Chapitre VIII

Suites et Séries de fonctions

Table des matières

Dans ce chapitre, E et F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions que l'on considère dans ce chapitre sont, sauf indication contraire, des fonctions définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.

Partie A
Convergences des suites et des séries de fonctions

1. Convergence simple

a. Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 1. *Convergence simple d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset E$ dans F.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** A si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F est convergente.

Dans ce cas, la fonction $f : x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ de A dans F est bien définie ; on dit alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers** f ou encore que f est la **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

CVS sur $[0,1]$:

Soit $t \in [0,1]$. Étudions la nature de $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$
La suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} = (t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est géométrique de raison $t \in [0,1] \subset]-1,1]$.
Par suite, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.

De plus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Il en résulte que la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f annoncée.

Remarque 1.

L'exemple précédent nous montre que lorsqu'une suite de fonctions continues converge simplement vers f, f n'est pas continue en général !

Remarque 2.

Quand on parle de limite d'une suite, cela présuppose sa convergence, et dans notre cas, il s'agit d'une suite de fonctions. On pourrait donc s'attendre à pouvoir affirmer, lorsque qu'une suite de fonctions converge simplement, que cette suite converge pour une certaine norme sur un espace vectoriel qui contient ces fonctions, puisque c'est comme ça que nous avons défini la convergence des suites dans ce cours !
Il n'en est rien ! La convergence simple d'une suite ne correspond généralement pas à la convergence de cette suite pour une certaine norme (voire exercice 29).
Mais, malgré cela, dans un cadre plus général que les espaces vectoriels normés - les espaces topologiques - on peut donner un vrai sens de convergence à la convergence simple : on peut ainsi tout de même voir la limite simple d'une suite de fonctions comme une "vraie" limite de suite !

Exercice 1.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$a)\ f_n : t \mapsto \frac{1+nt^2}{1+nt} \text{ sur } \mathbb{R}_+. \qquad b)\ f_n : t \mapsto \sin^n(t)\cos(t) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$c)\ f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) & \text{si } x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Correction.

a) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$:

CVS sur $\mathbb{R}_+$:
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On étudie la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

CVS sur $\mathbb{R}$:

Soit $t \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$f_n(t) = \sin^n(t)cos(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } cos(t) = 0 \\ 0 & \text{si } t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } |sin(t)| < 1 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et ce, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

c) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

CVS sur $\mathbb{R}$:

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Traitons tout d'abord le cas $x \neq 0$. Alors $\frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, à partir d'un certain rang N (par exemple $N = E(1/|x|) + 1$), pour tout $n \geq N$, $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right).$$

Or, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} &= \frac{\tan(\frac{1}{nx}) - \sin(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})\tan(\frac{1}{nx})} \\ &= \frac{\frac{1}{nx} + \frac{1}{3n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}) - (\frac{1}{nx} - \frac{1}{6n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}))}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2nx} \end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu obtenir ce résultat plus simplement, en utilisant $\tan = \sin / \cos$ *:*

$$\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} = \frac{1-\cos(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1/(nx)^2}{2}}{1/nx} = \frac{1}{2nx}$$

Ainsi, toujours pour $x \neq 0$ et $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n}{2nx} = \frac{3}{x}.$$

Il en résulte que :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

Exercice 2.

1. Écrire la définition de la convergence simple vers une fonction en termes "epsilonesques".
2. Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions qui converge simplement sur A vers des fonctions f et g respectivement, étudier la convergence simple des suites de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur A vers une fonction f. Que dire de f lorsqu'à partir d'un certain rang, les f_n sont : positives ? croissantes ? dérivables ? périodiques (de même période T) ? strictement positives ?

Correction.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$
2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement sur A. Soit $\lambda, \mu \in K$. Montrons que $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers $\lambda f + \mu g$ et que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers fg.

   <u>CVS sur A :</u>
   Soit $x \in A$. On étudie la nature des suites $((\lambda f_n + \mu g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((f_n g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a :
$$(\lambda f_n + \mu g_n)(x) = \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$
   et
$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x) = (fg)(x),$$
   Ainsi, les suites $((\lambda f_n + \mu g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((f_n g_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et ce pour tout $x \in A$. Par suite, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur A et ce, vers les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg respectivement.
3. Par les propriétés de la limite, on remarque que la positivité, la croissance et la périodicité (avec une période commune) "passent" à la convergence simple.
   Par contre, la dérivabilité ne passe pas (voire $f_n : t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$) et la stricte positivité ne passe pas non plus (voire $f_n : t \mapsto t^n$ sur $]0, 1]$).

Exercice 3.

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ une fonction qui vérifie, pour tout $t \in\ ]0, 1]$, $0 \leq f(t) < t$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f^n \quad (= f \circ f \circ \cdots \circ f)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $f_n(0)$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$.
3. Déterminer la limite de la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction.

1. On a, pour tout $t \in]0,1]$, $0 \leq f(t) < t$ donc, en passant à la limite lorsque t tend vers 0, on obtient, d'après le théorème des gendarmes, $f(0) = 0$.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient, de proche en proche :

$$f_n(0) = f^n(0) = f^{n-1}(f(0)) = f^{n-1}(0) = \cdots = f^0(0) = \mathrm{Id}(0) = 0.$$

2. CVS sur $[0,1]$:
Soit $t \in [0,1]$. On étudie la nature de $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $t = 0$, $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle d'après la question précédente et donc est convergente.
On suppose $t \neq 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(t) = f(f^n(t)) < f^n(t) = f_n(t)$ donc la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Ainsi, d'après la théorème de la limite monotone, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.

3. Notons φ la limite de la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour $t \in [0,1]$, comme f est continue sur $[0,1]$, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a :
$$f_{n+1}(t) = f(f_n(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\varphi(t)).$$
Ainsi, par unicité de la limite, $f(\varphi(t)) = \varphi(t)$; et donc $\varphi(0) = 0$ car, pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq x$.

b. Convergence simple d'une série de fonctions

La définition suivante est une simple reformulation de la précédente dans le cas particulier des séries :

Définition 2. *Convergence simple d'une série de fonctions*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $A \subset E$ dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement sur** A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A i.e. si pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ est convergente.
Dans ce cas,

— on appelle **fonction somme** de la série $\sum f_n$ et on note $S : A \to F$ la fonction :
$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x);$$

— pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **fonction reste d'ordre** n de la série $\sum f_n$ et on note $R_n : A \to F$ la fonction :
$$R_n = S - S_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x),$$
où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Exemple 2.

- La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement vers $S : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-1,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction reste d'ordre n de cette série est $R_n : x \mapsto \frac{t^{n+1}}{1-t}$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

- CVS sur $]-1,1[$.
  Soit $t \in]-1,1[$. On étudie la nature de $\sum t^n = (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-t} \text{ car } |t|<1,$$

  donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.
  De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

- CVS sur $\mathbb{R}$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$. On étudie la nature de $\sum \frac{t^n}{n!}$.
  En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\sum \frac{t^n}{n!}$ est une série absolument convergente et donc convergente. Ainsi, la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
  De plus, on le montrera plus tard dans ce chapitre, sa somme vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t,$$

  donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

Exercice 4.

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : t \mapsto ne^{-nt}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction.

CVS sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie la nature de $\sum ne^{-nt}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $ne^{-nt} \geq 0$ et on a, comme $t > 0$, par croissances comparées :

$$n^2 \times ne^{-nt} = n^3 e^{-nt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $ne^{-nt} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum ne^{-nt}$ converge.
Remarque : on aurait également pu montrer la convergence de cette série avec la règle de D'Alembert.

Par suite, la série $\sum f_n(t)$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'algèbre $E = M_p(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : E \to E$ telle que, pour $A \in E$, $f_n(A) = \frac{A^n}{n^2}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur la boule unité fermée B_f de $(E, \|\cdot\|)$.

Correction.

CVS sur B_f.
Soit $A \in B_f$. On étudie la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{A^n}{n^2}$.
La norme considérée étant sous-multiplicative, on a :

$$\left\|\frac{A^n}{n^2}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum_{n\geq 1} \frac{A^n}{n^2}$ converge absolument et donc converge car E est de dimension finie.

Par suite, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(A)$ converge pour tout $A \in B_f$, d'où $\sum f_n$ converge simplement sur B_f.

Proposition 1.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $A \subset E$ dans F. Si $\sum f_n$ converge simplement sur A, alors la suite des fonctions reste $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers la fonction nulle de A dans F.

Démonstration.

On suppose $\sum f_n$ converge simplement sur A. Alors $\sum f_n$ converge simplement sur A vers la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a fonction $R_n = S - S_n$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
CVS sur A.
Soit $x \in A$. On étudie la nature de la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $\sum f_n$ converge simplement vers S sur A, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n(x)$ converge vers $S(x)$, d'où $R_n(x) = S(x) - S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par suite, la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers la fonction nulle. $\square$

c. Domaine de définition d'une limite de suite de fonctions

Méthode. On calcule domaine de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f définie comme la limite d'une suite ou la somme d'une série de fonctions :

$$f : x \mapsto \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ ou } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

en déterminant :

— l'ensemble D de définition commun à tous les f_n (l'intersection des domaines de définition) ;

— le plus grand sous-ensemble de D sur lequel la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou la série $\sum f_n$ converge simplement.

Exemple 3.

On se place dans le cas d'une variable complexe.

— Le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \lim_{n\to+\infty} z^n$ est $\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{1\}$.

