après la proposition 1, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc r appartient à I_4 et donc $r \leq R'$. Par suite, R' est un majorant de $[0, R[$ d'où $R \leq R'$.
Il en résulte que $R' = R$.
Remarque : les inégalités précédentes ne pas rigoureuses dans le cas $R = +\infty$, mais la preuve reste analogue dans ce cas.
Ainsi, en utilisant la chaîne d'inclusion précédente, on obtient :

$$R = \sup I_4 \leq \sup I_3 \leq \sup I_2 \leq \sup I_1 = R.$$

d'où les égalités annoncées. □

Méthode : Minoration et majoration du rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :

- la minoration $R \geq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
  ii) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
  iii) la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;
  iv) la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument ;
- la majoration $R \leq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;
  ii) la série $\sum a_n z_0^n$ diverge ;
  iii) la série $\sum |a_n z_0^n|$ diverge.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ en fonction de celui de $\sum a_n z^n$.

Correction.

1. On remarque tout d'abord que la suite $(n1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Donc, comme $R = \sup\{\,|z| \mid (nz^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, on a $R \leq 1$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $|z| < 1$, la suite $(n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par croissances comparées donc comme $R = \sup\{\,|z'| \mid (nz'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$, on a $R \geq |z|$.
   Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < 1$, on peut faire tendre $|z|$ vers 1 dans l'inégalité précédente, ce qui donne $R \geq 1$.

   Il en résulte que $R = 1$.

2. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ et R' celui de $\sum a_n z^n$.
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(|a_n|(\sqrt{|z|})^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R' = \sup\left\{\,|z'| \mid (a_n z'^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$, donc $R' \geq \sqrt{|z|}$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R$, on fait tendre $|z|$ vers R et ainsi, par continuité de la fonction racine :
   $$R' \geq \sqrt{R}.$$
   Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R'$. Alors la suite $(a_n z^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la suite $(a_n (z^2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Or, on a $R = \sup\{\,|z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R \geq |z^2| = |z|^2$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R'$, on fait tendre $|z|$ vers R' et ainsi, par continuité de la fonction carrée :
   $$R \geq R'^2.$$
   Il en résulte que $R' = \sqrt{R}$.

b. Comparaison

Proposition 4. *Comparaison des rayons de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors si, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \geq N$:

i) $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$;
ii) $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iii) $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
iv) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

i) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose $|z| < R_b$. Alors la suite $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$, on a $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$ donc la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Or, on a $R_a = \sup\{\,|z'| \mid (a_n z'^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, donc $R_a \geq |z|$. Ceci étant vrai pour tout z tel que $|z| < R_b$, on fait tendre $|z|$ vers R_b et ainsi :

$$R_a \geq R_b.$$

ii) On suppose $a_n = O(b_n)$. Alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M|b_n|$. On adpate alors la preuve précédente en remarquant que, pour un certain $z \in \mathbb{C}$, si $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(M b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

iii) Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$ d'où $R_a \geq R_b$;

iv) On remarque que $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ implique $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$. En effet, par définition, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n) = O(b_n) + O(b_n) = O(b_n)$.

$\square$

Exercice 4.

1. Déterminer les rayons de convergence de $\sum \dfrac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ et de $\sum \dfrac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq1} d(n) z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n) = \#\{d \in [\![1, n]\!] \mid d|n\}$.

Correction.

1. On a :

$$\frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Or on a prouvé précédemment que $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence 1 donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ est égal à 1.

