Chapitre VI

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Table des matières

Dans ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On se limitera dans les manipulations au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie A

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

1. Somme finie de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, on généralise la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels vue en Sup' au cas d'un nombre fini de sous-espaces.

Définition 1. *Somme finie de sous-espaces vectoriels*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de** $F_1, ..., F_m$ et on note $F_1 + ... + F_m$ ou encore $\sum_{i=1}^{m} F_i$, le sous-ensemble de E :

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i \mid \forall\, i \in [\![1, m]\!],\ x_i \in F_i \right\}.$$

Proposition 1.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i \right).$$

En particulier, $\sum_{i=1}^{m} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

On pose $F = \sum_{i=1}^{m} F_i$ et $U = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$.
Montrons tout d'abord que F est un sous-espace vectoriel de E :
On a $F \subset E$ car pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et pour tout $x_i \in F_i \subset E$, E étant stable par combinaisons linéaires, $x_1 + ... + x_m \in E$.

- On a $0_E = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{0_E}_{\in F_i} \in F$ car pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E et donc contient 0_E.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x = x_1 + ... + x_m, y = y_1 + ... + y_m \in F$ avec, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$x_i, y_i \in F_i$. On a :

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\lambda x_i + \mu y_i)}_{\in F_i} \in F$$

car pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de E et donc est stable par combinaisons linéaires.

Par suite, F est un sous-espace vectoriel de E. *On pouvait également montrer que F est un sous-espace de E comme l'image directe du sous-espace vectoriel $F_1 \times ... \times F_m$ de E^m par l'application linéaire $f : (x_1, ..., x_m) \mapsto x_1 + ... + x_m$ de E^m dans E.*

Montrons que $F = \mathrm{Vect}(U)$. Soit $x \in U$. Alors il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que $x \in F_j$. Pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $y_i = \begin{cases} 0_E & \text{si } i \neq j \\ x & \text{si } i = j \end{cases}$. Alors, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $y_i \in F_i$ et donc

$$x = \sum_{i=1}^{m} y_i \in F$$

Par suite, $U \subset F$.

Maintenant, soit G un sous-espace vectoriel de E contenant U. Soit $x = x_1 + ... + x_m \in F$ avec, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in F_i$. Comme, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in U \subset G$ et G est stable par combinaisons linéaires, $x \in G$. Par suite, $F \subset G$.

Ainsi, F est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant U i.e. $F = \mathrm{Vect}(U)$. $\square$

Corollaire 1.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Si pour chaque $i \in [\![1, m$, $\mathcal{F}_i$ est une famille génératrice de F_i, alors la famille $\mathcal{F}$ obtenue en concaténant (i.e. en mettant bout-à-bout) les familles $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$, est une famille génératrice de la somme $F_1 + ... + F_m$.

Démonstration.

Comme tout élément de $\mathcal{F}$ appartient à $U = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Vect}(U) = F_1 + ... + F_m$.

Pour l'inclusion réciproque, on remarque que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, tout élément de F_i est combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{F}_i$ et donc de la famille $\mathcal{F}$. Par suite, $U \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ qui est un sous-espace vectoriel de E. Or $\mathrm{Vect}(U)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant U donc $F_1 + ... + F_m = \mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Par suite, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de la somme. $\square$

Définition 2. *Sous-espaces vectoriels en somme directe*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1, ..., F_m$ sont en **somme directe** si, pour tout $y \in \sum_{i=1}^{m} F_i$:

il existe un **unique** m-uplet $(x_1, ..., x_m) \in F_1 \times ... \times F_m$ tel que $y = x_1 + ... + x_m$;

autrement dit, y se décompose de manière unique sous la forme $y = x_1 + ... + x_m$ avec, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in F_i$.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^m F_i$ est appelée **somme directe** de $F_1, ..., F_m$ et on note $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i = \sum_{i=1}^{m} F_i$ ou encore $F_1 \oplus ... \oplus F_m = \sum_{i=1}^{m} F_i$.

Proposition 2.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe ;

ii) pour tout $y = x_1 + ... + x_m \in \sum_{i=1}^m F_i$ avec, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in F_i$:
$$y = 0_E \text{ implique, pour tout } i \in [\![1, m]\!],\ x_i = 0_E.$$

iii) pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} F_j\right) \cap F_i = \{0_E\}$.

iv) pour tout $i \in [\![2, m]\!]$, $(F_1 + ... + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ ii) On suppose i). Soit $y = x_1 + ... + x_m \in \sum_{i=1}^m F_i$ avec, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i \in F_i$. On suppose $y = 0_E$. Comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E et donc contiennent 0_E, celui-ci admet la décomposition $y = 0_E = \sum_{i=1}^m \underbrace{0_E}_{\in F_i}$ dans la somme $F_1 + ... + F_m$. La somme étant directe, par unicité de la décomposition de y dans la somme, on a, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i = 0_E$.

ii) $\Rightarrow$ iii) On suppose ii). Soit $i \in [\![1, m]\!]$. On pose $F = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} F_j$. Soit $x \in F \cap F_i$. Comme $x \in F$, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$ avec $j \neq i$, il existe $x_j \in F_j$ tels que $x = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^m x_j$. On pose $x_i = -x \in F_i$. Alors on a :

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} x_j = -x + x = 0_E$$

Ainsi, par hypothèse, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $x_j = 0_E$. En particulier, on a $x = -x_i = -0_E = 0_E$.
Par suite, $F \cap F_j = \{0_E\}$.

iii) $\Rightarrow$ iv) On suppose iii). Soit $i \in [\![2, m]\!]$. Alors $F_1 + ... + F_{i-1} \subset F = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} F_j$ et donc $(F_1 + ... + F_{i-1}) \cap F_i \subset F \cap F_i = \{0_E\}$. Par suite, $(F_1 + ... + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$.

iv) $\Rightarrow$ i) On suppose iv). Soit $y \in \sum_{i=1}^{m} F_i$ et $y = x_1 + ... + x_m$, $y = x'_1 + ... + x'_m$ des décompositions de z dans la somme $\sum_{i=1}^{m} F_i$ où, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i, x'_i \in F_i$.
On a $0_E = y - y = \sum_{i=1}^{m}(x_i - x'_i)$ donc, les F_i étant des sous-espaces vectoriels de E et ainsi étant stables par combinaisons linéaires, $x'_m - x_m \in F_m$ et

$$x'_m - x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{(x_i - x'_i)}_{F_i} \in F_1 + ... + F_{m-1}$$

Donc $x'_m - x_m \in (F_1 + ... + F_{m-1}) \cap F_m = \{0_E\}$ par hypothèse. Par suite $x'_m = x_m$.
On réitère le même raisonnement de proche en proche pour $i = m - 1, ..., 2$ pour obtenir $x'_i = x_i$. Puis pour $i = 1$, on arrive alors à $x_1 - x'_1 = 0_E$ d'où $x'_1 = x_1$.
Il en résulte que la décomposition de y dans la somme $F_1 + ... + F_m$ est unique.

□

Exemple 1.

— Dans $\mathbb{R}[X]$, les sous-espaces $F_i = \text{Vect}(X^i)$ pour $i = 0, ..., m \in \mathbb{N}^*$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=0}^{m} F_i = \mathbb{R}_m[X].$$

— On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $I \subset \mathbb{R}$, on note $F_I = \{f \in E \mid \forall\, x \notin I,\ f(x) = 0\}$ exercice : montrer que F_I est un sous-espace vectoriel de E. Alors les sous-espaces vectoriels $F_{]-\infty,0]}$, $F_{[1,8]}$, et $F_{[33,100]}$ sont en somme directe et

$$F_{]-\infty,0]} \oplus F_{[1,8]}) \oplus F_{[33,100]} = F_{]-\infty,0]\cup[1,8]\cup[33,100]}.$$

> On a $F_{]-\infty,0]} \cap F_{[1,8]} = \{\mathbf{0}\}$ car si une fonction f appartient à cette intersection, elle est nulle en dehors de $]-\infty, 0]$ et en dehors de $[1, 8]$ qui sont des intervalles disjoints.
>
> De plus, on a $F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]} = F_{]-\infty,0]\cup[1,8]}$.
> En effet, si $f = f_1 + f_2 \in F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]}$, alors, pour tout $x \notin]-\infty, 0] \cup [1, 8]$, $f(x) = 0$ car $x \notin]-\infty, 0]$, d'où $f_1(x) = 0$ et $x \notin [1, 8]$, d'où $f_2(x) = 0$. Ainsi, $F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]} \subset F_{]-\infty,0]\cup[1,8]}$.
> Et si $f \in F_{]-\infty,0]\cup[1,8]}$, on pose :
>
> $$f_1 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f_2 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [1, 8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
>
> Alors $f_1 \in F_{]-\infty,0]}$ et $f_2 \in F_{[1,8]}$ et $]-\infty, 0]$ et $[1, 8]$ étant disjoints, $f = f_1 + f_2 \in F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]}$. Ainsi $F_{]-\infty,0]\cup[1,8]} \subset F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]}$.
> Maintenant, comme $]-\infty, 0] \cup [1, 8]$ et $[33, 100]$ sont disjoints, comme précédemment, on a :
>
> $$(F_{]-\infty,0]} + F_{[1,8]}) \cap F_{[33,100]} = F_{]-\infty,0]\cup[1,8]} \cap F_{[33,100]} = \{\mathbf{0}\}$$
>
> Il en résulte que $F_{]-\infty,0]}$, $F_{[1,8]}$, et $F_{[33,100]}$ sont en somme directe.

Exercice 1.

On note :

- $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ (ensemble des matrices symétriques) et
- $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$ (ensemble des matrices antisymétriques).

Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe et déterminer leur somme.

Correction.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On pose $F_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $F_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$, $F_3 = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
Soit $x = x_1 + x_2 + x_3 \in F_1 + F_2 + F_3$ avec $x_i \in F_i$. Alors on a :

$$f(x_1) = x_1; \qquad f(x_2) = -x_2 \quad \text{et} \quad f(x_3) = -2x_3.$$

et donc,

$$f^2(x_1) = x_1; \qquad f^2(x_2) = x_2 \quad \text{et} \quad f^2(x_3) = 4x_3.$$

Supposons $x = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, par linéarité de f, $f(x) = 0_E = f^2(x)$. Par suite, on a le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0_E \\ x_1 & + & -x_2 & + & -2x_3 & = & 0_E \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0_E \end{array}\right.$$

On le résout pour trouver $x_1 = x_2 = x_3 = 0_E$. Par suite, les sous-espaces sont en somme directe.
On peut remarquer qu'on n'a jamais utilisé la matrice M... nous y verrons plus clair dans la suite du chapitre !

Remarque 1.

Attention ! On peut montrer que si $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe, alors, pour tous $i, j \in [\![1, m]\!]$ avec $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$. Mais **la réciproque est fausse** comme on peut s'en apercevoir dans l'exercice suivant :

Exercice 3.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$, $G = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $H = \mathrm{Vect}((1, 1))$.

1. Déterminer $F + G + H$.

2. (a) Déterminer les intersections deux à deux entre F, G et H.
   (b) La somme $F+G+H$ est-elle directe ?
   (c) Que dire de la dernière affirmation de la remarque précédente.
3. Montrer la première affirmation de la remarque i.e. si $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe, alors, pour tous $i, j \in [\![1, m]\!]$ avec $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Correction.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) + 0(1,1) \in F + G + H$$
donc $\mathbb{R}^2 \subset F+G+H$. L'inclusion réciproque est vraie car $F+G+H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Par suite, $F+G+H = \mathbb{R}^2$.
2. (a) Si $u \in F \cap G$, alors il existe $\lambda, v \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, 0)$ et $u = (0, v)$ d'où $\lambda = 0$ et $v = 0$. Par suite $u = (0,0)$. Ainsi, $F \cap G = \{(0,0)\}$.
   Par des raisonnements similaires, on trouve $G \cap H = \{(0,0)\} = H \cap F$.
   (b) La somme $F+G+H$ n'est pas directe car $(1,1)$ admet dans $F+G+H$ les décompositions $(1,1) = 0(1,0)+0(0,1)+1(1,1)$ et $(1,1) = 1(1,0)+1(0,1)+0(1,1)$ qui sont différentes.
   (c) Les intersections deux à deux des facteurs de la somme sont toutes réduites à 0_E mais la somme n'est pas directe. La réciproque de l'implication énoncée dans la remarque précédente est donc fausse, comme annoncé !
3. On suppose $F_1, ..., F_m$ en somme directe. Soit $i, j \in [\![1, m]\!]$ avec $i \neq j$. Quitte à les échanger, on peut supposer $j < i$. D'après le iv) de la proposition 2, on a $(F_1 + ... + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$
Or, comme $j < i$, on a $F_j \subset F_1 + ... + F_{i-1}$ donc $F_j \cap F_i \subset (F_1 + ... + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$, d'où $F_j \cap F_i = \{0_E\}$.

Grâce à l'unicité de la décomposition dans une somme directe, on peut définir les applications qui, à un vecteur de la somme, associent chaque composante de sa décomposition :

Définition 3. *Projecteurs associés à une somme directe*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

On appelle **projecteurs associés à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ les applications $p_1, ..., p_m$ où, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\text{pour } x = x_1 + ... + x_m \in E \text{ avec, pour tout } j \in [\![1, m]\!],\ x_j \in F_i,$$
$$p_i(x) = x_i.$$

Proposition 3.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ et $p_1, ..., p_m$ les projecteurs associés. Alors :

- pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, p_i est un projecteur ; plus précisément, p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} F_j$.
- $p_1 + ... + p_n = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$ avec $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \mathbf{0}$.

Proposition 4.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. On a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i).$$

Et il y a égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Démonstration.

On considère l'application linéaire f de $F_1 \times ... \times F_m$ dans $F_1 + ... + F_m$ tel que $f : (x_1, ..., x_m) \mapsto x_1 + ... + x_m$.
Par définition de la somme, f est surjective, donc :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leq \dim(F_1 \times ... \times F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i).$$

De plus, comme f est surjective, il y a égalité si, et seulement si, f est injective d'après le théorème du rang (on est bien en dimension finie ici, car cet énoncé n'a aucun intérêt en dimension infinie !).
Or, f étant linéaire, f est injective si, et seulement si, pour tout $x = (x_1, ..., x_m) \in F_1 \times ... \times F_m$, $x_1 + ... + x_m = f(x) = 0_E$ implique $x = (0_E, ..., 0_E)$ i.e. pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $x_i = 0_E$; d'après la proposition 2, ceci est équivalent à $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe.