— Le domaine de définition de la fonction $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^n}$ est $\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : z \mapsto z^n$ qui est définie sur $\mathbb{C}$.
  CVS sur $\mathbb{C}$.
  Soit $z \in \mathbb{C}$. La suite géométrique $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}} = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $|z| \in [0, 1[$ ou $z = 1$.
  Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{1\}$ et ne converge pas simplement en dehors.
  Il en résulte que $\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \cup \{1\}$.

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : z \mapsto \frac{1}{1-z^n}$ qui est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_n$.
  On note alors $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$.
  CVS sur D.
  Soit $z \in D$.
  ⋆ On suppose $|z| \leq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - z^n| \leq 1 + |z|^n \leq 2$, d'où :

$$\frac{1}{|1-z^n|} \geq \frac{1}{2},$$

  et donc $\frac{1}{1-z^n} \not\to 0$.
  Ainsi, $\sum f_n(z)$ diverge (grossièrement).
  ⋆ Si $|z| > 1$, alors, comme $|z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$:

$$\frac{1}{|1-z^n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{|z|^n}$$

  qui est le terme général d'une série géométrique convergente car de raison $\frac{1}{|z|} \in]-1, 1[$.
  Ainsi, par comparaison, $\sum f_n(z)$ converge absolument et donc converge.

Par suite, $\sum f_n$ converge simplement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ et ne converge pas simplement en dehors.
Il en résulte que $\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Exercice 6.

Déterminer le domaine de définition de la fonction de la variable réelle :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^n(x)}{n}.$$

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{\cos^n(x)}{n}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.
CVS sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ⋆ Si $\cos(x) = 1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après le critère de Riemann par exemple) ;
- ⋆ Si $\cos(x) = -1$, alors $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (d'après le critère des séries alternées par exemple) ;
- ⋆ Si $|\cos(x)| < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^n(x)}{n}$ converge (d'après la règle de D'Alembert par exemple).

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge si, et seulement si, $\cos(x) \neq 1$ i.e. $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.
Par suite, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et pas en dehors.
Il en résulte que :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

2. Convergence uniforme

a. Définition et premières propriétés

Définition 3. *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de $A \subset E$ dans F.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f **sur** A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** A s'il existe f telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Question 1.

Comparer les définitions des convergences simple et uniforme en termes epsilonesques ! Quelle est la différence ?

On rappelle la notation suivante :

Notation 1. *Norme de la convergence uniforme*

Soit $\mathcal{F}_b(A,F)$ (ou encore $\mathcal{B}(A,F)$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions bornées de $A \subset E$ dans F. On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{F}_b(A,F)$ i.e. pour $f \in \mathcal{F}_b(A,F)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

i) Les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ et,

ii) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Prenons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a, pour tout $x \in A$, $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 1$.
  Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A par 1.
  Montrons désormais que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Par suite, comme l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in A$, on a, pour tout $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Il en résulte que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- $(\Leftarrow)$. On suppose $i)$ et $ii)$. Du fait de $i)$, quitte à supprimer une nombre fini de termes de la suite (f_n) on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est bornée sur A. Ainsi, on peut considérer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.
  Soit $\varepsilon > 0$. D'après $ii)$, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ et $x \in A$. Alors on a :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \sup_{t \in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F = \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que la suite $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

□

Proposition 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A. alors d'après la proposition précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ est bornée. Soit $x \in A$. Pour $n \geq N$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A. □

Exemple 4.

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

> En effet : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
>
> $$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
>
> Par suite, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et :
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

— La suite de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

En effet, on remarque tout d'abord que (f_n) converge simplement vers le fonction nulle sur $[0,1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $f : x \mapsto 0$. Comme $f_n : t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0,1[$ (pour $n > 0$), on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1[} t^n = \lim_{t\to 1^-} t^n = 1$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Proposition 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions de A dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A, alors $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A.

Démonstration.

On suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Alors, à partir d'un certain rang N_1 (resp. N_2), pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_2$), $f_n - f$ (resp. $g_n - g$) est bornée sur A. Par suite, comme l'ensemble des fonctions bornées sur A est un espace vectoriel, à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, $\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)$ est bornée sur A. Et de plus, on a :

$$\|\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)\|_\infty \leq |\lambda|\|f_n - f\|_\infty + |\mu|\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Il en résulte que $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A. □

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément.

- *Limite potentielle :* On étudie la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il y a convergence simple vers une fonction f sur A, on étudie alors la convergence uniforme vers f sur A.
- *Convergence uniforme vers la limite :* Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  où (u_n) est une suite de réels positifs qui tend vers 0 (**et qui ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

  La suite (u_n) s'obtient la plus souvent par une majoration simple, quand c'est possible, de $\|f_n(x) - f(x)\|_F$ ou par une étude des extrema de la fonction $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|_F$ (à n fixé).

Exercice 7.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants sur l'intervalle de définition indiqué :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n(1-x)$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$.
4. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Correction.

1. — CVS sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $|x| \leq \frac{1}{2} < 1$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

— CVU sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n},$$

D'où $f_n - f$ est borné sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque : l'inégalité précédente est en fait une égalité.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. — CVS sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$f_n(x) = x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \times (1-x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \times 0 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[0, 1]$.

— CVU sur $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie sur $[0, 1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n(1-x).$$

La fonction g_n est dérivable, et on a $g_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[0,1]$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ et donc en x :

$$f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x)$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \sin$ sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & = & |\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin(x)| \\ & = & |\cos(x)\sin(\frac{1}{n}) + \sin(x)\left(\cos(\frac{1}{n}) - 1\right)| \\ & \leq & |\cos(x)||\sin(\frac{1}{n})| + |\sin(x)||\cos(\frac{1}{n}) - 1| \\ & \leq & |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \end{array}$$

D'où $f_n - f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

car $\lim_{t\to 0}\sin(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0}\cos(t) = 1$.

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sin sur $\mathbb{R}$.

Remarque : on puvrait également utiliser la formule $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2}\sin(\frac{a-b}{2})$ *ou encore l'inégalité des accroissements finis pour majorer* $\|f_n - f\|_\infty$.

Correction suite.

4. — CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}_+$.

— CVU sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \geq 2$. On étudie sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

La fonction g_n est dérivable, et on a

$$g_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}) = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}.\frac{1}{n(1+\dfrac{1}{n-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en remarquant l'inégalité suivante :

$$g_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}.$$

En effet, pour $0 \leq x \leq 1$, $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$ *;*

et pour $x > 1$, $x^n > x$, *donc* $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{x}{1+x} \leq 1$.

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

S'il n'y a pas convergence simple sur A, il n'y pas convergence uniforme.

Mais si on a déterminé une limite f pour la convergence simple, pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, on peut :

- montrer que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur A, ou
- exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite de terme général

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\|_F \textbf{ ne tend pas vers } 0.$$

Exercice 8.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$.

Correction.

1. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

2. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car, pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2}.$$

On remarque que pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a :

$$g_n(x_n) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \geq g_n(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité sur $\mathbb{R}$ et donc en x de la fonction carrée :

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Non, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé précédemment que la suite de terme général $f_n^2 : x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence uniforme des suites de fonctions bornées

Proposition 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A, alors f est bornée sur A.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.
Par convergence uniforme, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout entier $n \geq N$ $f_n - f$ est bornée sur A. Par suite, pour tout $x \in A$, on a :

$$\|f(x)\|_F \leq \|f_N(x)\|_F + \|f_N(x) - f(x)\|_F \leq \|f_N\|_\infty + \|f_N - f\|_\infty$$

Donc f est bornée sur A. $\square$

Question 2.

Cela est-il vrai dans le cas de la convergence simple ?

Réponse.

Non ! Considérons la fonction $f : x \mapsto x$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
(Et bien-sur, il ne peut y avoir convergence uniforme vers f sur $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition précédente !)

Proposition 6.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, (f_n) converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{F}_b(A,F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

Il s'agit simplement de deux formulations différentes de la même propriété. $\square$

Exercice 10.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+27x^4}$

1. Calculer $\|g\|_\infty$.
2. On considère la suite de terme générale $f_n : x \mapsto g(nx)$. Étudier les convergences simple et uniforme de cette suite.

Correction.

1. La fonction g est une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue son étude sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g'(x) = \frac{(1+27x^4) - 108x^4}{(1+27x^4)^2} = \frac{1-81x^4}{(1+27x^4)^2},$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Par suite, comme g est impaire, on a :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)| = \frac{1}{4}.$$

2. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = g(nx) = \frac{nx}{1+27n^4x^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

car pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+27n^4x^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{27n^3x^3}$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

— CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi : x \mapsto nx$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles **bornées** qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Cette fois-ci, l'hypothèse "bornées" permet de conclure par l'affirmative.
En effet, d'après la proposition précédente, f et g sont bornées sur A. De plus, pour tout entier n assez grand (à partir du rang où toutes les fonctions $f_n - f$ et $g_n - g$ sont bornées sur A) et pour tout $x \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
|(f_ng_n - fg)(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq \|g_n\|_\infty\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty\|g_n - g\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc $f_ng_n - fg$ est bornée et on remarque que, par convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g, on a :

$$\|g_n\|_\infty = \|g_n - g + g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty.$$

Ainsi, on a :

$$\|f_ng_n - fg\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty \times 0 + \|f\|_\infty \times 0 = 0.$$

Donc $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

c. Convergence uniforme sur une partie

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur des famille de sous-ensemble du domaine de définition de ces fonctions.

Exemple 5.

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+nt}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On remarque tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\frac{1}{1+nt}) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0,$$

car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0} \dfrac{1}{1+nt} = 1$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le fait que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Soit $a > 0$. Étudions la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{1+nt} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Ainsi, les $f_n - f$ sont bornés sur $[a, +\infty[$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 12.