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :

$$\frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$$

Or le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{3^n} z^n$ est égal à 3 : en effet, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $((\frac{z}{3})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si $|z| \leq 3$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$ est égal à 3.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $1 \leq d(n) \leq n$. Or les rayons de convergence de $\sum z^n$ et de $\sum nz^n$ sont tous deux égaux à 1, d'où, si on note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n) z^n$, on obtient $1 \geq R \geq 1$ et ainsi $R = 1$

c. Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 2. *Règle de D'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$. S'il existe $\ell \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

alors on a :

$$R = \frac{1}{\ell} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0; \\ \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in]0, +\infty[; \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On applique le critère de D'Alembert à la série de terme général $u_n = |a_n z^n|$. Alors on a, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z|.$$

Par suite, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où :

- $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|z|$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, si $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ converge et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ diverge. Par suite, $R = \frac{1}{\ell}$.
- $\ell = +\infty$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ diverge donc $R = 0$.
- $\ell = 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ converge. Par suite, $R = +\infty$.

□

Remarque 3.

Attention le critère précédent n'est valable que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est différente de 0 à partir d'un certain rang !
Ainsi, pour une série entière du type $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on appliquera directement la règle de D'Alembert sur la série (tout court) $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ i.e. on étudie la limite de

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{\varphi(n+1)}}{a_n z^{\varphi(n)}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|,$$

en fonction des valeurs de $z \in \mathbb{C}^*$ afin de majorer et minorer le rayon de convergence de la série entière.

Exercice 5.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \sum \frac{n^n}{n!}z^n; \quad \sum \binom{4n}{2n+1}z^n;$$

$$\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)}z^n \text{ où } P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum n! z^{2n} \qquad \sum n! z^{n^2} \qquad \sum n^n z^{\binom{3n}{n}}.$$

Correction.

1. Pour cette question, on remarque que les séries entières ne sont pas lacunaires et que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées sont non nuls (à partir d'un certain rang). On peut donc appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières :
   — Ici, $a_n = n^\alpha$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Ainsi, à partir du rang 1, on a, par continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 1 :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ est $R = \frac{1}{1} = 1$.
   — Ici, $a_n = \frac{n^n}{n!}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$$
   Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \frac{n^n}{n!}z^n$ est $R = \frac{1}{e}$.
   — Ici, $a_n = \binom{4n}{2n+1}$ pour $n \geq 0$. Ainsi, on a :
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^4n^4n^4}{2^4n^4} = 2^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^4 = 16$$

Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum \binom{4n}{2n+1} z^n$ est $R = \frac{1}{16}$.

— On suppose que P, Q sont des polynômes non nuls. Ici, $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ pour $n \geq n_0$ où $n_0 = E(\max\{x \in \mathbb{R}_+ \mid Q(x) = 0\}) + 1$ si Q admet des racines réelles positives et $n_0 = 0$ sinon *(pour s'assurer qu'on ne divise par par 0 ; dans le cas où Q possède des racines positives, ce "max" existe bien car Q étant un polynôme non nul, l'ensemble de ses racines est fini)* et $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$.
On va cette fois utiliser une comparaison avec la première série entière de la question pour déterminer le rayon de convergence :

Comme P, Q sont non nuls, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et des coefficients $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{p} \beta_i X^i$ avec $\alpha_p \neq 0$ et $\beta_q \neq 0$. Par suite, on a, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha_p n^p}{\beta_q n^q} = \frac{\alpha_p}{\beta_q} n^{p-q}$$

Or, pour $\alpha = p - q \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$ possède un rayon de convergence égal à 1, donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ est égal à 1.

2. Les séries entières de cette question sont lacunaires, on ne peut donc pas appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières. On se rabat donc sur le critère de D'Alembert... tout court !

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{2n}| = n! |z|^{2n} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\text{"} > 1\text{"}$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ diverge.
Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum n! z^n$ ne converge pas absolument. Or le rayon R de la série entière vérifie $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^n \text{ converge absolument}\}$, donc $R = 0$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n! z^{n^2}| = n! |z|^{n^2} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)|z|^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty\text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n! z^{n^2}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n! z^{n^2} \text{ converge absolument}\}$.

— Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |n^n z^{\binom{3n}{n}}| = n^n |z|^{\binom{3n}{n}} > 0$. On peut donc appliquer la règle de D'Alembert à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque que, comme $n \leq E(\frac{3n}{2})$, on a $\binom{3n}{1} \leq \binom{3n}{n}$ et donc :

$$\binom{3n+3}{n+1} - \binom{3n}{n} = \binom{3n}{n} \left(3 \underbrace{\frac{(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)}}_{\geq 1} - 1 \right) \geq \binom{3n}{1} \times 2 = 6n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^{\binom{3n+3}{n+1}-\binom{3n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty\text{"} > 1\text{"} & \text{si } |z| \geq 1 \\ 0 < 1 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série numérique $\sum n^n z^{\binom{3n}{n}}$ converge absolument si, et seulement si, $|z| < 1$.
Il en résulte que $R = 1$ car $R = \sup\{|z| \mid \sum n^n z^{\binom{3n}{n}} \text{ converge absolument}\}$.

Exercice 6. *Apparté : Transformée d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère les séries $\sum a_n b_n$ et $\sum a_n$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles de $\sum a_n b_n$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle de $\sum a_n$.

1. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

   Cette identité est appelée *transformée d'Abel* des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$.

2. En déduire le *critère d'Abel* : si
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
   - $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et
   - $\sum(b_{n+1} - b_n)$ est absolument convergente,

   alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

3. Montrer le critère des séries alternées en utilisant le critère d'Abel.

Correction.

1. On pose $S_{-1} = 0$ et $A_{-1} = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n =$

$A_n - A_{n-1}$, d'où on obtient :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} A_n b_n - \sum_{n=-1}^{N-1} A_n b_{n+1} \\
&= A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) - A_{-1} b_0 \\
&= A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_{n+1} - b_n).
\end{aligned}$$

Remarque : la transformation d'Abel est l'analogue pour les suites de l'intégration par parties pour les fonctions de la variable réelle ; en effet,

— *prendre la somme partielle de la série associée à une suite est l'analogue de la primitivation pour une fonction,*

— *prendre la différence de deux termes successifs d'une suite est l'analogue de la dérivation pour une fonction.*

2. Supposons les hypothèses vérifiées. Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   — $|A_n b_n| \leq M|b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc la suite $(A_N b_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0) ;
   — $|A_n(b_{n+1} - b_n)| \leq M|b_{n+1} - b_n|$ qui est le terme général d'une série convergente donc, par comparaison, $\sum A_n(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument et donc converge. Ainsi, la suite $(\sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n))_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de cette série converge.

   Par suite, par transformation d'Abel des sommes partielles S_N pour $N \in \mathbb{N}$ (question 1), la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ s'écrit comme combinaison linéaire de suites convergentes et donc converge. Il en résulte que la série $\sum a_n b_n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Montrons que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, $b_n = u_n$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors :
   - On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

     donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1.
   - $b_n = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - b_n| = u_n - u_{n+1}$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par suite, la série $\sum |b_{n+1} - b_n| = \sum (u_n - u_{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $\sum (b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel, la série $\sum (-1)^n u_n = \sum a_n b_n$ converge.
   Nous avons donc (re)démontré le critère des séries alternées.

Exercice 7. *Étude d'une série entière sur la frontière du disque*

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que son rayon de convergence est 1. Que dire de la convergence en $z = 1$?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. En utilisant le critère d'Abel (exercice 6), montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.
3. En déduire le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Correction.

1. On note R le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc $R = \frac{1}{1} = 1$ d'après la règle de D'Alembert pour les séries entières.

Évaluer en $z = 1$, on obtient la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.

2. On reprend les notations de l'exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = z_0^n$, $b_n = \frac{1}{n}$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors :
   - Comme $|z_0| = 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z_0^k\right| = \frac{|1 - z_0^{n+1}|}{|1 - z_0|} \leq \frac{1 + |z_0|^{n+1}}{|1 - z_0|} = \frac{2}{|1 - z_0|}$$

   donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{2}{|1-z_0|}$.
   - $b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} |b_{n+1} - b_n| = \sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ est télescopique et donc convergente car de même nature que la suite convergente $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ainsi, $\sum_{n\geq 1}(b_{n+1} - b_n)$ converge absolument.