$\square$

Définition-Proposition 4. *Base adaptée à une somme directe*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, ..., F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe.
Si, pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i, alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant (i.e. en mettant bout-à-bout) les bases $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m$, est une base $F_1 \oplus ... \oplus F_m$.
Une telle base $\mathcal{B}$ est appelée **base adpatée à la somme directe** $F_1 \oplus ... \oplus F_m$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $F_1 \oplus ... \oplus F_m$.

Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on note $(e_{i,j})_{j \in J_i}$ la base $\mathcal{B}_i$ de F_i. On note $I = \bigcup_{i=1}^{m} (\{i\} \times J_i)$ et on a :

$$\mathcal{B} = (e_{i,j})_{(i,j) \in I}.$$

— Liberté : Soit $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de scalaires presque tous nuls. On suppose $\sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E$. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on note $x_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \in F_i$.
Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E.$$

Les F_i étant en somme directe, on obtient, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = x_i = 0_E$; or, $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{j \in J_i}$ est une base de F_i et donc une famille libre, donc, pour tout $j \in J_i$, $\lambda_{i,j} = 0$.

Ainsi, pour tout $(i, j) \in I$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où $\mathcal{B}$ est une famille libre.

— Génération : Soit $x \in F_1 \oplus ... \oplus F_m$. Alors, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $x_i \in F_i$ tels que $x = x_1 + \ldots + x_m$.
Or, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, comme $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{j \in J_i}$ est une base de F_i, il existe une famille $(\lambda_{i,j})_{j \in J_i}$ une famille de scalaires presque tous nuls telle que :

$$x_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}.$$

Par suite, la famille $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est une famille de scalaire presque tous nuls comme concaténation de m familles de scalaires presque tous nuls et on a :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{m} x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \\ x &= \sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} \end{aligned}$$

d'où x est combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{B}$.
Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $F_1 \oplus ... \oplus F_m$.

Il en résulte que $\mathcal{B}$ est une base de $F_1 \oplus ... \oplus F_m$ comme famille libre et génératrice de $F_1 \oplus ... \oplus F_m$. □

2. Matrices semblables

a. Matrices équivalentes

Définition 5. *Matrices équivalentes*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = Q^{-1}AP.$$

Exercice 4.

Montrer que la relation "*être équivalentes*" est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = r \in [\![0, n]\!]$ si, et seulement si, A est équivalente à la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

b. Matrices semblables

Définition 6. *Matrices semblables*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 2.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. Alors M et M' sont semblables ; en effet, on a

$$M' = P^{-1}MP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Remarque 2.

— Deux matrices A et B qui sont semblables ont le même déterminant.

— Deux matrices A et B qui sont semblables ont la même trace. En vertu de cette remarque et de l'exemple ci-dessus, cela permet de définir la trace d'un endomorphisme : la trace d'un endomorphisme est la trace d'une matrice de cet endomorphisme dans une base quelconque.

3. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Définition 7. *Sous-espace stable*

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$, i.e. pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Exemple 3.

— Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.

— Une homothétie (i.e. $\lambda \mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{K}$) stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.

— Une intersection ou une somme de sous-espaces stables par un endomorphisme u est un sous-espace stable par u.

Exercice 5.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.

2. En déduire que les seuls endomorphismes qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Correction.

1. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Alors, pour tout $x \neq 0_E$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Montrons que, pour tous $x, y \in E$ non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$.
   — *1er cas :* x et y sont colinéaires. Alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu y$, d'où :
   $$\lambda_x x = u(x) = \mu u(y) = \mu \lambda_y y = \lambda_y x;$$
   donc $\lambda_x = \lambda_y$.
   — *2nd cas :* (x, y) est libre. Alors on a
   $$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$
   Par suite,
   $$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E,$$
   or (x, y) est libre donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$. Et donc $\lambda_x = \lambda x + y = \lambda_y$.

   Il en résulte qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$ (cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0_E$). Ainsi $u = \lambda \mathrm{Id}_E$ est une homothétie.

2. Une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels. Réciproquement, si u est un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels, alors, pour tout $x \in E$, u stabilise $\mathbb{K}x = \mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathbb{K}x$ i.e. $(x, u(x))$ est liée. Par suite, d'après la question précédente, u est une homothétie.

Proposition 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de F et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par u si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$.

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). On suppose F stable par u. Alors pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$, donc en particulier, comme chaque $e_i \in F$ pour $i \in I$, $u(e_i) \in F$.
- ($\Leftarrow$). On suppose que pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$. Soit $x \in F$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice, alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ presque tous nuls telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Par suite, on a :
$$u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{u(e_i)}_{\in F},$$
donc, comme F est un sous-espace vectoriel, $u(x) \in F$. Il en résulte que F est stable par u.

$\square$

Remarque 3.

Pour $x \in E$, $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E. D'après la proposition précédente, ce sous-espace est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 7.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Démonstration.

On suppose que u et v commutent.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Montrons que $u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. On a :
$$v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$$
car $v \circ u = u \circ v$ et u est linéaire. Par suite, $\mathrm{Ker}(v)$ est stable par u.
- Soit $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ où $x \in E$. Montrons que $u(v(x)) \in \mathrm{Im}(v)$. On a :
$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) \in \mathrm{Im}(v)$$
car $u \circ v = v \circ u$ et $u(x) \in E$. Par suite $\mathrm{Im}(v)$ est stable par u.

$\square$

Définition 8. *Endomorphisme induit*

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme u de E. On appelle **endomorphisme induit par u sur F** et l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par $u_F = u_{|F}$ i.e. pour tout $x \in F$

$$u_F(x) = u(x)$$

Proposition 8.

On suppose E de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une **base adaptée** à F i.e. $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_p)$ est une base de F.
Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par bloc, i.e.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $A \in M_p(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$ de l'endomorphisme induit u_F par u sur F.

Démonstration.

On note $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors on a, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_i$. On note : $A = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, $B = (m_{ij})_{\substack{p+1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq p}}$, $C = (m_{ij})_{p+1\leq i,j\leq n}$ et $D = (m_{ij})_{\substack{1\leq j\leq p \\ p+1\leq i\leq n}}$.
On remarque que $(e_1, ..., e_p)$ est en particulier une famille génératrice de F.
Ainsi,

F est stable par u

si, et seulement si,

pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}e_i \in F$

si, et seulement si,

pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ et $i \in [\![p+1,n]\!]$, $m_{ij} = 0$

si, et seulement si,

$D = (0)_{\substack{1\leq j\leq p \\ p+1\leq i\leq n}}$

si, et seulement si,

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

□

Partie B

Éléments propres

1. Éléments propres d'un endomorphisme

a. Définitions

Définition 9. *Valeur/vecteur propre d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \in E$ **non nul** tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre de** u **associé à** λ si :

$$x \neq 0_E \quad \text{et} \quad u(x) = \lambda x.$$

Proposition 9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$.

— Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ - autrement dit, si, et seulement si, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

— Le vecteur x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $u(x)$ est colinéaire à x.

Démonstration.

- $$\lambda \text{ est une valeur propre de } u$$
  si, et seulement si,
  $$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } u(x) = \lambda x$$
  si, et seulement si,
  $$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } u - \lambda \mathrm{Id}_E(x) = 0_E$$
  si, et seulement si,
  $$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)$$
  si, et seulement si,
  $$\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) \neq \{0_E\}.$$

- $$x \text{ est un vecteur propre de } u$$
  si, et seulement si,
  $$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } u(x) = \lambda x$$
  si, et seulement si,

$$u(x) \text{ et } x \text{ sont colinéaires.}$$

□

Exercice 6.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f : (x, y, z) \to (2y, 2x, 2z)$. Montrer que $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont des vecteurs propres de f. À quelle valeur propre chacun d'entre eux est-il associé ?

Démonstration.

On a :

$$f(1, 1, 0) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 2(0, 0, 1)$$

$$f(1, -1, 0) = (-2, 2, 0) = (-2)(1, -1, 0)$$

Donc $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 et $(1, -1, 0)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2. □

Définition 10. *Sous-espace propre d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre de u associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel de E noté $E_\lambda(u)$ et défini par :

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Autrement dit, $E_\lambda(u)$ est l'ensemble contenant 0_E et l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Définition 11. *Spectre d'un endomorphisme*

On suppose que E est de **dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le **spectre** de u, noté $\operatorname{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u i.e.

$$\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x\}.$$

Remarque 4.

- le vecteur nul 0_E n'est JAMAIS un vecteur propre ! Par contre, il appartient à tout sous-espace propre.
- 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injectif. Dans ce cas, on a :

$$E_0(u) = \operatorname{Ker}(u)$$

Exercice 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ est une valeur propre de u.

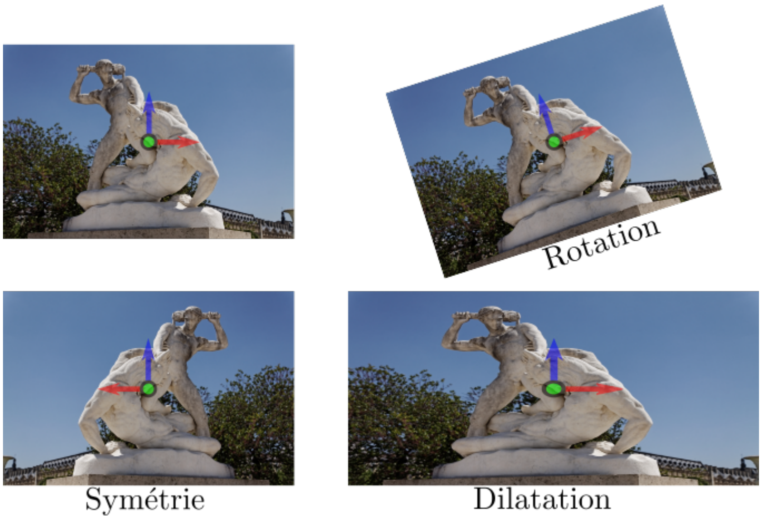
1. On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer que $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. On suppose u bijectif. Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1}. Que dire de $E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$?

Correction.

1. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u,
$$x = u(\frac{1}{\lambda}x) \in \mathrm{Im}(f).$$
Par suite, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. Comme $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, 0 n'est pas valeur propre de u. Par suite, $\lambda \neq 0$.
Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u^{-1}, $x = u^{-1}(u(x)) = \lambda u^{-1}(x)$. Par suite, on a :
$$u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x,$$
Or, λ étant valeur propre de u, il existe $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ et donc, d'après ce qui précède, $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1} et x est un vecteur propre de u^{-1} associé à $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E_\lambda(u) \subset E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$. Et réciproquement, si $x \in E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$, par un raisonnement similaire, on obtient $u(x) = \lambda x$. Il en résulte que
$$E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}) = E_\lambda(u).$$

b. Exemples

On applique les transformations suivantes à la première image. Déterminons les valeurs propres et leurs directions propres associées pour chacune des transformations. Une direction propre correspond à une direction qui reste inchangée après transformation et une valeur propre correspond à l'échelle de la modification (en tenant compte du changement de sens grâce au signe) après transformation dans la direction propre qui lui est associée.



Exemple 4.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_E$ admet λ pour unique valeur propre et $E_\lambda(\lambda \mathrm{Id}_E) = E$.
- Une rotation non triviale (i.e. d'angle différent d'un multiple de π) dans le plan euclidien n'admet pas de valeur propre.
- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non trivial de E i.e. $p^2 = p$ et $p \neq 0, \mathrm{Id}_E$. Alors p admet pour valeurs propres 0 et 1 et on a :

$$E_0(p) = \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad E_1(p) = \mathrm{Im}(p)$$

Si λ est une valeur propre de p, alors pour x un vecteur propre de p associé à λ, on a :

$$\lambda^2 x = p^2(x) = p(x) = \lambda x.$$

Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Montrons que 0 et 1 sont bien valeurs propres de p :

— Comme $p \neq \mathbf{0}$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq 0_E$. Ainsi, pour $y = p(x) \neq 0_E$, on a :

$$p(y) = p(p(x)) = p(x) = y = 1.y \quad \text{car } p^2 = p$$

Donc, y étant un vecteur non nul, 1 est bien valeur propre de p.

— Comme $p \neq \mathrm{Id}_E$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq x$. Ainsi, pour $y = p(x) - x \neq 0_E$, on a, par linéarité de p :

$$p(y) = p(p(x)) - p(x) = 0_E = 0.y \quad \text{car } p^2 = p$$

Donc, y étant un vecteur non nul, 0 est bien valeur propre de p.

Déterminons désormais les sous-espaces propres associés à 0 et 1 :

- $\lambda = 0$. Pour tout endomorphisme qui admet 0 pour valeur propre, le sous-espace propre associé à 0 est égal à son noyau, donc $E_0(p) = \mathrm{Ker}(u)$.
- $\lambda = 1$. Pour tout endomorphisme u qui admet $\lambda \neq 0$ pour valeur propre, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$. Par suite, $E_1(p) \subset \mathrm{Im}(p)$.

  Réciproquement, pour $y = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ avec $x \in E$, on a :

  $$p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y.$$

  d'où $y \in E_1(p)$.
  Par suite, $\mathrm{Im}(p) \subset E_1(p)$.

  Il en résulte que $E_1(p) = \mathrm{Im}(p)$.

— Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires non triviaux. La symétrie s par rapport à F parallèlement à G admet pour valeur propre 1 et -1 et et on a :

$$E_1(s) = F \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = G$$

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, donc, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$s(x) = \lambda x \Leftrightarrow p(x) = \frac{1+\lambda}{2}x.$$

Par suite, comme p est non trivial, d'après l'exemple précédent, s admet 1 et -1 pour valeurs propres et

$$E_1(s) = E_1(p) = \mathrm{Ker}(p) = F$$

et

$$E_{-1}(s) = E_0(p) = \mathrm{Im}(p) = G.$$

— Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f : (x,y) \mapsto (2x, x+y)$. Alors $\mathrm{Sp}(f) = \{2,1\}$; et $E_2(f) = \mathrm{Vect}((1,1))$ et $E_1(f) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

> On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$:
>
> $$(*)\ f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 2x & & & = & \lambda x \\ x & + & y & = & \lambda y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} (2-\lambda)x & & & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> *1er cas :* $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 1$. Alors $(*)$ est équivalent à
>
> $$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, $(x,y) = (0,0)$ est la seule solution de $f(x,y) = \lambda(x,y)$ donc λ n'est pas valeur propre de f.
> *2eme cas :* $\lambda = 2$. Alors
>
> $$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x,y) = 2(x,y)$ est $\{(x,y) \mid x - y = 0\} = \mathrm{Vect}((1,1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 2$ est valeur propre de f et $E_2(f) = \mathrm{Vect}((1,1))$.
>
> *2eme cas :* $\lambda = 2$. Alors
>
> $$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x,y) = (x,y)$ est $\{(x,y) \mid x = 0\} = \mathrm{Vect}((0,1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 1$ est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

— Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ tel que $D : f \mapsto f'$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre et $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ.

> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on a $f \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ si, et seulement si, $f' - \lambda f = 0$, c'est à dire, f est solution de l'équation différentielle homogène $y' - \lambda y = 0$. Cette équation à pour ensemble de solution $\{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}$; donc λ est une valeur propre de D et on a :
>
> $$E_\lambda(D) = \{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.f$$
>
> où f est le vecteur propre de D associé à λ défini par $f : x \mapsto e^{\lambda x}$.

Exercice 8.

Ques dire des valeurs propres...

1. de l'endomorphisme nul $\mathbf{0}$? de l'identité Id_E ?
2. d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$?
3. de l'application $\Delta : P \to P'$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même ?

Correction.

1. Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $0_E = 0(x) = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 0$, donc λ est la seule valeur propre de 0 et $E_0(0) = E$.

   Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $x\mathrm{Id}_E = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 1$, donc λ est la seule valeur propre de Id_E et $E_1(\mathrm{Id}_E) = E$.

2. Une rotation de $\mathbb{R}^3$ (d'angle différent d'un multiple de π) n'admet qu'une seule valeur propre. Il s'agit de la valeur propre 1 dont le sous-espace propre associé est l'axe de la rotation.

3. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P' = \lambda P$ implique $\deg(P) = \deg(P') = \deg(P) - 1$. Ainsi $P = 0$ est la seule solution de $P = \lambda P'$, donc si $\lambda \neq 0$, λ n'est pas une valeur propre de Δ.
   Pour $\lambda = 0$, $P' = 0$ a pour solutions les polynômes constants. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de Δ et $E_0(\Delta) = \mathrm{Ker}(\Delta) = P = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}$.

2. Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est valeur propre de u alors $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et
$$\dim\left(E_\lambda(u)\right) \geq 1.$$

Correction.

On suppose que λ est une valeur propre de u. Alors $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E. De plus, par définition de λ valeur propre, il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors x appartient à $E_\lambda(u)$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}(x) \subset E_\lambda(u)$ car $\mathrm{Vect}(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x. Or $\dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1$ car $x \neq 0_E$, d'où :
$$\dim\left(E_\lambda(u)\right) \geq \dim(\mathrm{Vect}(x)) \geq 1.$$

Proposition 11.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v et les sous-espaces propres de v sont stables par u.

Démonstration.

On suppose que u et v commutent. Comme u commute avec Id_E, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, u commute avec $v - \mathrm{Id}_E$. Ainsi, d'après la proposition 7, $\mathrm{Ker}(v - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est stable par u. Par suite, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, $E_\lambda(v) = \mathrm{Ker}(v - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est stable par u.

On raisonne de même pour la stabilité par v des sous-espaces propres de u. $\square$

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u, alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe i.e.
$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}.$$

Démonstration.

On suppose que λ, μ sont des valeurs propres de u qui vérifient $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u) \cap E_\mu(u)$. Alors on a :
$$u(x) = \lambda x \text{ et } u(x) = \mu x.$$
Par suite, par linéarité de u
$$(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x = u(x) - u(x) = u(x - x) = u(0_E) = 0_E$$
Or $\lambda - \mu \neq 0$ donc $x = 0_E$ par l'axiomatique d'un espace vectoriel.
Ainsi $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) \subset \{0_E\}$ et donc $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}$. □

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u, alors, pour tous vecteurs propres x et y associés à λ et μ respectivement, la famille (x, y) est libre.

Démonstration.

On suppose $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ et $y \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$. D'après la proposition précédente, $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe, donc (x, y) est libre.

Exercice : Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que F et G sont en somme directe. Montrer que toute famille (x, y) avec $x \in F \setminus \{0_E\}$ et $y \in G \setminus \{0_E\}$ est libre. □

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes distinctes, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), ..., E_{\lambda_k}(u)$ sont en somme directe.

Démonstration.

Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la propriété $\mathcal{P}_k$ ="pour k-uplets $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ de valeurs propres distinctes de u, les sous-espaces propres associés sont en somme directe".
L'initialisation $k = 2$ est donnée par la proposition préccédente.

Hérédité : Soit k un entier plus grand que 2. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie.
Soit $\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}$ des valeurs propres distinctes de u. Soit $x = x_1 + ... + x_{k+1} \in \sum_{i=1}^{k+1} E_{\lambda_i}(u)$ où, pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. On suppose $x = 0_E$. Alors, par linéarité de u, on a d'une

part $u(x) = 0_E$ et d'autre part :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k+1} u(x_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i.$$

Par suite, on a :

$$0_E = u(x) - \lambda_{k+1} x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $E_{\lambda_i}(u)$ étant un sous-espace vectoriel, $(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i \in E_{\lambda_i}(u)$.
Ainsi, $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i$ appartient à la somme $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$ qui est bien directe par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0_E$, on a pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i = 0_E$, d'où $x_i = 0_E$ car $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$.
Et de plus, on a alors, $x_{k+1} = x = 0_E$, d'où, pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $x_i = 0_E$.
Il en résulte que la somme $\sum_{i=1}^{k+1} E_{\lambda_i}(u)$ est directe.
Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$, $\mathcal{P}_k$ est vraie. □

Corollaire 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes distinctes, alors :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \dim(E).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda_1, ..., \lambda_k$ valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe et on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)\right) \leq \dim(E).$$

□

Théorème 1.

On suppose E de dimension finie n. Tout endomorphisme u de E admet au plus n valeurs propres distinctes ; autrement dit :

$$\#\mathrm{Sp}(u) \leq n.$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose par l'absurde que $\#\mathrm{Sp}(u) > n$. Alors il existe $n+1$ valeurs propres de u deux à deux distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$. Pour chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$, on a $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \geq 1$,

donc :
$$n+1 \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq n.$$
Contradiction. Par suite $\#\mathrm{Sp}(u) \leq n$. □

Remarque 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Les valeurs propres de l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F sont les valeurs propres λ de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. Dans ce cas,
$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

3. Éléments propres d'une matrice carrée

a. Définitions

Définition 12. *Éléments propres d'une matrice*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On dit que λ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nulle** telle que
$$AX = \lambda X.$$

— Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, on dit que $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de** A **associé à** λ si :
$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad AX = \lambda X.$$

— Si $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A, on appelle **sous-espace propre associé de** A **à** λ le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(A)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :
$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

— On appelle **spectre** de A et on note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On remarque que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9.

Déterminer les valeurs, vecteurs et sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

Correction.

- <u>1er cas :</u> $n=1$
  On a $A=(1)=I_1\in M_1(\mathbb{K})$ donc $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$ et $E_1(A)=M_1(\mathbb{K})$.
- <u>2ème cas :</u> $n\geq 2$
  Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

  Alors on a, $i\in[\![2,n]\!]$, $AE_1=S=AE_i$ donc $E_1-E_i\in\mathrm{Ker}(A)$. La famille $(E_1-E_i)_{2\leq i\leq n}$ est une famille libre et, comme $\mathrm{rg}(A)=1$ (car $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}(S)$), d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A))=n-1>=1$; d'où $(E_1-E_i)_{2\leq i\leq n}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
  Ainsi, 0 est valeur propre de A car $\mathrm{Ker}(A-0I_n)=\mathrm{Ker}(A)\neq\{0_{n,1}\}$ et on a :

  $$E_0(A)=\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}\left(E_1-E_2,\dots,E_1-E_n\right).$$

  On remarque que les sommes de chaque ligne sont égales et valent toutes n donc la colonne $S\neq 0_{n,1}$ est vecteur propre de A associé à n qui est donc valeur propre.
  De plus, comme 0 et n sont des valeurs propres distinctes, leurs sous-espaces propres respectifs sont en somme directe et donc :

  $$n=n-1+1\leq\underbrace{\dim\left(E_0(A)\right)}_{=n-1}+\underbrace{\dim\left(E_n(A)\right)}_{\geq 1}\leq\dim\left(M_{n,1}(\mathbb{K})\right)=n.$$

  Par suite, $\dim\left(E_n(A)\right)=1$ d'où :

  $$E_n(A)=\mathrm{Vect}\left(S\right),$$

  et $E_n(A)$ et $E_0(A)$ sont de somme $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc A ne possède pas d'autre valeur propre.

  Conclusion :

  $$\mathrm{Sp}(A)=\{0,n\}\text{ et }E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\;E_n(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right)$$

b. Propriétés du spectre d'une matrice

Proposition 14.

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E, $u\in\mathcal{L}(E)$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\in M_n(\mathbb{K})$. Alors on a $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}(u)$.
De plus, pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(u)$,

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E_\lambda(u)\text{ si, et seulement si, }X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in E_\lambda(A).$$

Démonstration.

L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$\varphi_{\mathcal{B}} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

est un isomorphisme.
Ainsi, l'équation $MX = \lambda X$ est équivalente à l'équation $u(x) = \lambda x$ d'où le résultat. $\square$

Proposition 15.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = PE_\lambda(B)$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifie $B = P^{-1}AP$.

Démonstration.

On peut voir deux matrices semblables comme les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes. On obtient alors le résultat souhaité en appliquant la proposition précédente. $\square$

Proposition 16.

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $A \in M_n(\mathbb{K}')$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K}') \subset M_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre de A. Comme $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors X vu comme matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ vérifie l'équation $AX = \lambda X$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. $\square$

Exercice 10.

Illustrer le résultat précédent en déterminant les spectres dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda^2)x = 0 \\ (1+\lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

Par suite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $1+\lambda^2 > 0$, l'unique solution de ce système est $(0,0)$ (et ce, pour toute valeur de λ). Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $1 + \lambda^2 = 0$ si, seulement si $\lambda = \pm i$. Ainsi, $M\left(x, y\right) = \lambda X$ possède des solutions non nulles si, et seulement si, $\lambda = \pm i$. Les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$ sont donc i et $-i$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{i, -i\}$.

$\square$

Partie C

Polynôme caractéristique

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n.

1. Polynôme caractéristique

a. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

L'application $M \mapsto \det(M)$ est une fonction polynomiale en les coefficients de M. Ainsi, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ fixée, l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est une fonction polynomiale de la variable λ ; ce qui justifie la définition suivante :

Définition 13. *Polynôme caractéristique d'une matrice carrée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de** A et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Remarque 7.

On notera directement $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Pour justifier cette notation, il faudrait pouvoir définir le déterminant d'une matrice à coefficients polynomiaux. Et c'est possible : au lieu d'utiliser le corps de base $\mathbb{K}$ pour les coefficients, on utilise le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. La théorie reste la même.

Proposition 17.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A).$$

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

En utilisant la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a, pour $C_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\chi_A(\lambda)=\det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1-C_1,...,\lambda e_n-C_n).$$

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est multilinéaire, donc en développant l'expression précédente on remarque que l'on obtient un polynôme de degré au plus n et on a, pour $0\le k\le n$ où c_{n-k} est le coefficient de $\chi_A(\lambda)$ correspondant à λ^{n-k} :

$$\begin{aligned}c_{n-k}\lambda^{n-k} &= \sum_{i_1<\ldots<i_k\in[\![1,n]\!]}\det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1,...,-C_{i_1},...,\lambda e_j,...,-C_{i_k},...,\lambda e_n)\\ &=(-1)^k\lambda^{n-k}\sum_{i_1<\ldots<i_k\in[\![1,n]\!]}\det_{\mathcal{B}}(e_1,...,C_{i_1},...,e_j,...,C_{i_k},...,e_n).\end{aligned}$$

Par suite, on obtient le résultat en évaluant, c_{n-k} pour $k=0,1$ et n :
- $c_n=\det_{\mathcal{B}}(e_1,...,e_n)=1$
- $c_{n-1}=-\sum_{i=1}^n\det_{\mathcal{B}}(e_1,...,C_i,...,e_n)=-\sum_{i=1}^n a_{ii}=-\mathrm{Tr}(A)$.
- $c_0=(-1)^n\det_{\mathcal{B}}(C_1,...,C_n)=\det(A)$.

□

Exercice 11.

Soit $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{K})$. Exprimer le coefficient c_1 du monôme de degré 1 dans $\chi_A(X)$ en fonction des a_{ij}.

Correction.

On utilise les notations de la démonstrations précédente :

$$\begin{aligned}c_1 &= \det_{\mathcal{B}}(C_1,C_2,e_3)+\det_{\mathcal{B}}(C_1,e_2,C_3)+\det_{\mathcal{B}}(e_1,C_2,C_3)\\ &=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&0&a_{13}\\a_{21}&1&a_{23}\\a_{31}&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Théorème 2.

Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique de A. Autrement dit :

$$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\ \Leftrightarrow\ \chi_A(\lambda)=0.$$

Démonstration.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

si, et seulement si,

$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

si, et seulement si,

$A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$

si, et seulement si,

$\lambda I_n - A \notin GL_n(\mathbb{K})$

si, et seulement si,

$\det(\lambda I_n - A) = 0$

si, et seulement si,

$\chi_A(\lambda) = 0.$

$\square$

Corollaire 4.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, alors A a au moins une valeur propre.

Démonstration.

On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, on a $\deg(\chi_A) = n$. Par suite, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou en raisonnant en terme de facteurs irréductibles, on peut montrer que χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.

$\square$

Méthode : Calcul des éléments propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dans le corps $\mathbb{K}$.

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A.
- On factorise dans $\mathbb{K}$ le polynôme caractéristique χ_A de A et on détermine toutes ses racines.
- Chaque racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de χ_A étant une valeur propre de χ_A, on résout le système

$$MX = \lambda X,$$

qui, NÉCESSAIREMENT, admet une infinité de solution (car λ est une valeur propre de A).

- Pour chaque racine λ de χ_A, le sous-espace propre associé à λ est égal à l'ensemble des solutions du système précédent :

$$E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}.$$

En pratique, on cherchera une base $(X_1, ..., X_k)$ de l'ensemble des solutions de $MX = \lambda X$ i.e. une famille libre maximale de vecteurs propres associés à λ, afin d'écrire :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X_1, ..., X_n).$$

Exercice 12.

Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. $\chi_A = X^2 - 3X$, d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et on a :
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$
2. $\chi_B = X^3 - X^2 - 3X - 1$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ et on a :
$$E_1(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}),\ E_{1-\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{1+\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix})$$
3. $\chi_C = X^3 - 15X^2 + 72X - 108$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{3, 6\}$ et on a :
$$E_3(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_6(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$
4. $\chi_D = X^3 + 2X^2 + X + 2$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(D) = \{-2\}$ et $\mathrm{Sp}(D) = \{\pm i\}$. On a :
$$E_{-2}(D) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

et dans le cas de $\mathbb{C}$, on a de plus :

$$E_i(D) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{-i}(D) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix})$$

5. $\chi_E = X^3 + X^2 - 30X$, d'où $\text{Sp}(E) = \{-6, 0, 5\}$ et on a :

$$E_{-6}(E) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),\ E_0(E) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_5(E) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{20}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix})$$

Exercice 13. *Matrice compagnon*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.
En déduire que pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P = \chi_A$.