Étudier la convergence uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ car } \sin(0) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car, pour $x > 0$, $e^{-nx} \xrightarrow[n\to]{} 0$ et $|\sin(nx)| \leq 1$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

— CVU sur $\mathbb{R}_+$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n}$. Alors, on a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-n\frac{1}{n}}\sin(n\frac{1}{n}) = e\sin(1).$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \geq e\sin(1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

— Soit $a>0$. CVU sur $[a,+\infty[$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[a,+\infty[$,

$$|f_n(x)-f(x)| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-na}.$$

Par suite,

$$\|f_n-f\|_\infty \leq e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.

Proposition 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f alors, pour tout $B\subset A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers f.

Démonstration.

On suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f. Soit $B\subset A$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ assez grand, f_n-f est bornée sur A, donc f_n-f est bornée sur B et de plus :

$$\|f_n-f\|_{\infty,B} = \sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| = \|f_n-f\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B vers f. □

Définition 4. *Convergence uniforme sur tout compact/segment*

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout compact de** A si, pour tout compact $K\subset A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K. On parle alors de **convergence uniforme sur tout compact de** A.

Dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on la convergence uniforme sur tout compact est autrement désignée par **convergence uniforme sur tout segment**.

Exemple 6.

La suite de fonctions de terme général $f_n : t\mapsto t^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.

CVS sur $]-1,1[$:

Soit $t \in]-1,1[$. On étudie la nature de la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a : $t^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|t|<1$ donc $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 0$ sur $]-1,1[$.

CVU sur $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_n - f : t \mapsto t^n$ est bornée sur $[-a,a]$ car continue sur un segment et, comme $|a|<1$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[-a,a]} |t^n| = a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$.
Or, tout segment de $]-1,1[$ est inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a\in[0,1[$: en effet, si $[b,c] \subset]-1,1[$, alors, pour $a = \max(|b|,|c|) \in [0,1[$, on a $[b,c] \subset [-a,a]$; donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur tout segment de $]-1,1[$.

Exercice 13.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Correction.

On a déjà prouvé que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction nulle - notée f ici - sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé que cette suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'il y a tout de même convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Soit $a>0$.

CVU sur $[-a,a]$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a,a]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!}$$

Donc la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[-a,a]$ et on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers la fonction nulle.

Comme tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a>0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

3. Convergence uniforme des séries de fonctions

a. Généralités

On donne la définition suivante qui n'en est pas vraiment une : il s'agit d'une répétition, dans le cas particulier des séries, de la définition de la convergence uniforme pour les suites de fonctions.

Définition 5.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** A si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur A.

Proposition 8. *Caractérisation de la convergence uniforme pour les séries de fonctions*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

— la série $\sum f_n$ converge simplement sur A et,

— la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur A.

Démonstration.

Si $\sum f_n$ converge simplement sur A, alors, pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge et ainsi, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de $\sum f_n(x)$ est bien définie et converge vers 0_F.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $R_n : x \mapsto R_n(x)$ est bien définie et donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de A dans F qui converge simplement sur A vers la fonction nulle.

Fort de cette remarque, passons à la démonstration proprement dite. Que ce soit dans le sens l'implication directe, comme convergence uniforme implique convergence simple ; ou dans le sens de l'implication réciproque, par hypothèse ; on a la convergence simple de $\sum f_n$ sur A vers S : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Ainsi, dans les deux implications, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de A dans F est bien définie et converge simplement sur A vers la fonction nulle. On conclut alors en remarquant que :

la série $\sum f_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S sur A si, et seulement si, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $S - S = 0$ sur A. □

Exemple 7.

La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur tout segment de $]-1, 1[$ mais ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

D'après l'exemple 2, $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

<u>CVU sur $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a,a]$, on a $|x^{n+1}| \leq a^{n+1}$ et $1-x \geq 1-a$ donc $|R_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.
Par suite, la fonction R_n est bornée sur $[-a,a]$ et on a, comme $|a| < 1$:

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers la fonction nulle et donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers S.
De plus, tout segment de $]-1,1[$ étant inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a \in [0,1[$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$ vers S.

<u>CVU sur $]-1,1[$:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty,$$

d'où la fonction R_n n'est pas bornée sur $]-1,1[$ et donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
Il en résulte que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Exercice 14.

1. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Tout d'abord étudions la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1+x^2}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 quen $n \to +\infty$ donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ converge.

   Il en résulte que $\sum f_n$ converge simplement vers $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   <u>CVU sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme la somme d'une série alternées convergente

est plus petite que son premier terme (en valeur absolue), on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x^2} \right| \leq \frac{1}{n+2+x^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Donc la fonction R_n est bornée et :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (vers f).

2. On a déjà prouvé que $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers exp sur $\mathbb{R}$ - et on a également montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

   Montrons que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right|$$

   Si $x > 0$, on a $\mapsto \frac{x^k}{k!} > 0$ pour tout $k \geq n+1$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Or la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$; en effet sa limite quand $x \to +\infty$ est $+\infty$, donc la fonction R_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

   Il en résulte que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

   Comme il n'y a pas convergence sur $\mathbb{R}$ et que le "problème" se situe en $+\infty$, on tente la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

   CVU sur $[-a, a]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a :

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = r_n.$$

   Ainsi, la fonction R_n est bornée sur A et on a $\|R_n\|_\infty \leq r_n$.
   De plus, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des reste de la série convergente $\sum \frac{a^n}{n!}$ donc elle converge vers 0.
   Par suite, $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

   Il en résulte, d'après la proposition 8, que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$ et ce, pour tout $a > 0$.
   Tout segment de $\mathbb{R}$ étant inclus dans un segment de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$, on a donc la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$ vers sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ - dont on va bientôt montrer qu'il s'agit bien de la fonction exponentielle !

   Remarque 1 : Cette preuve de la CVU sur $[-a, a]$ repose simplement sur le fait que $\|f_n\|_\infty$(=

$a^n/n!$ ici) est le terme général d'une série convergente... cela va nous inspirer dans la suite !

Remarque 2 : Si on sait déjà que S est la fonction exponentielle, on peut procéder de la façon suivante pour la CVU :
Pour tout $x \in [-a,a]$, en faisant le changement d'indice $k' = k-(n+1)$ et en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+n+1)! \geq k!(n+1)!$, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$$

Donc la fonction R_n est bornée sur $[-a,a]$ et on a :

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x \in [-a,a]} |R_n(x)| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On a donc bien la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ de $\sum f_n$ vers la fonction exponentielle.

b. Convergence normale des séries de fonctions

La deuxième question de l'exercice 14 est très instructive : on remarque que le raisonnement qui nous a amené à prouver la convergence uniforme sur $[-a,a]$ de $\sum \frac{x^n}{n!}$ reposait seulement sur le fait que $\frac{a^n}{n!} = \sup_{x\in[-a,a]} |\frac{x^n}{n!}|$ est le terme général d'une série convergente. On veut donc généraliser cette situation pour éviter de répéter et répéter cette preuve dans les cas analogues !

Définition 6. *Convergence normale*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** A si :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée ; et
ii) la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exemple 8.

La série $\sum \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En effet, on a, pour $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}}\left(\left|\frac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}\right|\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Or d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement.

Proposition 9.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente i.e. $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge.

Démonstration.

Si $\sum f_n$ converge normalement, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|_F$ est le terme général d'une série convergente. Soit $x \in A$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\|_\infty,$$

par comparaison, la série à terme positifs $\sum \|f_n(x)\|_F$ est convergente i.e. $\sum f_n(x)$ est absolument convergente. $\square$

Corollaire 1.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F (qui est un espace vectoriel de dimension **finie**). Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge simplement sur A.

Démonstration.

On suppose $\sum f_n$ converge normalement.

CVS sur A. Soit $x \in A$.
D'après la proposition précédente, $\sum f_n(x)$ converge absolument, ainsi, comme F est de dimension finie, $\sum f_n(x)$ converge.

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $\sum f_n$ converge simplement sur A (vers sa somme). $\square$

Proposition 10.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Démonstration.

On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur A. Montrons que $\sum f_n$ converge uniformément sur A. Pour cela, on utilise la caractérisation de le convergence uniforme pour les séries donnée par la proposition 8 :

CVS sur A de $\sum f_n$:
Comme $\sum f_n$ converge normalement sur A alors, d'après le corollaire 1, $\sum f_n$ converge simplement sur A.

CVU sur A de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\mathbf{0}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in A$, comme $\|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\|_\infty$:

$$\|R_n(x)\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = r_n$$

Ainsi, la fonction R_n est bornée sur A et on a $\|R_n\|_\infty \leq r_n$.
De plus, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des reste de la série convergente $\sum \|f_n\|_\infty$ donc elle converge vers 0.
Par suite, $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il en résulte, d'après la proposition 8, que $\sum f_n$ converge uniformément sur A. $\square$

Remarque 3.

Attention, la réciproque est fausse : chercher parmi les exemples précédents une série de fonctions qui converge uniformément mais pas normalement.

On a ainsi, pour une **série** de fonctions, le diagramme suivant :

$$\textbf{CVN} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{CVU} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{CVS}$$

Méthode : Montrer qu'une série de fonctions converge normalement

Pour montrer la convergence normale de $\sum f_n$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x)\|_F \leq u_n$$

telle que $\sum u_n$ est une série numérique convergente (**et** u_n **ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

Exercice 15.

1. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ puis de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$. Commençons par la convergence normale :
CVN sur $\mathbb{R}_+$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité précédente étant une égalité pour $x = 0$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$; par suite, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
Comme pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS, la série $\sum f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. • On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.
CVN sur $\mathbb{R}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et l'inégalité précédente étant une égalité pour $x = 0$, on a :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$; par suite, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Comme pour une série de fonctions, CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS, la série $\sum f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

• On garde les mêmes notations que précédemment et on pose $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$. On ne peut donc plus étudier les convergences sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\geq 0} f_n$ du fait que f_0 n'est pas définie en 0 ! On doit donc faire notre étude sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Les f_n étant tous des fonctions paires, on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+^*$.
CVN sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_0(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc sa norme infinie n'est pas définie et donc l'étude de la convergence normale n'est pas possible même si cela semblait de prime abord être exactement comme le cas précédent.
Il n'y a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$ à cause d'un "détail" mais on se doute que la convergence uniforme va sûrement fonctionner puisque dans les restes, f_0 n'apparaîtra pas !

CVS sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On étudie la nature de $\sum f_n(x)$.
On a $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (critère de Riemann avec $2 > 1$), donc $\sum f_n(x)$ converge, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
CVU sur $\mathbb{R}_+^*$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = r_n$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses restes converge vers 0. Ainsi, R_n est une fonction bornée et on a :

$$\|R_n\|_\infty \leq r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc également sur $\mathbb{R}_-^*$).

Exercice 16. *Fonction Zêta de Riemann*

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $s \in]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Justifier la définition de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$ en étudiant la convergence simple de la série de fonctions. Que dire de la convergence uniforme de la série vers la fonction ζ ?

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$ qui est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- Déterminons le domaine de la fonction ζ. On remarque que $\zeta(s)$ existe si, et seulement si, la série numérique $\sum f_n(s)$ est convergente. On se ramène donc à trouver le plus grand intervalle sur lequel la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement.

  CVS sur $\mathbb{R}$: Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, d'après le critère de Riemann,
  $f_n(s) = \frac{1}{n^s}$ est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $s > 1$.
  Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ et ne converge pas simplement sur $]-\infty, 1]$.

  Il en résulte que le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty[$.

  > **Remarque :** En prenant s complexe, on peut, de la même manière que précédemment, montrer que ζ est bien définie sur $\mathrm{DP} = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$. On montrera dans la suite que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et de manière similaire, on peut montrer que ζ est *holomorphe* (i.e. une fonction de la variable complexe dérivable... pour sa variable complexe !) sur DP.
  > Par des méthodes que nous ne détaillerons pas ici, on peut montrer que la fonction ζ peut être prolongée de manière *analytique* (nous parlerons de cela quand nous aborderons les développements en séries entières) et donc en particulier, ζ admet un prolongement continu sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
  > Ce prolongement (dont on peut prouver qu'il est unique) donne la valeur :
  >
  > $$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$
  >
  > d'où la célèbre confusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n = -\frac{1}{12}$!
  > Mais il ne faut pas s'y méprendre ! Comme nous l'avons définie, la série à termes positifs $\sum n$ diverge et donc tend vers $+\infty$. La formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ de la fonction ζ n'est plus valable dans le sens "somme de série numérique" pour les complexes s en dehors de DP et il faut utiliser une autre formule - une de celles qui permettent de définir le prolongement - pour obtenir la valeur de $\zeta(s)$.

- On essaye la convergence normale dans un premier temps :

  CVN sur $]1, +\infty[$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

  $$\|f_n\|_\infty = \sup_{s \in]1, +\infty[} \left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n}$$

qui le terme général d'une série divergente, donc il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$.
On voit que le problème se situe en 1 puisque le "$\frac{1}{n}$" est atteint en $s=1$. On tente donc d'isoler ce problème :
soit $a>1$.
CVN sur $[a,+\infty[$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{s\in[a,+\infty[} \left(\frac{1}{n^s}\right) = \frac{1}{n^a}$$

qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $a>1$.
Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement et donc uniformément vers ζ sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ pour $a>1$. Nous verrons dans la partie suivante que cela nous satisfait amplement pour en déduire la continuité de ζ sur $]1,+\infty[$.

Mais pour répondre à la question initiale, il nous reste à étudier la convergence uniforme sur $]1,+\infty[$:
CVU sur $]1,+\infty[$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $s>1$:

$$|R_n(s)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Or, par une comparaison série-intégrale que nous avons effectuée au chapitre précédent, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}\frac{1}{(n+1)^{s-1}} \xrightarrow[s\to1^+]{} +\infty\times 1 = +\infty$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $|R_n(s)| \xrightarrow[s\to1^+]{} +\infty$ et ainsi, R_n n'est pas bornée sur $]1,+\infty[$.
Ainsi, $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

Partie B

Théorèmes d'étude de fonctions définies par des limites/sommes de suites/séries de fonctions

1. Continuité

Proposition 11.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

Pour tout $x \in A$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f_n(a)\|_F + \|f_n(a) - f(a)\|_F.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq N$:

  $$\|f(x) - f_n(x)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

  et c'est donc en particulier vrai pour $x = a$ également :

  $$\|f(a) - f_n(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Soit $n \geq N$. Comme f_n est continue en a, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$:

  $$\|f_n(x) - f_n(a)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, en choisissant $n \geq N$, on exhibe un δ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$,

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f_n(x)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(x) - f_n(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(a) - f(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon.$$

Par suite, f est continue en a. □

Corollaire 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur

A.

Démonstration.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors, pour tout $a \in A$, f_n est continue sur A et donc, d'après la proposition précédente, f est continue en a. Il en résulte que f est continue sur A. □

Proposition 12. *Cas particulier des séries*

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur A), alors S est continue en a (resp. sur A).

Démonstration.

On suppose que $\sum f_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur A). Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue en a (resp. sur A) comme somme (finie !) de fonctions continues en a (resp. sur A). Ainsi, d'après la proposition 11 (resp. le corollaire 2), S est continue en a (resp. sur A). □

Remarque 4.

— Ainsi, on peut, après avoir établi la convergence simple d'une suite/série de fonctions continues, conclure directement à la non convergence uniforme si la fonction limite n'est pas continue !

— Comme la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme, une série de fonctions continues qui converge normalement converge vers une fonction S continue.

Théorème 1.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors S est continue en a.

Démonstration.

On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage V de a et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Alors d'après le corollaire 2, $f : V \to F$ est continue sur V. Comme V est un voisinage (relatif de A) de a, alors $f : A \to F$ est continue en a.

De même dans le cas particulier des séries en utilisant la proposition 12. □

Théorème 2. *Théorème de continuité des limites de suites/séries de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors S est continue sur A.

Démonstration.

On applique le théorème précédent en tout point de A. □

Exemple 9.

La série de fonction $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

> On pose $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
>
> <u>CVN sur $[-a, a]$:</u>
> Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
> $$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} \left(\left| \frac{x^n}{n!} \right| \right) = \frac{a^n}{n!}.$$
> Or, $\frac{a^n}{n!}$ est le terme général d'une série convergente (d'après la règle de D'Alembert par exemple) d'où $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ et donc uniformément sur $[-a, a]$ vers S et ce, pour tout $a > 0$.
> De plus, tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$ donc $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers S.

Ainsi, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ car $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

> En effet, chaque point x_0 de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ qui est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17.

1. Justifier que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est continue sur cet intervalle.
2. Montrer que la fonction ζ de Riemann est continue sur $]1,+\infty[$.

Correction.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$. On a montré dans l'exercice 15 que $\sum f_n$ converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Comme $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, sa fonction limite $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus, $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers S donc d'après le théorème de continuité des limites de séries de fonctions (Theorème 1), S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. Montrons que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $]1,+\infty[$.
   - Domaine de définition de ζ.

     CVS sur $\mathbb{R}$:

     Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, d'après le critère de Riemann, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $x > 1$.

     Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ d'où ζ est définie sur $]1,+\infty[$.
   - On applique le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions :
     - les f_n sont continues sur $]1,+\infty[$ car $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
     - CVU sur tout segment de $\mathbb{R}$:

       Soit $a > 1$. On établit la Convergence Normale sur $[a,+\infty[$.

       Soit $n \in \mathbb{N}$. pour tout $x \in [a,+\infty[$,

       $$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

       donc $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^a}$ (c'est même une égalité) qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann.

       Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Il en résulte que, pour tout $a > 1$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, et donc que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

     Par suite, d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonction, ζ est continue sur $]1,+\infty[$

2. Limites

a. Interversion de limites

Théorème 3. *Théorème de la double limite*

Soit $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors :

i) il existe $\ell \in F$ tel que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers ℓ et,

ii) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Autrement dit,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Sous les mêmes hypothèses, le résultat est valable dans les cas suivants :

— $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$;

— $F = \mathbb{R}$; à partir d'un certain rang, $\ell_n = \lim_{x\to a} f_n(x) = \pm\infty$; et $\ell = \pm\infty$.

Démonstration Hors programme.