   Par suite, d'après le critère d'Abel (exercice 6 question 2.), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{n}$ converge.
3. On note D le domaine de convergence de la série entière. Comme $R = 1$, on a

$$\mathbb{D}(0,1) \subset D \subset \overline{\mathbb{D}(0,1)}$$

De plus, pour $z \in \mathbb{U}$, on a, d'après les questions 1 et 2, $z \in D$ si, et seulement si, $z \neq 1$. Par suite, $D = \overline{\mathbb{D}(0,1)} \setminus \{1\}$.

Partie B

Propriétés des séries entières

1. Opérations sur les séries entières

a. Combinaisons linéaires

Proposition 5. *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $\lambda \neq 0$, la suite $(\lambda a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence. □

Proposition 6. *Somme*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

— si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$

— si $R_a = R_b$, $R \geq R_a (= R_b)$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors la suite $((a_n + b_n)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

Supposons que $R_a \neq R_b$. Quitte à échanger R_a et R_b, on suppose que $R_a < R_b$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Alors la suite $((a_n + b_n)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

> *Remarque :* pour démontrer le fait précédent, on peut utiliser la contraposée de l'assertion : "si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi, on a $|z| \geq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{R_a} < |\mathbf{z}| < R_b$, on obtient $\min(R_a, R_b) = R_a \geq R$.

Il en résulte que, si $R_a \neq R_b$,
$$R = \min(R_a, R_b).$$
□

Proposition 7. *Somme d'une combinaison linéaire de séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On pose $R = \min(R_a, R_b)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration.

Les séries entières $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum \mu b_n z^n$ sont de rayons de convergences supérieurs à respectivement R_a et R_b (égaux si $\lambda, \mu \neq 0$ (proposition 5) et $+\infty$ sinon) donc, d'après la proposition 6, la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ est de rayon de convergence supérieur à $R = \min(R_a, R_b)$. Par suite, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| < R$, ω appartient au disque ouvert de convergence de la série entière $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ et donc, d'après la proposition 1, $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) \omega^n$ converge absolument et donc converge ; de plus, comme $|\omega| < R \leq R_a$, et $|\omega| < R \leq R_b$, par un raisonnement similaire, les séries numériques $\sum a_n \omega^n$ et $\sum b_n \omega^n$ convergent.
Ainsi, par linéarité de la somme d'une série, on obtient, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| < R$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \omega^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \omega^n.$$
□

Exercice 8.

Déterminer les rayons de convergence et la somme dans le disque ouvert de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum \mathrm{ch}(n) z^n \qquad \sum \sin(n\theta) z^n \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}).$$

Correction.

1. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
La série entière $\sum e^n z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{e}$ et la série entière $\sum e^{-n} z^n$ a pour rayon de convergence e donc la série entière $\sum \mathrm{ch}(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = \min(\frac{1}{e}, e) = \frac{1}{e}$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{e}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - ez} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{e}}.$$

2. On a, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
Les séries entières $\sum e^{in\theta}z^n$ et $\sum e^{-in\theta}z^n$ ont pour rayons de convergence 1 donc la série entière $\sum \sin(n\theta)z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq 1$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}z^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\theta}z^n \\ &= \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{i\theta}z} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{-i\theta}z} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n &= \frac{\sin(\theta)z}{1-2\cos(\theta)z+z^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, déterminons exactement le rayon de convergence R de $\sum \sin(n\theta)z^n$.
Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sin(n\theta) = 0$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Donc dans ce cas, $R = +\infty$.

Supposons $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la suite $(\sin(n\theta)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente et donc $R \leq 1$.
Il en résulte que $R = 1$.