Correction.

Voici deux méthodes pour obtenir le résultat (on explicite ici seulement la deuxième) :
1) On développe le déterminant $\det(\lambda I_n - A)$ par rapport à la dernière colonne.

2) On a $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$

En faisant l'opération : $L_0 \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} X^i L_i$, on obtient :

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

où $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$.
On obtient alors le résultat en développant par rapport à la 1ere ligne.
Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$, la matrice compagnon A de la question précédente a pour polynôme caractéristique le polynôme P.

Proposition 18.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les coefficients diagonaux de A.

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in K$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - \alpha_n \end{vmatrix}$$

D'où $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \alpha_i)$. □

b. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Lemme 1.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration.

On suppose A et B semblables. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = PAP^{-1}$. Par suite, on a :

$$\chi_B = \det(XI_n - PAP^{-1}) = \det(P(XI_n - A)P^{-1}) = \frac{\det(P)}{\det(P)}\det(\lambda I_n - A) = \chi_A.$$

□

Définition 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de u et on note $\chi_u(X)$ le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u, i.e. si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$,

$$\chi_u := \chi_A$$

Remarque 8.

Le lemme précédent nous permet d'affirmer que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est bien défini : en effet, si A et B sont des matrices représentant u, elles sont semblables et donc ont même polynôme caractéristique.

Proposition 19.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(u)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u).$$

Démonstration.

Il suffit d'écrire $\chi_u = \chi_A$ avec A une matrice représentant u. On a alors

$$\chi_u = \chi_A = \lambda^n - \mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(u)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u);$$

et de plus, la matrice $\lambda I_n - A$ est une matrice représentant $\lambda \mathrm{Id}_E - u$, donc

$$\chi_u = \chi_A = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u).$$

□

Théorème 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique de u. Autrement dit :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

Démonstration.

On écrit $\chi_u = \chi_A$ avec A une matrice représentant u et on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

□

Remarque 9.

Comme pour le cas des matrices, on en déduit que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ avec $\dim(E)$ impair, alors tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.

c. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Proposition 20.

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise χ_u

Démonstration.

On suppose que F est stable par u. Sot $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F où $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_p)$ forme une base de F. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$. Alors il existe $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ telles que :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Par suite, on a, en notant $Q = \det(XI_{n-p} - C) \in \mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned} \chi_u &= \det(XI_n - M) \\ &= \left|\begin{array}{c|c} XI_p - A & -B \\ \hline 0 & XI_{n-p} - C \end{array}\right| \\ &= \det(XI_p - A).\det(XI_{n-p} - C) \\ &= \chi_A.Q \\ \chi_u &= \chi_{u_F} Q. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\chi_{u_F} | \chi_u$. $\square$

Remarque 10.

- On a alors $\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)$;
- Si χ_u est scindé (resp. scindé à racines simples) alors χ_{u_F} l'est aussi ;
- Par une récurrence finie, on obtient que si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ et chaque F_i est stable par u, alors

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_{F_i}} = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_k}}.$$

2. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 15. *Multiplicité d'une valeur propre*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On définit l'**ordre de multiplicité** - ou plus simplement la **multiplicité** - de la valeur propre λ de u et on note $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique χ_u de u.
On définit de même la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Remarque 11.

— Autrement dit, si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ...\lambda_k$ deux à deux distinctes alors

$$\chi_u = P \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

où $P \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$ et on a, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$m(\lambda_i) = m_i.$$

— On a donc :

$$\deg(P) + m(\lambda_1) + ... + m(\lambda_k) = n.$$

— En particulier, pour λ une valeur propre, on a : $1 \leq m(\lambda) \leq n = \dim(E)$.

Proposition 21.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda).$$

Démonstration.

On note $F = E_\lambda(u)$. Alors F est stable par u et l'endomorphisme induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ de u sur F est égal à l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_F$. Comme F est un sous-espace propre de u, on a $p = \dim(F) \geq 1$ et d'après la proposition précédente, on a :

$$(X - \lambda)^p = \chi_{u_F} | \chi_u = Q(X - \lambda)^{m(\lambda)},$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $(X - \lambda)$ premiers entre eux. Donc, d'après le lemme de Gauss, $(X - \lambda)^p | (X - \lambda)^{m(\lambda)}$.

Il en résulte que $1 \leq p = \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$. $\square$

Corollaire 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre simple de u, alors $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Démonstration.

On suppose que λ est une valeur propre simple de u, d'après la proposition précédente, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq 1$ donc $\dim(E_\lambda(u)) = 1$. $\square$

Partie D

Diagonalisation et trigonalisation

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 16. *Endomorphisme/matrice diagonalisable*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Proposition 22.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres de u.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Par suite, on a, pour chaque $i \in [\![1,]\!]n$, par définition des coefficients de A,
$$u(e_i) = \alpha_i e_i \text{ et } e_i \neq 0_E.$$
Donc les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de u.
- $(\Leftarrow)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de vecteurs propres associés respectivement à $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} u(e_1) & \dots & \dots & u(e_n) \end{matrix} & \end{array}.$$
Donc la matrice de u est diagonale dans la base $\mathcal{B}$.

$\square$

Exercice 14.

1. Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, $\Delta_n : P \mapsto P'$ est-il diagonalisable ?
2. Montrer que les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Correction.

1. Δ ne possède qu'une seule valeur propre 0, et les vecteurs propres associés à 0 sont les polynômes constants (non nuls). Ainsi, on ne peut pas obtenir une base de $\mathbb{K}_n[X]$ formée de vecteurs de propres de Δ_n (sauf dans le cas $n = 0$).

2. Soit p un projecteur de E i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$. On rappelle qu'alors $F = \mathrm{Ker}(p)$ et $G = \mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E et que $G = \mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)$ (et alors p est la projection sur F parallèlement à G). On note $r = \mathrm{rg}(p)$.
   Considèrons $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n)$ une base de E adaptée à $E = F \oplus G$. Alors, on a :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$$
   La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ étant diagonale, p est diagonalisable.
   Soit s une symétrie de E. Alors $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. En posant $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$, on vérifie que p est un projecteur de E (ce que le lecteur fera sans hésiter !). Or, d'après ce qui précède, p est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est diagonale. Or on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{K})$ est linéaire et vérifie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ (cette application est même un isomorphisme d'algèbres), donc :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2p - \mathrm{Id}_E) = 2D - I_n$$
   qui est une matrice diagonale comme combinaison linéaire de matrices diagonales. Par suite, s est diagonalisable.

   Plus précisément, en utilisant la forme exacte de la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ de E adpatée à la somme directe de son image et de son noyau, on trouve, avec r le rang de p :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

Proposition 23.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base de E. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

Démonstration.

u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice D diagonale représentant u. Or A et D représentent toutes deux u si, et seulement si, A et D sont semblables. Donc u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable. □

Corollaire 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Démonstration.

On applique la proposition précédente au cas particulier : $E = \mathbb{K}^n$, $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$u : (x_1, ..., x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j \right).$$

□

Proposition 24.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, il existe D une matrice diagonale tel que $A = PDP^{-1}$ où $P = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_n \end{array} \right)$ et $C_1, ..., C_n$ constituent une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.

Démonstration.

On suppose A diagonalisable. Alors l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de u. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ vers la base $\mathcal{B}'$. La formule de changement de base pour les matrices représentant un endomorphisme nous donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P,$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où λ_i est la valeur propre associé à ε_i. Par suite,

$$A = PDP^{-1}.$$

□

2. Diagonalisation

Proposition 25.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable ;

ii) $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$;

iii) $n = \dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u))$.

Démonstration.

On démontre ii)⇔iii), i)⇐ii) puis i)⇒ii).

- ii)⇔iii). Les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe, donc on a

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)).$$

  Ainsi, $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = E$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.

- i)⇐ii). On suppose u diagonalisable. Alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de u i.e. formée d'éléments appartenant aux sous-espaces propres de u. Par suite, tout élément de E se décompose en somme d'éléments des sous-espaces propres qui sont en somme directe ; donc E est égal à la somme directe des sous-espaces propres.

- ii)⇐i). On suppose $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = E$. Si on considère une base $\mathcal{B}$ de E adapté à cette somme directe, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\dim(E_{\lambda_1}(u))} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{\dim(E_{\lambda_k}(u))} \end{pmatrix}$$

  qui est une matrice diagonale, donc u est diagonalisable.

□

Proposition 26.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est diagonalisable ;

ii) $M_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(A)$;

iii) $n = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(A))$.

Démonstration.

On applique la proposition précédente à l'endomorphisme canoniquement associé à A. □

Exercice 15.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que A possède une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente i.e. vérifiant qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0_n$.

Correction.

1. On suppose que λ est la seule valeur propre de A. Si A est diagonalisable, alors il existe D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = PDP^{-1}$. Comme A et D sont semblables, ils ont même polynôme caractéristique et donc même spectre $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\} = \mathrm{Sp}(D)$. Or D s'écrit sous la forme $\mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et donc son spectre vérifie :
$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = \mathrm{Sp}(D) = \{\lambda\}.$$
Par suite, $\alpha_1 = ...\alpha_n = \lambda$ et donc $D = \lambda I_n$. Il en résulte que :
$$A = PDP^{-1} = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n.$$
Réciproquement, si $A = \lambda I_n$, alors A est diagonalisable car diagonale.
2. Soit A une matrice nilpotente. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Alors A n'est pas inversible car $\det(A)^k = \det(A^k) = \det(0_n) = 0$ d'où $\det(A) = 0$. Par suite, 0 est valeur propre de A.
De plus, si $X \neq 0_{n,1}$ est vecteur propre associé à une valeur prore λ de A, on a, comme $AX = \lambda X$:
$$0_{n,1} = 0_n X = A^k X = \lambda^k X$$
d'où $\lambda^k = 0$ car $X \neq 0_{n,1}$ et donc $\lambda = 0$.
Il en resulte que A possède 0 pour unique valeur propre. Ainsi, d'après la question précédente, A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0I_n = 0_n$.

Remarque 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Si u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ et si on note p_{λ_m} le projecteur sur $E_{\lambda_m}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^k E_{\lambda_i}(u)$, alors
$$u = \lambda_1 p_{\lambda_1} + ... + \lambda_k p_{\lambda_k}$$

Théorème 4. *Théorème de diagonalisation d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

i) le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé.

ii) la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension de son sous-espace propre associé, i.e. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,
$$m(\lambda) = \dim(E_\lambda(u)).$$

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose u diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ses valeurs propres (deux à deux distinctes). Alors $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ et l'endomorphisme u_i induit sur $E_{\lambda_i}(u)$ par u est égal à l'homothétie $u_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}(u)}$.

De plus, en notant $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ on a

$$\chi_u = \chi_{u_1} ... \chi_{u_k} = (X - \lambda_1)^{d_1} ... (X - \lambda_k)^{d_k}.$$

Donc, χ_u est scindé et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $m(\lambda_i) = d_i$.

- ($\Leftarrow$). On suppose i) et ii). D'après i), on a $\chi_u = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{m_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts. Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et on a, d'après ii) :

$$n = \deg(\chi_u) = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(u)).$$

Donc d'après la proposition 25, u est diagonalisable.

□

Théorème 5. *Théorème de diagonalisation d'une matrice*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

i) le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé.

ii) la multiplicité de chaque valeur propre de A est égale à la dimension de son sous-espace propre associé, i.e. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,

$$m(\lambda) = \dim(E_\lambda(A)).$$

Démonstration.

On raisonne de la même manière que pour le théorème précédent. □

Corollaire 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\dim(E) = n$.

— Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples i.e. si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

— Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples i.e. si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration.

Si χ_u est scindé à racines simples alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda) = 1$, donc $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$. On applique alors le théorème précédent. □

Proposition 27. *Forme de la matrice diagonalisée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{m(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

et P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{K})$ vers une base $\mathcal{B}' = (C_1, ..., C_n)$ adaptée à la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(A)$, i.e.

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & ... & C_n \end{array} \right)$$

Remarque 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ où $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes et A sa matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$. Si u est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où D à la même forme que dans la proposition précédente et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{K})$ vers une base $\mathcal{B}' = (C_1, ..., C_n)$ adaptée à la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$.

Méthode : Diagonaliser une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A. S'il est scindé dans $\mathbb{K}$, on continue ; s'il ne l'est pas, A n'est pas diagonalisable.
- On calcule les éléments propres de A et on détermine la dimension de chaque sous-espace propre de A. Si la multiplicité de **chaque** valeur propre est égale à la dimension du sous-espace associé, alors A est diagonalisable et on continue ; sinon A n'est pas diagonalisable.
- On met A sous la forme $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice formée par les vecteurs propres de A

Exercice 16.

Diagonaliser (si c'est possible) les matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 1-3i & -2 \\ 0 & -4 & 1+3i \end{pmatrix}$$

Correction.

1. $\chi_A = X^3 + 3X^2 - 2 = (X-1)(X+2)^2$, d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\}$ et on a :
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})$$
d'où A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

2. $\chi_B = X^3 - 7X^2 + 4X + 12 = (X+1)(X-2)(X+6)$ donc B est diagonalisable (polynôme scindé à racine simples) et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 2, 6\}$ et on a :
$$E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}62\\24\\-21\end{pmatrix}), \quad E_2(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$$
$$E_6(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}).$$
d'où B est diagonalisable et $B = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}62 & 1 & 1\\24 & 0 & 4\\-21 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. $\chi_C = X^3 + 4X = X(X^2+4) = X(X-2i)(X+2i)$, d'où C n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (car son polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$) et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$. Par contre, C est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$) et on trouve :
$$E_0(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix});$$
$$E_{2i}(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-1\\i\\1\end{pmatrix}), \quad E_{-2i}(C) = \overline{E_{2i}(C)} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-1\\-i\\1\end{pmatrix}).$$
Donc $C = PDP^{-1}$ avec :
$$D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2i & 0\\0 & 0 & -2i\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & i & -i\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

4. $\chi_D = (X-i)(X-(1-i))(X-(1+i))$, d'où D est diagonalisable (polynôme scindé à racines simples) et on trouve :
$$E_i(D) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix});$$

$$E_{1-i}(D) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \quad E_{1+i}(D) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Donc $D = P\mathbb{D}P^{-1}$ avec :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 17.