Cette démonstration est hors programme car nous n'avons pas le bon cadre permettant de la démontrer "joliment" : il nous manque la notion d'espace métrique *complet*. En fait, l'énoncé reste vrai en supposant que F (l'espace d'arrivée des fonctions f_n et f) est un espace métrique complet. Dans notre cas, F est bien complet car c'est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Un espace métrique est dit complet si toutes les suites à valeurs dans cet espace dont les termes se rapprochent uniformément en l'infini - on appelle cela une suite de Cauchy - convergent. De manière imagée, un espace complet est un ensemble dans lequel il n'y a pas d'élement "manquant", de "trou", métriquement parlant - penser à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ munis de la distance associée à la valeur absolue : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et $\mathbb{R}$ l'est ; les trous dans $\mathbb{Q}$ sont les irrationnels. Par exemple, pour montrer la non-complétude de $\mathbb{Q}$, on peut considérer la suite $(\frac{\lfloor 10^n e\rfloor}{10^n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ car e est irrationnel (oui, e est irrationnel ! Exercice : prendre la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n!}$ et la suite $(S_n + \frac{1}{n.n!})$; montrer qu'elles sont adjacentes - et donc de limite e puis en déduire que e est bien irrationnel).
Comme dit précédemment, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet : pour le démontrer, il nous faudrait construire proprement l'ensemble des réels, ce qui est complètement hors programme. Selon la construction effectuée (avec des suites de Cauchy justement ou les coupures de Dedekind par exemple), la complétude ne s'obtient pas de la même manière.
Pour démontrer notre énoncé tout en restant dans le programme, nous allons "tricher" un peu, en laissant sous silence la construction de $\mathbb{R}$, et en nous inspirant d'une façon de montrer la complétude de $\mathbb{R}$, sans en parler bien-sûr !

Allons-y :
Soit $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$.

i) Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geq N$ et pour tout $x \in A$, on a :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \|f_p(x) - f(x)\|_F + \|f_q(x) - f(x)\|_F \leq \|f_p - f\|_\infty + \|f_q - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Par suite, en passant à la limite quand x tend vers a, l'application $u \mapsto \|u\|_F$ étant continue sur F, on obtient :

$$\|\ell_p - \ell_q\|_F \leq \varepsilon.$$

C'est ici que nous devons nous compliquer la vie : avec l'hypothèse F complet, nous aurions pu conclure directement que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car nous venons de prouver qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Rusons pour nous en sortir dans le cadre du programme : pour tout $n \geq N$, on a $\|\ell_n\|_F \leq \|\ell_n - \ell_N\|_F + \|\ell_N\|_F \leq \varepsilon + \|\ell_N\|_F$, donc la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang N et donc est bornée tout court !
Comme F est un espace vectoriel normé de dimension finie (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique à la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il existe une sous-suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in F$.
Soit $\varepsilon' > 0$. On pose $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} > 0$.
Comme $(\ell_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\|\ell_{\varphi(n)} - \ell\|_F \leq \varepsilon$ et en reprenant le calcul initial, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|\ell_p - \ell_q\|_F \leq \varepsilon$.
On pose $N' = \max(N, M) \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq N'$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$, d'où :

$$\|\ell_n - \ell\|_F \leq \|\ell_n - \ell_{\varphi(n)}\|_F + \|\ell_{\varphi(n)} - \ell\|_F \leq 2\varepsilon = \varepsilon'.$$

Par suite, $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

ii) Notons ℓ la limite de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

— Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$;
— comme $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$, $\|\ell_n - \ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$;
— pour $N = \max(N_1, N_2)$, comme $f_N(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_N$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f_N(x)\ell_N\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Par suite, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \delta$, on a :

$$\|f(x) - \ell\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f_N(x)\|_F}_{\leq \|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_N(x) - \ell_N\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\ell_N - \ell\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

□

b. Cas des séries

Théorème 4. *Inversion limite/somme*

Soit $a \in \overline{A}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors la série $\sum \ell_n$ converge et on a :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right).$$

Sous les mêmes hypothèses, le résultat est valable dans les cas où $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$.

Exercice 18.

1. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.

2. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{x\to 0^+} x \sum_{n=0} \dfrac{1}{n^2+x}$.

3. Intégration

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a < b$.

a. Intégration sur un segment

On rappelle la notation suivante :

Notation 2. *Norme de la convergence en moyenne*

Soit $C([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On note $\|\cdot\|_1$ la **norme de la convergence en moyenne** sur $C([a,b],\mathbb{K})$ i.e. pour $f \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 13.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f i.e. $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.

Sur $C([a,b],\mathbb{K})$, la norme de la convergence en moyenne est dominée par la norme de la convergence uniforme ; plus précisément, on a, pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Démonstration.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. On a :

$$\int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|} \mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_a^b \mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty.$$

□

Théorème 5. *Interversion limite/intégrale*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ et ;
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,

alors $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors, comme les (f_n) sont continues sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et on a, d'après le lemme précédent :

$$\|f_n - f\|_1 \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc (f_n) converge en moyenne vers f. Par suite, d'après la proposition précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice 19.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto n\sin^n(x)$ qui est continue sur $[0,1]$. Étudions la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CVS sur $[0,1]$:

Soit $x \in [0,1]$. Étudions la nature de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 \leq \sin(x) < 1$ donc, par croissances comparées :

$$f_n(x) = n\sin^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

CVU sur $[0,1]$:

On a, par positivité et croissance de la fonction $\sin^n$ sur $[0,1]$:

$$\|f_n - f\|_\infty = n\sin^n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion limite/intégrale, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n\sin^n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

b. Intégration des séries de fonctions

Théorème 6. *Interversion intégrale/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ et ;
- la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$,

alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a,b]$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S. Ainsi, on obtient le résultat en appliquant le théorème d'interversion limite/intégrale (Théorème 5) à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Exercice 20.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0,\pi]$, puis démontrer que

$$\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{7}{4}\zeta(3).$$

c. Primitives

Théorème 7.

Soit $a \in I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors pour tout $x \in I$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $a \in I$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers sa somme S, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On applique le théorème 5 sur le segment $[a, x]$. $\square$

Exercice 21.

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$ qui est une fonction continue sur $]-1,1[$. De plus, d'après l'exemple 7 la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Ainsi, d'après le théorème 7, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$-\ln(1-x) = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4. Dérivation

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a < b$.

a. Dérivation des suites de fonctions

Théorème 8. *Interversion dérivation/limite*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et f, g des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et ;
- la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I.

Alors :

— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I ;

— la fonction f est de classe C^1 sur I et on a :

$$f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = g = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Démonstration.

En fait, on peut affaiblir les hypothèses du théorème sans changer sa conclusion : le résultat reste valide si on remplace i) par : "il existe $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ" et en posant $f : x \mapsto \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}t + \ell$. Montrons le :

Tout d'abord, remarquons que la fonction g est continue sur I d'après le théorème de continuité des limites de suites de fonctions car les f'_n sont continues sur I et la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout segment de I vers la fonction g.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}t + \ell$ est définie sur I et de classe C^1 sur I comme primitive sur I de la fonction g continue sur I.
Comme les f_n sont C^1 sur I, les f'_n sont continues sur I et d'après ii), la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur tout segment de I vers la fonction g. Ainsi, d'après le théorème 7, pour $x \in I$, la suite $\left(\int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$f(x) - \ell = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t + f_n(a).$$

Ainsi, comme par hypothèse, $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme combinaison linéaire de suites convergentes et on a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) + \ell - \ell = f(x).$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = f' = g = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Il reste à montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de I :

Soit S un segment de I de longueur s et contenant a. Pour tout $x \in S$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(a) - \left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t - \ell\right)\right| \\
&= \left|\int_a^x (f_n'(t) - g(t))\,\mathrm{d}t + f_n(a) - \ell\right| \\
&\leq \int_{\min(a,x)}^{\max(a,x)} \underbrace{|f_n'(t) - g(t)|}_{\leq \|f_n' - g\|_{\infty,S}}\,\mathrm{d}t + |f_n(a) - \ell| \\
&\leq |x - a|\,\|f_n' - g\|_{\infty,S} + |f_n(a) - \ell| \\
&\leq s\|f_n' - g\|_{\infty,S} + |f_n(a) - \ell|.
\end{aligned}$$

Par suite, $f_n - f$ est bornée sur S (mais on le savait déjà car $f_n - f$ est continue sur le segment S) et on a, par convergence uniforme sur S de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vers g et par convergence de $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ :

$$\|f_n - f\|_{\infty,S} \leq s\|f_n' - g\|_{\infty,S} + |f_n(a) - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I contenant a vers f. Or, tout segment de I est inclus dans un segment de I contenant a, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f. □

Remarque 5.

— Dans la conclusion, on ne peut pas espérer mieux que la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout segment de I, et ce, même si on a convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur I tout entier vers g. En effet, pour $f_n : x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$, on a $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $g : x \mapsto 2x$ mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier (mais converge bien sûr uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$) !

— Avec la notation de la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, la conclusion du théorème précédent devient, pour $x \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

Corollaire 3. *Cas des fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et ;
- la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors :

— pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ;

— la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^k sur I et, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a :

$$f^{(i)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(i)}.$$

b. Dérivation des séries de fonctions

Théorème 9. *Interversion dérivation/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers sa somme S sur I et ;
- la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors :

— la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur tout segment de I ;

— la fonction S est de classe C^1 sur I et on a :

$$S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Remarque 6.

Avec la notation de la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, la conclusion du théorème précédent devient, pour $x \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

Exemple 10.

La fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S(x) = -\ln(1 - e^{-x}).$$

En Sup', la fonction exponentielle exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est définie comme étant la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien (l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1. On peut alors montrer que la fonction exp est l'unique solution du problème de Cauchy $y' = y$ et $y(0) = 1$ (ce qui peut d'ailleurs être pris comme définition de l'exponentielle également). Le théorème suivant propose une "nouvelle" expression de la fonction exp comme somme de série de fonctions... bon, en fait, on en parle depuis longtemps mais on va enfin le démontrer proprement !

Théorème 10.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Démonstration.