On considère l'application u définie sur $\mathbb{K}_2[X]$ par :

$$u : P \mapsto u(P) = (X+1)P' + X^2 P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Montrer que u est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}_2[X]$.
2. Chercher, si c'est possible, une base qui diagonalise u et, le cas échéant, donner sa matrice dans cette base.

Correction.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $(X+1)P' \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ et $P(1/X) \in \mathbb{K}(X)$; or $X^2 \in \mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ est un anneau donc $(X+1)P' + X^2P(1/X) \in \mathbb{K}(X)$. Ainsi, on a $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}(X)$.
   Montrons la linéarité de u :
   Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la dérivation et de l'évaluation, puis par opérations dans l'anneau $\mathbb{R}(X)$:

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (X+1)(\lambda P + \mu Q)' + X^2(\lambda P + \mu Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= (X+1)(\lambda P' + \mu Q') + X^2\left(\lambda P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu Q\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= \lambda(X+1)P' + \mu(X+1)Q' + \lambda X^2 P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu X^2 Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lambda\left((X+1)P' + X^2P\left(\frac{1}{X}\right)\right) + \mu\left((X+1)Q' + X^2Q\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ u(\lambda P + \mu Q) &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

   D'où la linéarité de u.
   Ainsi, $u(0) = 0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et, de plus, pour $P \in \mathbb{R}_2[X] \setminus \{0\}$, on a $0 \leq \deg(P) \leq 2$ et ainsi :

$$\deg\left(X^2P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = 2 - \deg(P) \in [\![0,2]\!]$$

   et

$$\deg\left((X+1)P'\right) = 1 + (\deg(P) - 1) = \deg(P) \in [\![0,2]\!]$$

donc $X^2P(1/X), (X+1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace vectoriel d'où $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ par combinaison linéaire.

Il en résulte que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Considérons la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme :
   - $\star$ $u(1) = (X+1)0 + X^2 \times 1 = X^2$;
   - $\star$ $u(X) = (X+1)1 + X^2 \times 1/X = 2X + 1$;
   - $\star$ $u(X^2) = (X+1)2X + X^2 \times 1/X^2 = 2X^2 + 2X + 1$;

   on obtient :
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   On a $\chi_u = \chi_A = \det(XI_3 - A) = X(X-1)(X-3)$ qui est scindé à racines simples donc u est diagonalisable. Déterminons une base qui diagonalise u.

   On sait que, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$, on a $P \in E_\lambda(u)$ si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) \in E_\lambda(A)$. On détermine alors les sous-espaces propres de A ; après calculs, on trouve :
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et } E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
   Par suite, on obtient :
   - $\star$ $E_0(A) = \mathrm{Vect}\big((-X^2 + X + 2)\big)$;
   - $\star$ $E_1(A) = \mathrm{Vect}\big((-X^2 + 2X + 1)\big)$;
   - $\star$ $E_3(A) = \mathrm{Vect}\big((X^2 - X - 1)\big)$.

   On obtient donc une base $\mathcal{C} = (-X^2 + X + 2, -X^2 + 2X + 1, X^2 - X - 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de u i.e. $\mathcal{C}$ est une base qui diagonalise u et on a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Endomorphismes et matrices trigonalisables

Définition 17. *Endomorphisme/matrice trigonalisable*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que :
$$A = PTP^{-1}.$$

Proposition 28. *Forme d'une matrice trigonalisée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Si A est trigonalisable, alors A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Démonstration.

A et T ont même polynôme caractéristique qui est scindé et dont les racines sont $\lambda_1, ..., \lambda_k$ de multiplicités respectives $m(\lambda_1), ..., m(\lambda_k)$. Or T étant triangulaire, les coefficients diagonaux de T sont exactement les racines de χ_T et le nombre d'apparition d'un coefficient sur la diagonale est exactement sa multiplicité dans χ_T. D'où la forme annoncée pour T. □

Proposition 29.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base de E. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable.

Démonstration.

u est trigonalisable si, et seulement si, il existe une matrice T triangulaire représentant u. Or A et T représentent toutes deux u si, et seulement si, A et T sont semblables. Donc u est trigonalisable si, et seulement si, A est trigonalisable. □

Corollaire 8.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable.

Démonstration.

On applique la proposition précédente au cas particulier : $E = \mathbb{K}^n$, $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$u : (x_1, ..., x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j \right).$$

$\square$

4. Trigonalisation

Théorème 6. *Théorème de trigonalisation*

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_A est scindé.
— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

Démonstration.

On démontre la partie concernant les matrices. Pour les endomorphismes, il suffit d'utiliser l'équivalence $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, une matrice représentant u est trigonalisable et de remarquer que u et sa matrice ont le même polynôme caractéristique.

- $(\Rightarrow)$. Si A est trigonalisable, alors il existe une matrice triangulaire supérieure T semblable à A. Par suite on a $\chi_A = \chi_T$ et le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est scindé. Donc χ_A est scindé.
- $(\Leftarrow)$. On considère la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \chi_A \text{ est scindé } \Rightarrow A \text{ est trigonalisable."}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie par récurrence $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation.* Pour $n = 1$, la propriété $\mathcal{P}_0$ est triviale : toute matrice de dimension 1 est triangulaire !

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie.
Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. On suppose que on polynôme caractéristique χ_A est scindé. Par suite, χ_A admet au moins une racine λ qui est valeur propre de A. Soit $C_1 \in M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ. On complète C_1 en une base $\mathcal{B} = \{C_1, C_2, ..., C_{n+1}\}$ de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Alors, en posant $Q = \left(C_1 \mid \dots \mid C_{n+1} \right)$ i.e. Q est la matrice de passage de la base canonique de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{B}$, on a

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right).$$

où $B \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in M_n(\mathbb{K})$.
Alors on a :

$$\chi_A = \chi_{Q^{-1}AQ} = (X - \lambda)\chi_C$$

Or comme χ_A est scindé et $\chi_C | \chi_A$, alors χ_C est scindé et ainsi, par hypothèse de récurrence, C est trigonalisable. Par suite, il existe $T' \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire et $R \in$

$GL_n(\mathbb{K})$ tels que $C = RT'R^{-1}$. Alors, si on pose :

$$P' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P = QP'$$

on obtient :

$$P^{-1}AP = P'^{-1}Q^{-1}AQP' = P'^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)P' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & BR \\ \hline 0 & T' \end{array}\right).$$

Donc $T = P^{-1}AP$ est triangulaire ; d'où A est trigonalisable. Par suite, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence.

□

Corollaire 9.

— Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Démonstration.

Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Alors son polynôme caractéristique χ_A appartient à $\mathbb{C}[X]$ donc d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, χ_A est scindé. Il en résulte que A est trigonalisable d'après le théorème précédent.
Même raisonnement pour un endomorphisme. □

Proposition 30.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Si u est trigonalisable, alors :

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)\lambda_i \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{i=1}^{i} \lambda_k^{m(\lambda_i)}.$$

Démonstration.

On suppose u trigonalisable. Alors il existe T triangulaire qui représente u et T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

d'où le résultat. □

Méthode : Trigonalisation d'une matrice.

- On calcule le polynôme caractéristique de la matrice. S'il est **scindé**, la matrice est trigonalisable, on continue.
- On détermine les sous-espaces propres ; on compare la dimension de chacun de ces sous-espaces et la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Si chaque dimension est égale à la multiplicité correspondante, on diagonalise ; sinon, on doit trigonaliser.

  Dans le cas général, il n'y a pas de méthode à connaître ; mais nous allons voir comment trigonaliser une matrice A dans les différents cas possibles en dimension 3 sur des exemples. Dans la suite, u désignera l'endomorphisme canonique de $\mathbb{K}^3$ associé à A.

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

1er cas : Deux valeurs propres distinctes de multiplicité 1 et 2 et chaque sous-espace propre de dimension 1.

Exemple représentatif :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ et les sous-espaces propres sont :

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- On forme une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ en prenant $e_1 = (1,1,1)$ et $e_2 = (0,1,-1)$ et en choisissant e_3 de manière à compléter en une base la famille e_1, e_2.
- On obtient alors $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

Par exemple : On choisit $e_3 = e_1 \wedge e_2 = (-2, 1, 1)$ et on a :

$$u(e_3) = {}^t\left(A\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right) = (-8, 4, -8) = -4e_1 + 6e_2 + \mathbf{2}e_3.$$

d'où, dans ce cas, $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\0 & 2 & 6\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

2eme cas : Une valeur propre triple et le sous-espace propre associé de dimension 2.

Exemple représentatif :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = (X-1)^3$ et le sous-espace propre associé à 1 est :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

- On forme une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ en prenant $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, -1, 1)$ et en choisissant e_3 de manière à compléter en une base la famille e_1, e_2.
- On obtient alors $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}1 & 0 & *\\0 & 1 & *\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

Par exemple : On choisit $e_3 = (0, 1, 1)$ et on a $u(e_3) = (8, 4, -8) = 2e_2 + \mathbf{1}.e_3$. d'où, dans ce cas, $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

3eme cas : Une valeur propre triple λ et le sous-espace propre associé de dimension 1.

On utilise ici la méthode de réduction de Jordan (par souci de simplicité) :
On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que :

- On cherche $e_3 \notin \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2\right)$;
- on pose $e_2 = u(e_3) - \lambda e_3$; (d'où $u(e_3) = e_2 + \lambda e_3$) ;
- on pose $e_1 = u(e_2) - \lambda e_2$; (d'où $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$).

Et on prouvera plus tard qu'on a nécessairement $u(e_1) = \lambda e_1$ grâce au théorème de Cayley-

Hamilton. Ainsi, on obtient $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

Exercice 18.

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i & \frac{1}{2} & -i \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+i & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

5. Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

On rappelle ici la notion de nilpotence évoquée dans le chapitre Structures algébriques usuelles :

Définition 18. *Endomorphisme nilpotent/Matrice nilpotente*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. On appelle alors **indice de nilpotence** le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. On appelle alors **indice de nilpotence** le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$.

Exemple 5.

Une matrice triangulaire dont la diagonale est composée de 0 - on appelle ce type de matrices des matrices triangulaires **strictes** - est nilpotente.

Proposition 31.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les assertions :

i) u est nilpotent ;

ii) $\chi_u = X^n$ (où $n = \dim(E)$) ;

On a le même résultat pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

- i)$\Rightarrow$ ii). On suppose u nilpotent d'indice p. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E. La matrice A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$A^k X = \lambda^k X.$$
Or $A^p = 0$ donc $\lambda^p X = 0$ avec $X \neq 0$, d'où $\lambda^p = 0$. Ainsi, $\lambda = 0$, donc 0 est la seule valeur propre de A. A étant trigonalisable, son polynôme caractéristique est donc $\chi_A = X^n$. Par suite, $\chi_u = \chi_A = X^n$.
- ii)$\Rightarrow$ i). On suppose $\chi_u = X^n$. *(On peut conclure directement avec le théorème de Cayley-Hamilton mais on n'a pas besoin d'utiliser un si puissant résultat ici).*
Comme χ_u est scindé, u est trigonalisable et donc il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire stricte car 0 est la seule valeur propre de u. Or T est nilpotente car triangulaire stricte, donc il existe $k \geq 1$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = T^k = 0_n$. Ainsi, $u^k = 0$.

$\square$

Corollaire 10.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est nilpotent si, et seulement si, u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si, et seulement si, A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Démonstration.

On a u est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$ si, et seulement si, u est trigonalisable et son unique valeur propre est 0. $\square$

Proposition 32.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent d'indice p, alors :

— pour tout $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre ;

— $p \leq n = \dim(E)$.

Démonstration.

— Soit $a_0, ..., a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = 0_E$. On a :

$$0_E = u^{p-1}(\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)) = a_0 u^{p-1}(x).$$

donc $a_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, puis, on a :

$$0_E = u^{p-2}(\sum_{i=1}^{p-1} a_i u^i(x)) = a_1 u^{p-1}(x).$$

d'où $a_1 = 0$. On continue ainsi de proche en proche pour trouver finalement :

$$a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0.$$

Donc $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une famille libre.

— Comme p est le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, alors $u^{p-1} \neq 0$. Par suite, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi, en utilisant le point précédent, la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E de p vecteurs, par suite, $p \leq \dim(E)$.

$\square$

Partie E

Polynômes annulateurs et réduction

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n.

1. Rappels et compléments sur les polynômes annulateurs

a. Rappels

Soit $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On rappelle que les polynômes P en $u \in \mathcal{L}(E)$ et en $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont définis par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + ... + a_k u^k \in \mathcal{L}(E),$$

et

$$P(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_k A^k \in M_n(\mathbb{K}).$$

On note, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** pour u (resp. pour A) si $P(u) = 0$ (resp. si $P(A) = 0_n$).

b. Polynômes annulateurs et éléments propres

Proposition 33.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

i) Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

ii) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Démonstration.

i) On a, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $u^i \circ u^j = u^j \circ u^i$ et u^i est linéaire donc en déduit que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned}
P(u)\circ Q(u) &= \sum_{i=0}^{k} a_i u^i \circ (\sum_{j=0}^{l} b_j u^j) \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{l} b_j u^i \circ u^j \\
&= \sum_{j=0}^{l} b_j \sum_{i=0}^{k} a_i u^j \circ u^i \\
&= \sum_{j=0}^{l} b_j u^j \circ (\sum_{i=0}^{k} a_i u^i) \\
&= Q(u)\circ P(u)
\end{aligned}$$

ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $u = Q(u)$ avec $Q = X$, donc u et $P(u)$ commutent d'après i). Donc, d'après la proposition 7, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

□

Proposition 34.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Soit $x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

— Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Si $AX = \lambda X$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Démonstration.

— On suppose $u(x) = \lambda x$. Alors on a :

$$P(u)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i(\lambda^i x) = (\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i)x = P(\lambda)x.$$

— On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et on raisonne comme pour pour le point précédent en considérant A et X comme les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de u et x respectivement.

□

Corollaire 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et

$$E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}(P(u)).$$

— Si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$ et

$$E_\lambda(A) \subset E_{P(\lambda)}(P(A)).$$

Proposition 35.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est une racine de P ; autrement dit, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$.

— Si P est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre de A est une racine de P ; autrement dit, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.

Démonstration.

On suppose que P est un polynôme annulateur de u, i.e. $P(u) = 0$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, d'après la proposition précédente, $P(\lambda)$ est un valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$ qui est l'endomorphisme nul. Or 0 est l'unique valeur propre de $0 \in \mathcal{L}(E)$. D'où $P(\lambda) = 0$ i.e. λ est une racine de P. □

Remarque 14.

ATTENTION, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! Par exemple, $X^2(X-1)$ est un polynôme annulateur pour la matrice I_n mais 0 n'est pas valeur propre de I_n.

Exemple 6.

— Soit p un projecteur. Alors $p^2 = p$ donc $X^2 - X = (X-1)X$ est un polynôme annulateur de p et on a bien $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.

— Soit s une symétrie. Alors $s^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de s et on a bien $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition 36.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si P est un polynôme annulateur de u et $P(0) \neq 0$, alors u est injectif (et donc bijectif car $\dim(E)$ est finie).

— Si P est un polynôme annulateur de A et $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.

Démonstration.

On suppose que $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ est un polynôme annulateur de u et que $P(0) \neq 0$. Alors $a_0 \neq 0$ et on a :

$$a_0 \mathrm{Id}_E + (\sum_{i=1}^{k} a_i u^{i-1}) \circ u = P(u) = 0,$$

donc $(\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i u^{i-1}) \circ u = \mathrm{Id}_E$. Par suite, u est inversible et son inverse est $\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i u^{i-1}$.

On raisonne de même pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ pour démontrer que A est inversible et que son inverse est $\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1}$. □

Méthode : Calcul d'une inverse grâce à un polynôme annulateur. La démonstration précédente nous donne un moyen pratique de détermination de l'inverse d'un endomorphisme (en dimension finie) ou d'une matrice quand on a un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En effet, pour $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_0 \neq 0$ un polynôme annulateur de u (resp. de A), on a :

$$u^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i u^{i-1};$$

respectivement,

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1}.$$

Exercice 19.

1. Déterminer l'inverse de $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. On a $f^2 - 3f = -3\mathrm{Id}_E$, donc $f^{-1} = \frac{-1}{3}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.
2. On a $A^2 - 2A = 3I_n$, donc $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 3I_n)$.

Proposition 37.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si u_F est l'endomorphisme induit par u sur $F = \mathrm{Ker}(P(u))$, alors P est un polynôme annulateur de u_F.

Correction.

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ la décomposition de P dans la base canonique de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que u_F est l'endomorphisme induit par u sur $F = \mathrm{Ker}(P(u))$. Alors, pour tout $x \in F$, on a $P(u)(x) = 0_E$ et :

$$P(u_F)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k u_F^k(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k(x) = P(u)(x) = 0_E$$

Par suite, $P(u_F) = 0_{\mathcal{L}(F)}$ i.e. P est annulateur de u_F.

2. Polynôme minimal

Dans le chapitre Structures algébriques usuelles, on a introduit la notion de polynôme minimal d'un élément d'une algèbre, on rappelle ici les principaux points de ce concept dans le contexte des algèbres de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 38. *Idéal annulateur*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ appelé **idéal annulateur de** u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $I_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_n\}$ appelé **idéal annulateur de** A est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.

Démonstration.

On a déjà démontré ce résultat dans la partie Algèbres du chapitre Structures algébriques. On rappelle tout de même la démonstration dans notre contexte :

I_u est un idéal de $K[X]$ comme noyau du morphisme d'anneaux $f : P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Montrons que u possède un polynôme annulateur non nul. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie égale à n^2, la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n^2})$ est liée car composée de $n^2 + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n^2 donc il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i u^i = 0.$$

Par suite $P = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$ est un polynôme annulateur non nul de u d'où $I_u \neq \{0\}$. $\square$

Définition 19. *Polynôme minimal*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme minimal de** u et on note π_u le générateur unitaire de l'idéal annulateur I_u de u. En particulier, $I_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme minimal de** A et on note π_A le générateur unitaire de l'idéal annulateur I_A de A. En particulier, $I_A = \pi_A \mathbb{K}[X]$.

Proposition 39.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— Si E est de dimension $n \geq 1$, $\deg(\pi_u) \geq 1$.

— On a $\deg(\pi_u) = 1$ si, et seulement si, u est une homothétie.

Proposition 40.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $d = \deg(\pi_u)$. La famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{d-1})$ est une base de l'algèbre $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ engendré par u.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $d = \deg(\pi_A)$. La famille $(I_n, A, ..., A^{d-1})$ est une base de l'algèbre $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ engendré par A.

Démonstration.

On a déjà démontré ce résultat dans la partie Algèbres du chapitre Structures algébriques. On rappelle tout de même la démonstration dans notre contexte :

On suppose que u admet un polynôme minimal π_u avec $d = \deg(\pi_u)$. Montrons que $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

- *Famille libre :* soit $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$. S'il existe $i \in [\![0, d-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, $\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur non nul de u de degré $< d = \pi_u$. Contradiction car π_u est de degré minimal parmi les polynômes annulateurs. Donc pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre.
- *Famille génératrice :* Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$. Alors $P \in \mathbb{K}[X]$ et en faisant la division euclidienne de ce polynôme par π_u, on obtient qu'il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \pi_u Q + R$ et $\deg(R) < d-1$. Par suite,
$$P(u) = \underbrace{\pi_u(u)}_{=0_A} Q(u) + R(u) = R(u).$$
et R est de degré $\leq d-1$ donc il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k$. Il en résulte que :
$$P(u) = R(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k \in \mathrm{Vect}\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}.$$

Donc $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. □

Proposition 41.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si, et seulement si, $\pi_u(\lambda) = 0$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si, et seulement si, $\pi_A(\lambda) = 0$.

Autrement dit, les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. Si λ est une valeur propre de u, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de u. Or π_u est un polynôme annulateur de u. Donc $\pi_u(\lambda) = 0$.
- $(\Leftarrow)$. On suppose $\pi_u(\lambda) = 0$. Alors on a la factorisation
$$\pi_u = (X - \lambda)P,$$
où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = \deg(\pi_u) - 1 < \deg(\pi_u)$. Par suite,
$$0 = \pi_u(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ P(u).$$
Supposons par l'absurde que λ n'est pas valeur propre de u. Alors $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ est injective et donc bijective car E est de dimension finie ; d'où $P(u) = 0$. Ce qui est impossible par minimalité du degré du polynôme minimal parmi les polynômes annulateurs de u.
Il en résulte que λ est une valeur propre de u.

□

Corollaire 12.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors π_u et χ_u ont les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. En particulier, ils ont les mêmes racines.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors π_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$. En particulier, ils ont les mêmes racines.

Démonstration.

Traitons le cas matriciel. Soit $A \in M_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{C})$. D'après la proposition précédente, les racines de π_A dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de u qui sont également les racines de χ_A dans $\mathbb{C}$. Les facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ étant seulement les polynômes de degré 1, il en résulte que π_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a le résultat. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il reste donc à traiter le cas où P est un facteur irréductible de degré 2 de π_A ou de χ_A. Alors $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i.e. P possède deux racines complexes non réelles conjuguées. Ces deux racines $\lambda, \overline{\lambda}$ sont donc des valeurs propres de A vu comme une matrice à coefficients complexes. Par suite, ce sont des racines communes de π_A et χ_A d'où $P = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ est un facteur irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ commun à π_A et χ_A. □

Corollaire 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors π_u est scindé si, et seulement si, χ_u est scindé.
De même dans le cas matriciel.

3. Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 7. *Lemme de décomposition des noyaux*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors, pour $P = P_1...P_k$, on a :

$$\mathrm{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Démonstration.

On montre le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

- *Initialisation : $k = 2$* Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et $P = AB$. On procède par double inclusion.
  Comme $\mathbb{K}[u]$ est commutatif, on a :
  $$A(u) \circ B(u) = P(u) = B(u) \circ A(u),$$
  d'où $\mathrm{Ker}(A(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(B(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$. Par suite,
  $$\mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$$
  D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, donc

$$A(u) \circ U(u) + B(u) \circ V(u) = \mathrm{Id}_E. \quad (*)$$

- Montrons tout d'abord que la somme $\mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u))$ est directe i.e. $\mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u)) = \{0_E\}$.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u))$. Alors on a, d'après $(*)$ et en utilisant le fait que $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative :
  $$x = U(u)\left(\underbrace{A(u)(x)}_{=0_E}\right) + V(u)\left(\underbrace{B(u)(x)}_{=0_E}\right) = 0_E.$$
  Par suite, $\mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u)) = \{0_E\}$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$. On note $y = A(u) \circ U(u)(x)$ et $z = B(u) \circ V(u)(x)$. D'après $(*)$, $x = y + z$, et de plus, on a :
  $$A(u)(z) = A(u) \circ B(u) \circ U(u)(x) = P(u) \circ U(u)(x) = U(u)\left(\underbrace{P(u)(x)}_{=0_E}\right) = 0_E$$
  donc $z \in \mathrm{Ker}(A(u))$ et, par le même raisonnement, on obtient $y \in \mathrm{Ker}(B(u))$.
  Par suite, $x = z + y \in \mathrm{Ker}(A(u)) \oplus \mathrm{Ker}(B(u))$.
  Il en résulte que
  $$\mathrm{Ker}(A(u)) \oplus \mathrm{Ker}(B(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)).$$

— *Hérédité :* Soit $k \geq 2$. On suppose le propriété vraie pour k. Soit $P = P_1...P_{k+1}$ avec $P_1, ..., P_{k+1}$ premiers entre eux deux à deux.
On pose $A = P_1...P_k$ et $B = P_{k+1}$. Alors A et B sont premiers entre eux, $P = AB$. D'après le raisonnement effectué pour l'initialisation, on a $\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u))$. Par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u) \oplus \mathrm{Ker} P_{k+1}(u).$$
Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

□

Corollaire 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors $P = P_1...P_k$ est un polynôme annulateur de u si, et seulement si,
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Démonstration.

On applique le lemme de décomposition des noyaux pour obtenir :

$$\mathrm{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Or P est un polynôme annulateur de u si, et seulement si, on a $\mathrm{Ker} P(u) = E$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 15.

On retrouve que pour p un projecteur et s une symétrie, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires ainsi que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 20.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + 4b > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites récurrentes doubles dont le terme général vérifie $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Montrer que $\mathcal{U}$ est le noyau de l'endomorphisme $P(s)$ où
$$P = X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad s : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$
En déduire une expression explicite de $\mathcal{U}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + 4b > 0$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions f de $C^\infty(\mathbb{R})$ telles que $f'' = af' + bf$. Montrer que $\mathcal{S}$ est le noyau de l'endomorphisme $P(D)$ où
$$P = X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad D : f \mapsto f'.$$
En déduire une expression explicite de $\mathcal{S}$.

Correction.

1. On a, pour $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,
$$P(s)(u) = s^2(u) - as(u) - b\mathrm{id}(u) = u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n$$
Donc on a bien $\mathcal{U} = \mathrm{Ker}(P(s)) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid P(s)(u) = 0\}$. On a $\Delta(P) = a^2 + 4b > 0$ par hypothèse, donc P possède deux racines $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ distinctes. Ainsi $P = (X - r_1)(X - r_2)$ et $X - r_1, X - r_2$ sont premiers entre eux, donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux :
$$\mathcal{U} = \mathrm{Ker}(P(s)) = \mathrm{Ker}(s - r_1\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s - r_2\mathrm{id}).$$
Or, pour $r \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Ker}(s - r\mathrm{id}) = \{u = (u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ru_n\} = \{(Ar^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid A \in \mathbb{R}\}.$$
Il en résulte que :
$$\mathcal{U} = \{(Ar_1^n + Br_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$
2. Par un raisonnement similaire, on obtient, pour r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de P :
$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

en remarquant que :

$$\mathrm{Ker}(D - r\mathrm{id}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f' = rf\} = \{t \mapsto \alpha e^{rt} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

4. Polynômes annulateurs et réduction

Théorème 8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les assertions :

i) u est diagonalisable ;

ii) u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

iii) le polynôme minimal π_u de u est scindé à racines simples.

Le même résultat est valable pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

On démontre i)$\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

- i)$\Rightarrow$ ii). On suppose u diagonalisable et on note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Alors on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E).$$

  Par suite, d'après le corollaire 14, le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ est annulateur de u.
- ii)$\Rightarrow$ iii). Si u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples P alors $\pi_u | P$ et donc π_u est scindé à racines simples.
- iii)$\Rightarrow$ i). On suppose que π_u est scindé à racines simples i.e. $\pi_u = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et d'après le corollaire 14, on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$. Par suite, u est diagonalisable.

$\square$

Corollaire 15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est diagonalisable.

Démonstration.

Si u est diagonalisable, alors π_u est scindé à racines simples d'après le théorème précédent. Or on a $\pi_u(u_F) = 0$: en effet, pour tout $x \in F$, $\pi_u(u_F)(x) = \pi_u(u)(x) = 0_E$; par suite, u_F possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. D'après le théorème précédent, u_F est diagonalisable. $\square$

Exemple 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + 11u = 6u^2 + 6\mathrm{Id}_E$. Alors u est diagonalisable.

> En effet, le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 11X - 6$ est annulateur de u et on remarque que $P = (X-1)(X-2)(X-3)$ est scindé à racines simples. Ainsi, u est diagonalisable d'après le théorème précédent.

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M^2 + M = I_n$. Déterminer le déterminant de M et montrer que sa trace est un entier naturel inférieur ou égal à n.

Correction.

On remarque que $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X-i)(X+i)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de M. Par suite, M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, i, -i\}$ et ainsi, on a :

$$\det(M) = 1^{m(1)} \times i^{m(i)} \times (-i)^{m(-i)} \text{ et } \mathrm{tr}(M) = m(1) + m(i)i - m(-i)i$$

où, si λ n'est pas valeur propre de M, $m(\lambda) = 0$ et si λ est valeur propre de M, $m(\lambda)$ désigne sa multiplicité.
De plus, M étant à coefficients dans $\mathbb{R}$, ses valeurs propres non réelles conjuguées (potentielles) i et $-i$ ont la même multiplicité i.e. $m(i) = m(-i)$. Ainsi :

$$\det(M) = (i \times (-i))^{m(i)} = 1^{m(i)} = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(M) = m(1) + m(i)(i - i) = m(1) \in [\![0, n]\!].$$

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n+1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.
2. Exprimer A en fonction de J et I_n puis en déduire un polynôme annulateur de degré 2 de A.
3. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. On a $J^2 = nJ$.
2. On a $A = J + nI_n$ et comme J et I_n commutent, on a :
$$A^2 = (J + nIn)^2 = J^2 + 2nJ + n^2 I_n = 3nJ + n^2 I_n = 3nA - 2n^2 I_n$$

Par suite, $P = X^2 - 3nX + 2n^2$ est annulateur de A

3. On remarque que $P = (X-n)(X-2n)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0_n & A \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$.
Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi puis, sous la même hypothèse, que $A = 0_n$.

Correction.