Considérons la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.

Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion dérivation / somme (Théorème 9) :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

- Montrons la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.

  CVS sur $\mathbb{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\dfrac{x^n}{n!}$ est le terme général d'une série numérique absolument convergente et donc convergente.
  Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

- Montrons la convergence uniforme de $\sum f_n'$ (au moins) sur tout segment de $\mathbb{R}$.
  Soit $a > 0$.
  CVN sur $[-a, a]$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f_0' = 0$ et, si $n \geq 1$, pour tout $x \in [-a, a]$,

$$|f_n'(x)| = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$$

  donc $\|f_n'\|_\infty \leq \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ (c'est même une égalité) qui est le terme général d'une série convergente d'après, par exemple, la règle de d'Alembert.
  Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge. Il en résulte que, pour tout $a > 0$, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$, et donc, $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-a, a]$.
  Tout segment de $\mathbb{R}$ étant inclus dans un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$, la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par suite, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Par suite, comme de plus on a $S(0) = 1$, S est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est la fonction $x \mapsto \exp(x)$.
Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

□

Exercice 22.

Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

Correction.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Montrons que S est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $]-1,1[$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

- ⋆ CVS sur $]-1,1[$: Soit $x \in]-1,1[$. Étudions la nature de $\sum f_n(x)$. On a :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \underset{\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

Or $|x|^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $|x|<1$, donc, par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge absolument et donc converge.

- ⋆ Étudions la convergence uniforme de $\sum f_n'$ (au moins) sur tout segment de $]-1,1[$.

Soit $a \in]0,1[$.

CVN sur $[-a,a]$ de $\sum f_n'$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-a,a]$, on a :

$$|f_n'(x)| = \frac{n|x|^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^n)^2} \leq na^{n-1}$$

Par suite, f_n' est bornée sur $[-a,a]$ et on a, sur $[-a,a]$:

$$\|f_n'\|_\infty \leq na^{n-1}$$

Or, comme $a \in]0,1[$, $\sum na^{n-1}$ converge (en utilisant la règle de D'Alembert ou par comparaison à une série de Riemann convergente par exemple), donc, par comparaison, $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge i.e. $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.

Ainsi, pour tout $a \in]0,1[$, $\sum f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur $[-a,a]$. Or, tout segment de $]-1,1[$ est inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$, donc $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$.

Il en résulte que, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme :

— la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$;

— la fonction S est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

Corollaire 4. *Cas des séries de fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de I dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur I et ;
- la série $\sum f^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors :

— pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;

— la somme S de la série $\sum f_n$ est de classe C^k sur I et, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a

$$S^{(i)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}.$$

c. Suites et séries de fonctions de classe C^∞

Théorème 11. *Cas des fonctions de classe C^∞*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

i) **Théorème d'interversion dérivation/limite.** Si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur I ;
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ; et
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors :

— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segement de I et,

— la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^∞ sur I et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(k)} = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$$

ii) **Théorème d'interversion dérivation/somme.** Si :
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur I ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors :

— la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segement de I et,

— la somme S de la série $\sum f_n$ est de classe C^∞ sur I et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$S^{(k)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$

Exemple 11.

La somme S de la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)} = S$.

Remarque : cet exemple est destiné à illustrer le théorème précédent, donc nous allons l'utiliser pour montrer l'affirmation proposée. On pouvait bien-sûr la démontrer beaucoup plus rapidement en utilisant le fait que $S = \exp$ d'après le théorème 10 !

Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme (version C^∞) :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur I car polynomiale et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < k \\ \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I (voire Exemple 2)
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Étudions la convergence uniforme (au moins) sur tout segment de I de la série $\sum f_n^{(k)}$.
Soit $a > 0$.
<u>CVN sur $[-a, a]$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n < k$, on a $f_n' = 0$ et si $n \geq k$, pour tout $x \in [-a, a]$,
$$|f_n^{(k)}(x)| = \frac{|x|^{n-k}}{(n-k)!} \leq \frac{a^{n-k}}{(n-k)!}$$
donc $\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \dfrac{a^{n-k}}{(n-k)!}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après, par exemple, la règle de d'Alembert.
Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n^{(k)}\|_\infty$ converge. Il en résulte que, pour tout $a > 0$, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[-a, a]$, et donc, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[-a, a]$.
Tout segment de $\mathbb{R}$ étant inclus dans un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par suite, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$S^{(k)}(x) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Exercice 23.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ est C^∞ sur $]-1, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire une expression, pour tout $x \in]-1, 1[$, de :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^n.$$
2. Montrer que la fonction ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$ et pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $\zeta^{(k)}$.
3. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est croissante et déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Correction.

2. Montrons que $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme (version C^∞) :

   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$;

   ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.

   i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $x \in]1, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$. Ainsi, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exp et $x \mapsto -x\ln(n)$ qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en particulier, f_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et on a, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1, +\infty[$:

   $$f_n^{(k)} = (-1)^k \ln(n)^k e^{-x\ln(n)} = \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}.$$

   ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a > 1$. On étudie la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\|f_n^{(k)}\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} \left| \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x} \right| \leq \frac{\ln(n)^k}{n^a}.$$

   — Pour $k = 0$, $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a} = \dfrac{1}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $a > 1$. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

   — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\beta > 0$, $\ln(n) = o(n^\beta)$; ainsi, pour $\beta = \dfrac{a-1}{2k} > 0$, on a :

   $$\frac{\ln(n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a-k\beta}}\right)$$

   Or $a - k\beta = a - \frac{a-1}{2} = \dfrac{a+1}{2} > 1$ car $a > 1$; par suite, d'après le critère de Riemann, $\dfrac{1}{n^{a-k\beta}}$ est le terme général d'une série convergente et donc $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a}$ l'est aussi par comparaison. Ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

   Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty$ pour tout $a > 1$ et donc sur tout segment de $]1, +\infty[$.
   Il en résulte que, par le théorème d'interversion dérivation/somme, ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1, +\infty[$:

   $$\zeta^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^x}.$$

Partie C
Approximation uniforme

Dans cette partie, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et sont à valeurs dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. De plus, a, b désignent deux réels de I tels que $a < b$.

1. Définitions

Définition 7. *Subdivision d'un segment*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille finie à valeurs dans $[a, b]$. On dit que σ est une **subdivision du segment** $[a, b]$ si

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Définition 8. *Fonctions en escalier*

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{F}$. On dit que φ est une **fonction en escalier sur** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est constante.

On note $\mathrm{Esc}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Définition 9. *Fonctions continues par morceaux*

Soit $f : I \to F$. On dit que f est **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$.

On dit que f est **continue par morceaux sur l'intervalle** I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.

On note $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exercice 24.

1. Dessiner quelques graphes de fonctions en escalier et continues par morceaux sur un segment.
2. Montrer que $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_b(I, F)$.

2. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Théorème 12.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],F)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Autrement dit, toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.
Autrement dit, l'ensemble $\mathrm{Esc}([a,b],F)$ est dense dans $(C_{pm}([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

- On traite tout d'abord le cas f continue sur $[a,b]$. Alors, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| \leq \delta$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$. On construit alors une subdivision de $[a,b]$ de la façon suivante :
— comme la suite $(\dfrac{b-a}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leq \delta$.
— pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.
Ainsi, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision de $[a,b]$. On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x = a \\ f(a_{i+1}) & \text{si } a_i < x \leq a_{i+1}, i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
— $x = a$. Alors $\|f(a) - \varphi(a)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
— il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}]$. Alors $|x - a_{i+1}| \leq \delta$, donc :
$$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f(x) - f(a_i)\|_F \leq \varepsilon.$$
Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
- Traitons maintenant le cas général $f \in C_{pm}([a,b],F)$. On considère une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f et on note, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i le prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme pour chaque $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, en appliquant le point précédent à f_i, on construit $\varphi_i \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.
On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } x = a_i,\ i \in [\![0,n]\!] \\ \varphi_i(x) & \text{si } a_i < x < a_{i+1},\ i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
— il existe $i \in i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = a_i$. Alors $\|f(a_i) - \varphi(a_i)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
— il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Alors, on a :
$$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f_i(x) - \varphi_i(x)\|_F \leq \|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon.$$
Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Pour démontrer ce point, on pouvait également remarquer que tout fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. On conclut alors en approximant, grâce au premier point, cette fonction continue par une fonction en escalier.

□

Exercice 25.

Montrer que toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

Exercice 26. *Cas particulier du Lemme intégrale de Riemann-Lebesgue*

Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales : théorème de Weierstrass

Notation 3. *Fonctions polynomiales*

On note $\mathcal{P}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ restreintes au segment $[a,b]$ i.e. si $p \in \mathcal{P}([a,b],\mathbb{K})$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $p(x) = P(x)$.

Théorème 13. *Théorème de Weierstrass*

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}([a,b],\mathbb{K})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Autrement dit, toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{P}([a,b],\mathbb{K})$ est dense dans $(C([a,b],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration non exigible.

Voire le problème 1. $\square$

Exercice 27.

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

Remarque 7.

Le théorème de Weierstrass n'est pas valable en remplaçant $[a,b]$ par un intervalle non bornée, comme $\mathbb{R}$ par exemple. On peut s'en convaincre en remarquant par exemple qu'une fonction continue bornée non constante sur $\mathbb{R}$ ne peur être approchée uniformément pas une suite de polynômes.
Et c'est même "plus grave" que cela, comme en atteste l'exercice suivant :

Exercice 28.

1. Soit p une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction p est bornée sur $\mathbb{R}$, alors p est constante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Correction.