On remarque tout d'abord que pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0_n & P(A) \end{array}\right)$ car, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k == \left(\begin{array}{c|c} A^k & kA^k \\ \hline 0_n & A^k \end{array}\right)$.
On suppose B diagonalisable. D'après la caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs, B possède un polynôme annulateur P scindé à racines simples. Ainsi, d'après la remarque précédente, P est donc également annulateur de A, d'où A est diagonalisable, toujours d'après la caractérisation utilisée précédemment.
De plus, on a également XP' qui est annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A font partie des racines communes de XP' et de P. Or, comme P est à racines simples, P et P' n'ont pas de racine commune ; donc les valeurs propres de A font partie des racines communes de X et P... et ils en ont nécessairement au moins une en commun et il s'agit bien-sûr seulement de 0, car A possède au moins une valeur propre ! Ainsi, 0 est la seule valeur propre de A qui est diagonalisable : par suite, $A = 0_n$.

Théorème 9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les assertions :

i) u est trigonalisable ;

ii) u possède un polynôme annulateur scindé ;

iii) le polynôme minimal π_u de u est scindé.

Le même résultat est valable pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

Démontrons i)$\Leftrightarrow$ iii) :

i) : u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé (Théorème 6) si, et seulement si, π_u est scindé (Corollaire 13) : iii).

Et en remarquant que le polynôme minimal est un polynôme annulateur de u qui divise tout polynôme annulateur u, on obtient ii)$\Leftrightarrow$ iii).

Remarque : dans la suite, on propose une preuve de iii)$\Rightarrow$i) qui n'utilise pas la caractérisation de

la trigonalisabilité en terme de polynôme caractéristique :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \pi_A \text{ est scindé } \Rightarrow A \text{ est trigonalisable."}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie par récurrence $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation.* Pour $n = 1$, la propriété $\mathcal{P}_0$ est triviale : toute matrice de dimension 1 est triangulaire.

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie.
Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. On suppose que on polynôme minimal π_A est scindé. Par suite, π_A admet au moins une racine λ qui est valeur propre de A. Soit $C_1 \in M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ. On complète C_1 en une base $\mathcal{B} = (C_1, C_2, ..., C_{n+1})$ de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Alors, en posant $Q = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_{n+1} \end{array} \right)$ i.e. Q est la matrice de passage de la base canonique de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{B}$, on a :

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right).$$

où $B \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in M_n(\mathbb{K})$.
De plus, on a :

$$\pi_A(Q^{-1}AQ) = Q^{-1} \underbrace{\pi_A(A)}_{=0_{n+1}} Q = 0_{n+1}.$$

Or,

$$\pi_A(Q^{-1}AQ) = \pi_A\left(\left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \right) = \left(\begin{array}{c|c} \pi_A(\lambda) & B' \\ \hline 0 & \pi_A(C) \end{array} \right) \text{ où } B' \in M_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Par suite, $\pi_A(C) = 0_n$ i.e. π_A est un polynôme annulateur de C qui est scindé par hypothèse; donc le polynôme minimal π_C de C est scindé car il divise π_A. Ainsi, par hypothèse de récurrence, C est trigonalisable. Par suite, il existe $T' \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire et $R \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $C = RT'R^{-1}$. Alors, si on pose :

$$P' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \quad \text{et} \quad P = QP'$$

on obtient :

$$P^{-1}AP = P'^{-1}Q^{-1}AQP' = P'^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) P' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & BR \\ \hline 0 & T' \end{array} \right).$$

Donc $T = P^{-1}AP$ est triangulaire; d'où A est trigonalisable. Par suite, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence.

Montrons maintenant l'implication iii) $\Rightarrow$ i). Supposons π_u scindé. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Comme $\pi_A = \pi_u$, π_A est scindé, et donc, d'après le résultat précédent, A est trigonalisable, ce qui implique que u l'est aussi. □

Corollaire 16.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si u est trigonalisable, alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est trigonalisable.

Démonstration.

Si u est trigonalisable, alors π_u est scindé d'après le théorème précédent. Or on a $\pi_u(u_F) = 0$: en effet, pour tout $x \in F$, $\pi_u(u_F)(x) = \pi_u(u)(x) = 0_E$; par suite, u_F possède un polynôme annulateur scindé. D'après le théorème précédent, u_F est trigonalisable. $\square$

5. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 10. *Théorème de Cayley-Hamilton*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique χ_u de u est un polynôme annulateur de u i.e.

$$\chi_u(u) = 0.$$

Autrement dit, π_u divise χ_u.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A i.e.

$$\chi_A(A) = 0_n.$$

Autrement dit, π_A divise χ_A.

Démonstration Non exigible.

On suppose u trigonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de trigonalisation de u. On note $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et on a, pour $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres de u (pas forcément distinctes donc) :

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \iddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par suite, on a $\chi_u = \chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Pour $i = 1, ..., n$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$, $F_0 = \{0_E\}$ et $P_i = X - \lambda_i$. Alors on a :

$$\chi_u(u) = P_1(u) \circ ... \circ P_n(u).$$

Montrons que pour $i \in [\![1, n]\!]$, que $P_i(u)(F_i) \subset F_{i-1}$.

- Cas $i = 1$. On a
$$P_1(u)(e_1) = u(e_1) - \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_1 = 0_E,$$
d'où $P_1(u)(F_1) \subset \{0_E\} = F_0$.
- Cas $i \in [\![1, n-1]\!]$. Pour $x \in F_i$, on a $x = \alpha e_i + \underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}}$.
Comme F_{i-1} est stable par u, alors F_{i-1} est stable par $P_i(u)$ d'où $P_i(u)(x_{i-1}) \in F_{i-1}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
P_i(u)(e_i) &= u(e_i) - \lambda_i e_i \\
&= (t_{1i}e_1 + ... + t_{i-1,i}e_{i-1} + \underbrace{t_{ii}}_{=\lambda_i} e_i) - \lambda_i e_i \\
&= t_{1i}e_1 + ... + t_{i-1,i}e_{i-1} \in F_{j-1}.
\end{aligned}$$

Donc $P_i(u)(x) = \alpha P_i(u)(e_i) + P_i(u)(x_{i-1}) \in F_{j-1}$.

Alors, on a bien, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, que $P_i(u)(F_i) \subset F_{i-1}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_u(u)(E) &= P_1(u) \circ ... \circ P_{n-1}(u) \circ P_n(u)(F_n) \\
&\subset P_1(u) \circ ... \circ P_{n-1}(u)(F_{n-1}) \\
&\subset \\
&\vdots \\
&\subset \\
&\subset P_1(u)(F_1) \\
&\subset F_0 = \{0_E\}.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\chi_u(u)(E) = \{0_E\} \text{ i.e. } \chi_u(u) = 0.$$

Si u n'est pas trigonalisable, alors on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ représentant u comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donc l'endomorphisme u' de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A l'est aussi. D'après ce qui précède, on a $\chi_{u'}(u') = 0$ et donc $\chi_A(A) = 0_n$. Le polynôme caractéristique de A est à coefficients dans $\mathbb{K}$, donc on a également $\chi_u(u) = 0$.

Dans tous les cas, on $\chi_u(u) = 0$. □

Pour ce corollaire, on rappelle qu'on a prouvé précedemment que les polynômes caractéristique et minimal possèdent les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire 17.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\deg(\pi_u) \leq n$.
Plus précisément, si $P_1, ..., P_k$ sont les facteurs irréductibles distincts des polynômes minimal π_u et caractéristique χ_u de u avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{k} P_i^{p_i}$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} P_i^{m_i}$ leurs décompositions en facteurs irréductibles, alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$p_i \leq m_i$$

De même dans le cas matriciel.

Démonstration.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\pi_u | \chi_u$.
Ainsi on a $\deg(\pi_u) \leq \deg(\chi_u) = n$.

Précisons ! Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Alors $P_i^{n_i} | \prod_{j=1}^k P_j^{n_j} = \pi_u = \chi_u | \chi_u = \prod_{j=1}^k P_j^{m_j}$; donc par transitivité, $P_i^{n_i} | \prod_{i=1}^k P_i^{m_i}$. Or, pour tout $j \neq i$, $P_i^{n_i}, P_j^{m_j}$ sont premiers entre eux car P_i, P_j sont des polynômes irréductibles distincts ; donc, d'après le lemme de Gauss, $P_i^{n_i} | P_i^{m_i}$ d'où $n_i \leq m_i$. $\square$

Exercice 24.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de puissances de A.

Correction.

On a $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$0_n = \chi_A(A) = A^3 - 3A^2 + 4A - 2.$$

Par suite,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 4I_3).$$

Exercice 25.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Retrouver grâce au théorème de Cayley-Hamilton, que $p \leq n$.

Correction.

Comme A est nilpotente d'indice p, son polynôme minimal est $\pi_A = X^p$. Celui-ci est scindé, donc χ_A l'est aussi, et comme ils ont les même facteurs irréductibles et $\deg(\chi_A) = n$, on a $\chi_A = X^n$. Or, d'après le theorème de Cayley-Hamilton, $X^p = \pi_A | \chi_A = X^n$ d'où $p \leq n$.

6. Sous-espaces caractéristiques

Tout les énoncés suivants sont directement transposables au cas matriciel.

Définition 20. *Sous-espace caractéristique*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à** λ et on note $C_\lambda(u)$ le sous-espace vectoriel de E :

$$C_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m(\lambda)}\right)$$

où $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.

Exercice 26.

Déterminer les sous-espaces caractéristiques de

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition 42.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u de multiplicité $m(\lambda)$, alors :

$$\dim(C_\lambda(u)) = m(\lambda).$$

Démonstration.

On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note $m = m(\lambda)$ et $p = \dim(C_\lambda(u))$. Alors on a $\chi_u = P(X-\lambda)^m$ où $(X-\lambda)$ et P sont premiers entre eux. Comme χ_u est annulateur de u d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, on a, d'après le lemme des noyaux :

$$E = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus C_\lambda(u).$$

De plus, comme $P(u)$ et $(u-\lambda \mathrm{Id}_E)^m$ commutent avec u, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $C_\lambda(u)$ sont stables par u. On considère alors les endomorphismes induits v et w par u sur $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $C_\lambda(u)$ respectivement. Comme Q est un polynôme annulateur de v et que λ n'est pas racine de Q, alors λ n'est pas valeur propre de v. Ainsi, $(X-\lambda)$ et χ_v sont premier entre eux.
Comme $(X-\lambda)^m$ est annulateur de w, alors λ est la seule racine de w et donc $\chi_w = (X-\lambda)^p$. Par suite, on a $P(X-\lambda)^m = \chi_u = \chi_v.\chi_w = \chi_v.(X-\lambda)^p$. Comme $(X-\lambda)^p$ et P sont premiers entre eux, $(X-\lambda)^p|(X-\lambda)^m$ d'où $p \leq m$ puis, comme $(X-\lambda)^p$ et χ_v sont premiers entre eux, $(X-\lambda)^m|(X-\lambda)^p$ d'où $m \leq p$.
Il en résulte que $m = p$. □

Proposition 43.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Si $\pi_u = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{p_i}$ où $\lambda_1, .., \lambda_k$ sont exactement toutes les valeurs propres distinctes de u, alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right) = C_{\lambda_i}(u) \ \left(= \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m(\lambda_i)}\right)\right)$$

Correction.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\pi_u|\chi_u$ donc pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i \leq m(\lambda_i)$. Par suite, $\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right) \subset C_{\lambda_i}(u)$; en effet, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, si $p \leq q$, $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^q)$.
En notant $d_i = \dim(\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right))$, on a donc $d_i \leq m(\lambda_i) = \dim(C_{\lambda_i}(u))$

De plus, comme π_u et χ_u sont annulateurs de u, on a, d'après le lemme des noyaux :

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right) = E = \bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(u).$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = n = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i).$$

Par suite, on a pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i = m(\lambda_i)$: en effet, comme pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $d_i \leq m(\lambda_i)$, si, par l'absurde, il existe $i_0 \in [\![1,k]\!]$ tel que $d_{i_0} < m(\lambda_{i_0})$, alors $\sum_{i=1}^{k} d_i < \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)$, contradiction.
Ainsi, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, comme $\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $C_{\lambda_i}(u)$ et qu'ils ont la même dimension (finie), on en déduit $\operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right) = C_{\lambda_i}(u)$.

Théorème 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et π_u son polynôme minimal. Si π_u est scindé de racines (pas forcément simples) deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, alors, pour $i \in [\![1,k]\!]$,

$$u_{C_{\lambda_i}(u)} = \lambda_i \mathrm{Id}_{C_{\lambda_i}(u)} + n_i,$$

où n_i est un endomorphisme nilpotent de $C_{\lambda_i}(u)$. De plus, dans une base $\mathcal{B}$ adaptée de E à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{k} C_{\lambda_i}(u)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m(\lambda_1)} + N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{m(\lambda_k)} + N_k \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, N_i est la matrice de n_i dans la base de $C_{\lambda_i}(u)$ extraite de la base $\mathcal{B}$.
Dans le cas matriciel, cet énoncé se résume à : toute matrice de polynôme minimal scindé est semblable à une matrice de la forme précédente.

Démonstration.

On suppose que $\pi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{p_i}$. Alors, comme $\pi_u(u) = 0$, d'après le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \operatorname{Ker}(\pi_u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right).$$

Pour $i = 1, \ldots, k$, on pose $F_i = \operatorname{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right)$. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Alors F_i est stable par u car u et le polynôme en u, $(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}$ commutent.
On note alors u_{F_i} l'endomorphisme induit par u sur F_i. On a, pour tout $x \in F_i$:

$$(u_{F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{p_i}(x) = (u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}(x) = 0_E$$

donc $(u_{F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{p_i} = 0 \in \mathcal{L}(F_i)$. Par suite $n_i = u_{F_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} \in \mathcal{L}(F_i)$ est nilpotent et on a

bien :
$$u_{F_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} + n_i.$$
$\square$

Exercice 27. *Projecteurs Spectraux*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que son polynôme minimal π_u est scindé de la forme $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{q_i}$.

— On note, pour $i \in [\![1, k]\!]$, $P_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k}(X-\lambda_j)^{q_j} = \dfrac{\pi_u}{(X-\lambda_i)^{q_i}}$.

— On note $p_1, ..., p_k$ les projecteurs associée à la somme directe des sous-espaces caractéristiques ; ceux-ci sont appelés *les projecteurs spectraux* de u.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe $U_i \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$U_i P_i \equiv 1 \bmod (X - \lambda_i)^{q_i}.$$
2. En déduire que $(U_i P_i)(u) = p_i$.
3. Avec un "bon" choix de chaque U_i, montrer que $\dfrac{1}{\pi_u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{U_i}{(X-\lambda_i)^{q_i}}$.