1. Soit $p : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale. On suppose que p n'est pas constante. Alors $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Ainsi, on a $p(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ donc p n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi, par contraposée, si p est bornée sur $\mathbb{R}$ alors p est constante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.
   Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\|p_n - f\|_\infty \leq 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$|p_n(x) - p_N(x)| \leq |p_n(x) - f(x)| + |p_N(x) - f(x)| \leq \|p_n - f\|_\infty + \|p_N - f\|_\infty \leq 2.$$

   La fonction $p_n - p_N$ qui est polynomiale comme combinaison linéaire de fonctions polynomiales, est donc bornée sur $\mathbb{R}$. Par suite, d'après la question 1., $p_n - p_N$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. On note c_n cette constante.
   D'après le calcul précédent, on a $|c_n| = \|p_n - p_N\|_\infty \leq 2$ d'où $(c_n)_{n\geq N}$ est une suite à valeurs réelles bornées et donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(c_{\varphi(n)})_{n\geq N}$ de $(c_n)_{n\geq N}$ qui converge vers une réel c.
   Comme $(p_{\varphi(n)})_{n\geq N}$ converge uniformément et donc simplement vers f sur $\mathbb{R}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$:

   $$f(x) = p_N(x) + \underbrace{(p_{\varphi(n)}(x) - P_N(x))}_{=c_{\varphi(n)}} + \underbrace{(f(x) - p_{\varphi(n)}(x))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} p_N(x) + c$$

   Ainsi $f = p_N + c$ et donc f est une fonction polynomiale.

E&P

Exercices et problèmes

Exercice 29.

On considère E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur E telle que, pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur E vers 0_E si, et seulement si, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|)$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Construire une suite de fonctions de norme 1 qui converge simplement vers 0_E.
2. Conclure.
3. Montrer, si ce n'est déjà fait !, que l'affirmation de l'énoncé reste valable pour $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n+1}]} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; alors $g_n \neq 0_E$ et on note $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$.
   Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
   <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u>
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leq 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$. Si $x > 0$, alors, pour $N = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x} < N + 1$, donc, pour tout entier $n \geq N$, $x > \frac{1}{N+1} \geq \frac{1}{n+1}$.
   Par suite, on a, pour tout entier $n \geq N$, $g_n(x) = 0$ et donc $f_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|} = 0$. Ainsi,
   $$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente ne converge pas vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|)$ car $\|f_n - 0_E\| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$. Par suite, il existe une suite à valeurs dans E qui converge simplement vers 0_E mais qui ne converge pas vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|)$ d'où la véracité de l'affirmation de l'énoncé.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contruite dans la question 1. n'est plus à valeurs dans E et même si essayait de rendre au moins affine par morceaux les f_n, on perdrait la convergence en 0 vers 0. On va donc éloigner 0 de la partie ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = x \mapsto \begin{cases} (n+2)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+2}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}] \\ \frac{n+1}{n}(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$; alors, on vérfie que la g_n est continue, que $g_n \neq 0_E$ et on note $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0_E

(à vérfier par le lecteur !) et, comme précédemment, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E dans $(E, \|\cdot\|)$!

Exercice 30. *Fonction continue et dérivable nulle part*

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que φ est 4-périodique sur $\mathbb{R}$ et définie, pour $x \in [-2, 2]$, par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 + x & \text{si } -2 < x < 0 \end{cases}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{\varphi(2^{2^n})x}{2^n}$.

1. Montrer que φ est bornée par 1 et 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Dans cette question, on cherche à démontrer que S n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in \mathbb{Z}$ et $u_n \in \{-1, 1\}$ tels que $2^{2^n}x$ et $2^{2^n}x + u_n$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n + 2$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h_N = \frac{u_N}{2^{2^N}}$.
      i. Calculer $f_n(x + h_N) - f_N(x)$ pour $n = N$ puis pour $n > N$.
      ii. Montrer que :
      $$|S_{N-1}(x + h_N) - S_{N-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}$$
      où S_n désigne la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.
   (c) Déduire de ce qui précède que S n'est pas dérivable en x puis conclure.

Correction.

1. On a $|1 \pm x| \leq 1$ pour tout $x \in [-2, 2]$, donc, par 4-périodicité de φ, φ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Distinguons plusieurs cas :
   * Si $|x - y| \geq 2$: comme φ est bornée par 1, on a :
   $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2 \leq |x - y|.$$
   * Si $|x - y| < 2$: φ étant 4-périodique, on peut supposer sans perte de généralité que $x \in]-2, 2]$.
     — Si $x, y \in]-2, 0[$ ou $x, y \in [0, 2]$ alors, φ étant affine de coefficient directeur ± 1 sur ces intervalles, on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$.
     — Sinon, si $x \in]-2, 0[$, alors $y \in [0, 2]$ d'où :
     $$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f(0)|}_{=|1+x-1|} + \underbrace{|f(0) - f(y)|}_{|1-(1-y)|} = |x| + |y| = -x + y = |x - y|.$$

— Sinon, si $x \in [0,2]$, alors $y \in]2,4[$ d'où :

$$|f(x)-f(y)| \leq \underbrace{|f(x)-f(2)|}_{=|1-x+1|} + \underbrace{|f(2)-f(y)|}_{|-1-(1+(y-4))|} = |2-x|+|2-y| = 2-x+y-2 = |x-y|.$$

Ainsi, dans tous les cas, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |x-y|$. D'où φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
Remarque : on aurait pu montrer le fait plus général suivant : si une fonction est continue, lipschitzienne par morceaux sur $\mathbb{R}$ et telle que l'ensemble des constantes de Lispchitz sur les morceaux est majoré, alors cette fonction est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.
CVN sur $\mathbb{R}$:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, comme φ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = \frac{|\varphi(2^{2^n}x)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente car série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.
Par suite, par comparaison $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$ vesr S.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonctions continues $x \mapsto 2^{2^n}x$ et φ (continue car lipschitzienne), donc, d'après le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n \geq 2$ d'où $2^{2^n} = 4q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et donc, par 4-périodicité de φ :

$$f_n(x+1) = \varphi(2^{2^n}(x+1)) = \varphi(2^{2^n}x + 2^{2^n}) = \varphi(2^{2^n}x) = f_n(x).$$

Par suite, f_n est 1 périodique. Ainsi, comme S est la limite simple de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, S est 1 périodique sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $y = 2^{2^n}x$. Pour $a_n = \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$, on a $2a_n \leq y < 2a_n + 2$.
   - Si $2a_n \leq y < 2a_n+1$, alors $2a_n \leq 2a_n+1 \leq y+1 < 2a_n+2$, d'où, pour $u_n = 1$, $2^{2^n}x = y$ et $2^{2^n}x + u_n = y+1$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n+2$.
   - Si $2a_n+1 \leq y < 2a_n+2$, alors $2a_n \leq y-1 < 2a_n+1 < 2a_n+2$, d'où, pour $u_n = -1$, $2^{2^n}x = y$ et $2^{2^n}x + u_n = y-1$ sont compris entre $2a_n$ et $2a_n+2$.

   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$2^{2^n}h_N = 2^{2^n}\frac{u_N}{2^{2^N}} = 2^{2^n-2^N}u_N.$$

   i. $*$ pour $n = N$:
   Si a_N est pair, alors $2^{2^N}x$ et $2^{2^N}x + u_N$ sont compris entre $4q$ et $4q+2$ où $a_N = 2q$;
   Si a_N est impair, alors $2^{2^N}x$ et $2^{2^N}x + u_N$ sont compris entre $4q-2$ et $4q$ où $a_N = 2q-1$;

donc, par 4-périodicité de φ, on a :

$$\begin{aligned}
&\varphi(2^{2^N}x+u_N)-\varphi(2^{2^N}x)\\
&=\begin{cases}1-(2^{2^N}x+u_N-4q)-(1-(2^{2^N}x-4q)) & \text{si } a_N \text{ pair}\\ 1+(2^{2^N}x+u_N-4q)-(1+(2^{2^N}x-4q)) & \text{si } a_N \text{ impair}\end{cases}\\
&\varphi(2^{2^N}x+u_N)-\varphi(2^{2^N}x) \quad = \quad u_N
\end{aligned}$$

d'où :

$$f_N(x+h_N)-f_N(x)=\frac{u_N}{2^N}=\pm\frac{1}{2^N}.$$

* <u>pour $n>N$:</u>
On a $2^n-2^N=2^N(2^{n-N})\geq 2$ car $N\in\mathbb{N}^*$ donc $q=2^{2^n-2^N-2}u_N$ est un entier et on a :

$$2^{2^n}h_N=2^{2^n-2^N}u_N=4q.$$

Par suite, par 4-périodicité de φ :

$$f_n(x+h_N)-f_n(x)=\varphi(2^{2^n}x+2^{2^n}h_N)-\varphi(2^{2^n}x)=\varphi(2^{2^n}x+4q)-\varphi(2^{2^n}x)=0.$$

ii. Comme φ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|\varphi(2^{2^n}x+2^{2^n}h_N)-\varphi(2^{2^n}x)|\leq 2^{2^n}|h_N|=2^{2^n-2^N}.$$

Par suite, si $n<N$, on a $2^n-2^N\leq 2^{N-1}-2^N=-2^{N-1}$, d'où

$$|\varphi(2^{2^n}x+2^{2^n}h_N)-\varphi(2^{2^n}x)|\leq\frac{1}{2^{2^{N-1}}}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
|S_{N-1}(x+h_N)-S_{N-1}(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}(f_n(x+h_N)-f_n(x))\right|\\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}|f_n(x+h_N)-f_n(x)|\\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{|\varphi(2^{2^n}x+2^{2^n}h_N)-\varphi(2^{2^n}x)|}{2^n}\\
&\leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{2^n}}_{=1-\frac{1}{2^{N-1}}\leq 1}\\
&\leq \frac{1}{2^{2^{N-1}}}.
\end{aligned}$$

(c) On a, d'après les deux précédentes questions, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

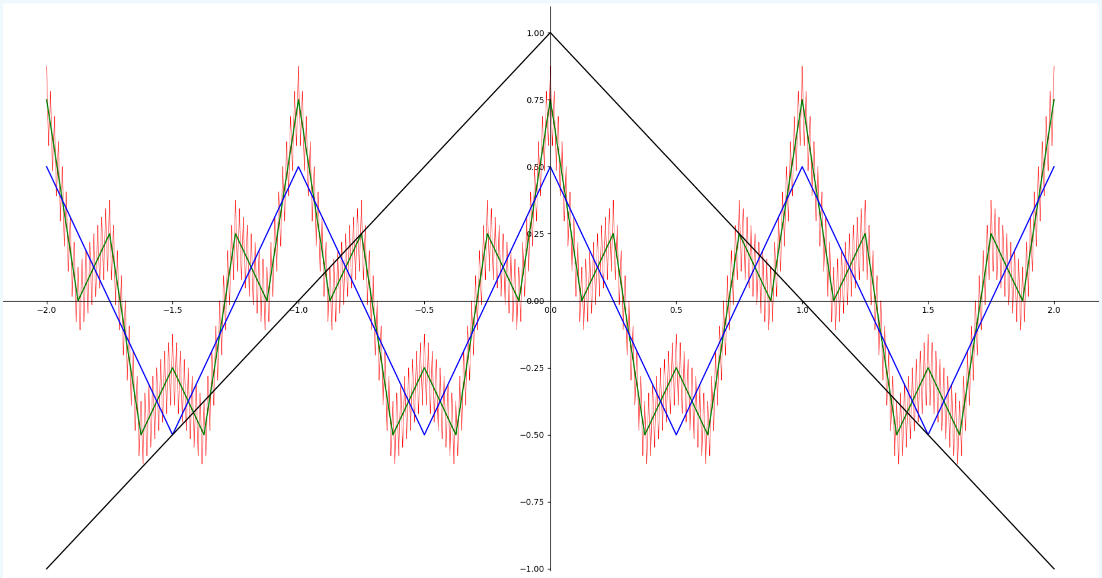
$$\begin{aligned}
\left|\frac{S(x+h_N)-S(x)}{h_N}\right| &= \frac{1}{|h_N|}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h_N)-f_n(x))\right| \\
&= 2^{2^N}\left|(S_{N-1}(x+h_N)-S_{N-1}(x)) \pm \frac{1}{2^N}\right| \\
&\geq 2^{2^N}\left(\frac{1}{2^N}-|S_{N-1}(x+h_N)-S_{N-1}(x)|\right) \\
&\geq 2^{2^N}\left(\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^{2^{N-1}}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|\frac{S(x+h_N)-S(x)}{h_N}\right| \geq 2^{2^N}\left(\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^{2^{N-1}}}\right) = 2^{2^N-N}\left(1-\frac{1}{2^{2^{N-1}-N}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Or, on remarque que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc la quantité $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$ n'admet pas de limite finie quand h tend vers 0 i.e. S n'est pas dérivable en x.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, S n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ et est continue en tout point de $\mathbb{R}$!



Aperçu des fonctions : φ (en noir) ; S_1 (en bleu) ; S_2 (en vert) ; S_3 (en rouge).

On se propose, dans le problème suivant, de démontrer le théorème de Weierstrass (Théorème 13) à l'aide des polynômes de Bernstein. La démonstration semble astucieuse mais nous verrons une reformulation bien plus élégante de cette démonstration dans le chapitre sur les probabilités dont les outils sont bien adaptés à l'étude de ces polynômes.

Problème 1. *Polynômes de Bernstein et démonstration du Théorème de Weierstrass*

Pour $f \in C([0,1],\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $B_n(f) \in \mathbb{K}[X]$ défini par :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}.$$

Les polynômes $B_n(f)$ sont appelés *polynômes de Bernstein associés à* f.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $f_i : x \mapsto x^i$ et $g : x \mapsto x(1-x)$.

1. Déterminer les polynômes de Bernstein associés aux fonctions f_0, f_1 et g.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Après avoir montrer que l'application $f \mapsto B_n(f)$ définie sur $C([0,1],\mathbb{K})$ est linéaire, déterminer $B_n(f_2)$.
   (b) Exprimer de deux façons le polynôme $B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2B_n(f_0)$ puis montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:
   $$\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n} - x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}.$$
3. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{K})$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$:
   $$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\delta}.\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Indication : on pensera à utiliser le théorème de Heine.
   (b) En déduire que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
4. Démontrer le théorème de Weierstrass.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\mathbf{f_0}$. On a, d'après la formule du binôme de Newton :
   $$B_n(f_0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

f₁. On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k}\frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}$ donc :

$$\begin{aligned}
B_n(f_1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{(n-1)-k} \\
&= X(X + (1-X))^{n-1} \\
B_n(f_1) &= X.
\end{aligned}$$

g. Si $n = 1$, on a $B_1(f) = 0$. Supposons $n \geq 2$.
On a, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \frac{k}{n} \frac{k-n}{n} = \binom{n-2}{k-1} \frac{1-n}{n}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
B_n(g) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \frac{1-n}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \frac{1-n}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^{k+1} (1-X)^{(n-2)-k+1} \\
&= \frac{1-n}{n} X(1-X)(X + (1-X))^{n-2} \\
B_n(g) &= \frac{n-1}{n} X(X-1).
\end{aligned}$$

2. (a) On a, pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,1], \mathbb{K})$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
B_n(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) \left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\lambda\varphi_1\left(\frac{k}{n}\right) + \mu\varphi_2\left(\frac{k}{n}\right)\right) X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi_1\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi_2\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \\
B_n(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) &= \lambda B_n(\varphi_1) + \mu B_n(\varphi_2).
\end{aligned}$$

D'où $f \mapsto B_n(f)$ est linéaire.

On remarque que $f_2 = g + f_1$ d'où, par linéarité :

$$B_n(f_2) = B_n(g) + B_n(f_1) = \frac{n-1}{n} X(X-1) + X.$$

(b) On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2 B_n(f_0) &= \frac{n-1}{n} X(X-1) + X - 2X^2 + X^2 \\ &= \frac{n-1}{n} X(X-1) - X(X-1) \\ B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2 B_n(f_0) &= \frac{1}{n} X(1-X). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2 B_n(f_0) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2X\frac{k}{n} + X^2 \right) X^k (1-X)^{n-k} \\ B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2 B_n(f_0) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - X \right)^2 X^k (1-X)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, en évaluant $B_n(f_2) - 2XB_n(f_1) + X^2 B_n(f_0)$ en $x \in [0,1]$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x)$$

De plus, l'étude de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ montre qu'elle admet $\frac{1}{4}$ pour maximum (atteint en $t = \frac{1}{2}$), d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{1}{4n}.$$

3. Soit $f \in C([0,1], \mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur ce segment. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0,1]$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

On considère l'ensemble $D = \{k \in [\![0,n]\!] \mid |\frac{k}{n} - x| \leq \delta\}$ et son complémentaire D^c dans $[\![0,n]\!]$. On remarque alors que, pour tout $k \in D^c$, $1 \leq \dfrac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2}$ et donc :

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq 2\|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.1 \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}.\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

Ainsi, d'après la question 2.b) :

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &\leq \sum_{k\in D}\binom{n}{k}\underbrace{\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad+\sum_{k\in D^c}\binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in D}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\sum_{k\in D^c}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2}.\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2}.\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Comme $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\frac{\varepsilon\delta^2}{\|f\|_\infty}>0$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n\geq N$, $\frac{1}{n}\leq\frac{\varepsilon\delta^2}{\|f\|_\infty}$. Ainsi, d'après la question précédente, on a, pour tout $n\geq N$ et pour tout $x\in[0,1]$:

$$|B_n(f)(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2}.\frac{1}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ainsi, on obtient, pour tout $n\geq N$, $\|B_n(f)-f\|_\infty\leq\varepsilon$. Par suite, $\|B_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et donc $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

4. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On note $\alpha : x\mapsto(b-a)x+a$. Alors α est une bijection continue de $[0,1]$ dans $[a,b]$ et on a $\alpha^{-1} : x\mapsto\frac{x-a}{b-a}$. On remarque que α et α^{-1} sont des fonctions polynomiales.

   Soit $f\in C([a,b],\mathbb{K})$. On pose $g=f\circ\alpha$. Alors, g est continue sur $[0,1]$ comme composée d'applications continues et ainsi, d'après la question 3.b), il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g (en l'occurence, $q_n=B_{n+1}(g)$). Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $p_n=q_n\circ\alpha^{-1}$. Une composée de fonctions polynomiales est polynomiale, donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_n est polynomiale et on a, sur $[a,b]$, $p_n-f=(q_n-g)\circ\alpha^{-1}$. Par suite, on a :

$$\sup_{x\in[a,b]}|(p_n-f)(x)|=\sup_{x\in[a,b]}|(q_n-g)(\alpha^{-1}(x))|=\sup_{t\in[0,1]}|q_n(t)-g(t)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

   Il en résulte que la suite de fonctions polynomiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.
   D'où le théorème de Weierstrass.