Application : On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer π_u puis effectuer la décomposition en éléments simple de $\frac{1}{\pi_u}$.
2. En déduire une expression des projecteurs spectraux de u comme sous forme de polynômes en u.

Correction.

1. Comme les λ_j sont distincts, P_i et $(X - \lambda_i)^{q_i}$ sont premiers entre eux. Par suite, d'après le théorème de Bézout, il existe $U_i, V_i \in \mathbb{K}[X]$ tels que :
$$U_i P_i + V_i (X - \lambda_i)^{q_i} = 1$$
Par suite,
$$U_i P_i \equiv 1 \bmod (X - \lambda_i)^{q_i}$$
2. On va utiliser le fait que, pour $p_1, ..., p_k \in \mathcal{L}(E)$ et $F_1, ..., F_k$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe :

   $p_1, ...p_k$ sont les projecteurs associés à $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ si, et seulement si,

— $\sum_{i=1}^k p_i = \mathrm{Id}_E$; $p_i \circ p_j = \mathbf{0}$ pour tous $i \neq j$ et,

— pour tout i, $\mathrm{Im}(p_i) = F_i$; $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} F_j$.

Allons-y :

— Pour tous $j \neq i$, on a $U_j P_j \equiv 0 \bmod (X-\lambda_i)^{q_i}$, donc

$$S = \sum_{j=1}^{k} U_j P_j \equiv 1 \bmod (X-\lambda_i)^{q_i}$$

D'où, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $(X-\lambda_i)^{q_i} | S-1$. Or les $(X-\lambda_i)^{q_i}$ sont premiers entre eux, donc leur produit, qui vaut π_u divise $S-1$ et ainsi :

$$\sum_{j=1}^{k} U_j P_j = S \equiv 1 \bmod \pi_u$$

Il en résulte qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{k} U_j P_j = 1 + \pi_u.Q$$

donc :

$$\sum_{j=1}^{k} (U_j P_j)(u) = \mathrm{Id}_E + \underbrace{\pi_u(u)}_{=\mathbf{0}} \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E$$

De plus, pour tous $i,j \in [\![1,k]\!]$ avec $i \neq j$, on a :

$$(U_i P_i)(U_j P_j) = U_i U_j R \pi_u \text{ où } R = \prod_{\substack{m=1 \\ m\notin\{i,j\}}}^{k} (X-\lambda_m)^{q_m}$$

Par suite,

$$(U_i P_i)(u) \circ (U_j P_j)(u) = (U_i U_j R)(u) \circ \underbrace{\pi_u(u)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

— Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Notons $f_i = (U_i P_i)(u)$. Rappelons que $C_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i}$ (proposition 41).

- Montrons $\mathrm{Im}(f_i) = C_{\lambda_i}(u)$ par double inclusion.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(f_i)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f_i(x)$. On a :

  $(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i}(y) = (u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i} \circ f_i(x) = ((X-\lambda_i)^{q_i} U_i P_i)(u)(x) = U_i(u) \circ \pi_u(u)(x) = 0_E$.

  D'où $y \in C_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f_i) \subset C_{\lambda_i}(u)$.
  Réciproquement, soit $x \in C_{\lambda_i}(u)$. Alors, comme pour tous $j \neq i$, $(X-\lambda_i)^{q_i}$ divise P_j et donc $U_j P_j$, on a :

  $$(U_j P_j)(u)(x) = 0_E \text{ car } x \in C_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{q_i}.$$

  Or, d'après ce qui précède, on a $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^k (U_j P_j)(u)$, donc :

  $$x = \sum_{j=1}^{k} (U_j P_j)(u)(x) = (U_i P_i)(u)(x) \in \mathrm{Im}(f_i)$$

  Ainsi $C_{\lambda_i}(u) \subset \mathrm{Im}(f_i)$.

- Montrons $\mathrm{Ker}(f_i) = \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} C_{\lambda_j}(u)$ par double inclusion.

  Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_i)$. Comme dans le point précédent, on a $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{k}(U_jP_j)(u)$ donc :

  $$x = \sum_{j=1}^{k}(U_jP_j)(u)(x) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(U_jP_j)(u)(x) \in \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} C_{\lambda_j}(u)$$

  car pour tous j, $\mathrm{Im}(f_j) \subset C_{\lambda_j}(u)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f_i) \subset \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} C_{\lambda_j}(u)$.

  Soit $j \in [\![1,k]\!]$ tel que $j \neq i$. Soit $x \in C_{\lambda_j}(u)$. On a $(X-\lambda_j)^{q_j}$ divise P_i et donc U_iP_i, d'où :

  $$(U_iP_i)(u)(x) = 0_E \text{ car } x \in C_{\lambda_j}(u) = \mathrm{Ker}(u-\lambda_j\mathrm{Id}_E)^{q_j}.$$

  Par suite, pour tous $j \in [\![1,k]\!]$, $C_{\lambda_j}(u) \subset \mathrm{Ker}(f_i)$ et ainsi, $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} C_{\lambda_j}(u) \subset \mathrm{Ker}(f_i)$.

Il en résulte, d'après la caractérisation des projecteurs associés à une somme directe, que, pour tous $i \in [\![1,k]\!]$,

$$(U_iP_i)(u) = p_i.$$

— On a montrer précédemment qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{k} U_jP_j = 1 + \pi_u.Q$$

Et comme $U_iP_i \equiv 1 \bmod (X-\lambda_i)^{q_i}$, quitte à prendre le reste de la division euclidienne de U_i par $X-\lambda_i)^{q_i}$, on peut supposer que $\deg(U_i) < q_i$.
Ainsi, on a :

$$\deg(\sum_{j=1}^{k} U_jP_j) \leq \max_{j=1,\dots,k}(\underbrace{\deg(U_j)}_{<q_j} + \underbrace{\deg(P_j)}_{=\deg(\pi_u)-q_j}) < \deg(\pi_u)$$

Ainsi, par comparaison des degré dans l'égalité précédente, on obtient $Q = 0$ et donc :

$$\sum_{j=1}^{k} U_jP_j = 1$$

Remarque : on aurait également pu obtenir cette relation et donc les bons U_i dès le début en utilisant le théorème de Bézout appliqué aux polynômes P_i qui sont premiers entre eux (dans leur ensemble mais pas deux à deux !

Ainsi, on obtient le résultat :

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{\sum_{i=1}^{k} U_iP_i}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{k} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{q_i}}$$

Application :

1. On a $\pi_u = (X-2)^2(X+1)$ et ainsi :

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{-\frac{1}{9}X + \frac{5}{9}}{(X-2)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{X+1}$$

2. En utilisant les notations de la partie précédente, on a $P_1 = (X-2)^2$, $P_2 = (X+1)$ puis, avec les calculs précédents, $U_1 = -\frac{1}{9}X + \frac{5}{9}$ et $U_2 = \frac{1}{9}$. Par suite, on obtient :

$$p_1 = (U_1P_1)(u) = \frac{1}{9}(-u + 5\mathrm{Id}_E) \circ (u - 2\mathrm{Id}_E)^2 \text{ et } p_2 = (U_2P_2)(u) = \frac{1}{9}(u + \mathrm{Id}_E)$$

Annexe
Matrices symétriques et théorème spectral

On énonce ici le théorème spectral que nous ne démontrerons que plus tard, dans le chapitre relatif aux endomorphismes des espaces euclidiens : cela nous permettra d'anticiper un peu quelques exercices où on doit voir "à l'oeil nu" la diagonalisabilité d'une matrice !

Théorème. Théorème spectral

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à **coefficients réels** et **symétrique** i.e. ${}^tA = A$.
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ orthogonale i.e. ${}^tP = P^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PD{}^tP.$$

Ainsi, en particulier, A est diagonalisable.

Remarque.

Attention ce résultat est faux pour les matrices à coefficients complexes.

Exercice 28.

Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction.

On sait que A est diagonalisable car A est symétrique à coefficients réels d'après le théorème spectral. Mais redémontrons le tout de même en déterminant les sous-espaces propres.

On remarque tout d'abord que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 6 dont le sous-espace propre $E_6(A)$ est donc de dimension au moins 1. De plus, les 2ème et 3ème colonnes A_2 et A_3 de A étant égale à la première A_1, le rang de A est égal à 1 et donc son noyau est de dimension 2 d'après le théorème du rang. Ainsi, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé $E_0(A)$ est de dimension 2 car il est égal au noyau de A. La somme des dimensions des sous-espaces propres étant inférieure à 3, on en déduit que $\dim(E_6(A)) = 1$ et donc $E_6(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Comme $\dim(E_6(A)) + \dim(E_0(A)) = 3$, alors A est diagonalisable. Il ne reste plus qu'à déterminer $E_0(A)$ en déterminant deux vecteurs qui l'engendrent (et si, qui plus est, ils sont orthogonaux, ça arrange nos affaires pour la suite !).

On remarque que $A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = A_2 - A_3 = 0_{3,1}$ et $A\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 2A_1 - A_2 - A_3 = 0_{3,1}$ et ainsi, $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Ces trois vecteurs propres formant une famille orthogonale de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire canonique), il suffit alors de les normer pour former une bon de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et ainsi produire une matrice de passage P qui est orthogonale. Ce qui nous donne au final :

$$A = PD^tP \text{ où } D = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

E&P

Exercices et problèmes

Problème 1. *Racines carrées d'une matrice*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note :

— $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A) = \{R \in M_n(\mathbb{K}) \mid R^2 = A\}$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$;

— $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid M$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})\}$.

1. *Quand on est diagonalisable.*
   (a) Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

   (b) Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Justifier rapidement, en s'appuyant sur la réponse à la question 1a, l'implication suivante : si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.
   Que dire de la réciproque ?

   (c) Déterminer une matrice **explicite** $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A)$ où
   $$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ telle que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.
2. *Quand on n'a pas de racine !*
   (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer : si $\det(A) < 0$, alors $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

   (b) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A)$ est vide et que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ ne l'est pas.

   (c) On suppose $n \geq 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice n. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) = \emptyset$.
3. *Quand $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ est infini.*
   Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ est infini dans chacun des cas suivants :

   (a) $n = 2$ et $A = I_2$.

   (b) $n = 2$ et $A = 0_2$.

   (c) $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ possède une valeur propre de multiplicité au moins 2.
4. *Quand $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ est fini.*
   (a) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Déterminer $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ et son cardinal pour $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

   (b) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = n$. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ est fini de cardinal à déterminer.
5. *Quand $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est topologique.*
   (a) i. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$.

ii. Montrer que $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(I_n)$ est compact dans $M_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si $n = 1$.

Application : Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur-multiplicative sur $M_n(\mathbb{K})$ i.e. telle que, pour tous $M, N \in M_n(\mathbb{K})$, $\|MN\| \geq \|M\|.\|N\|$

En général,

(b) *Intérieur de* $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\mathbb{K}[X_1, ..., X_k] = \left\{ \sum_{i=(i_1,...,i_k)\in\mathbb{N}^k} a_i X_1^{i_1} ... X_k^{i_k} \;\middle|\; (a_i)_{i\in\mathbb{N}^k} \text{ presque nulle} \right\}.$$

l'ensemble des polynômes à k indéterminées et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (par famille *presque nulle*, on entend famille dont les termes sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'indices). De plus, pour $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$, on pose :

$$\mathcal{Z}(P) = \{x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{K}^k \mid P(x) = P(x_1, ..., x_k) = 0\}.$$

où la même notation P désigne la fonction polynomiale de $\mathbb{K}^k$ dans $\mathbb{K}$ associée au polynôme P.

L'intérieur d'une partie X d'un espace vectoriel normé est notée $\mathring{X}$ dans la suite.

i. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ ="pour toutes parties infinies $I_1, .., I_k$ de $\mathbb{K}$ et tout $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$, si $I_1 \times ... \times I_k \subset \mathcal{Z}(P)$ alors $P = 0$". *Par $P = 0$, on entend que tous les coefficients de P sont nuls.*

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

En déduire que, pour $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$, si $P \neq 0$, alors l'intérieur $\mathring{\mathcal{Z}(P)}$ de $\mathcal{Z}(P)$ est vide.

ii. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'intérieur $\mathring{\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)}$ de $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est vide.

Correction.

On rappelle trois faits connus mais importants pour toute la suite :

i) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet, :
- — si $z_0 \neq 0$, exactement deux solutions $z = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ où r est le module de z_0 et θ un argument de z_0 ;
- — si $z_0 = 0$, une unique solution $z = 0$.

Dans toute la suite de cette correction, une solution de l'équation $z^2 = z_0$ dans $\mathbb{C}$ est appelée *une racine carrée* de z_0.

ii) pour tout $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)^2 = \mathrm{diag}(\alpha_1^2, ..., \alpha_n^2).$$

iii) Pour tous $M, P \in M_n(\mathbb{K})$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$(PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1}$$

1. *Quand on est diagonalisable.*

(a) Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Comme A est diagonalisable, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $r_i \in \mathbb{C}$ une racine carrée de λ_i (voire rappel i)) ; ainsi, on a, d'après le rappel ii) :

$$\mathrm{diag}(r_1, ..., r_n)^2 = \mathrm{diag}(r_1^2, ..., r_n^2) = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D.$$

D'où, en posant $R = P\mathrm{diag}(r_1, ..., r_n)P^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$, d'après le rappel iii) :

$$R^2 = P\mathrm{diag}(r_1, ..., r_n)^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Il en résulte que $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ et ainsi $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

(b) Comme dans la question précédente, on cherche une matrice diagonale D' telle que $D'^2 = D$ dont les coefficients diagonaux sont des racines carrées des éléments coefficients diagonaux de D. Or, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = x_0$ admet des solutions réelles si, et seulement si, $x_0 \geq 0$, donc, les λ_i étant positifs, on peut réitérer le raisonnement de la question précédente pour trouver R dans $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A)$.

La réciproque est vraie si $n = 1$ (toujours car l'équation $x^2 = x_0$ admet des solutions réelles si, et seulement si, $x_0 \geq 0$).
Si $n \geq 2$, la réciproque est fausse. En effet,

— si $n = 2$, on peut trouver un contre-exemple en pensant "rotation" : une rotation d'angle π est le carré d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. En terme matriciel :
la matrice $-I_2$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et la matrice $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $R_{\frac{\pi}{2}}^2 = -I_2$. Ainsi, $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(-I_2) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(-I_2) \not\subset \mathbb{R}_+$.

— si n est pair, on a $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(A) \not\subset \mathbb{R}_+$ pour :

$$A = -I_n \text{ et } R = \left(\begin{array}{c|c|c} R_{\frac{\pi}{2}} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & R_{\frac{\pi}{2}} \end{array}\right)$$

— si n est impair, on a $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(A) \not\subset \mathbb{R}_+$ pour :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -I_{n-1} \end{array}\right) \text{ et } R = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ \hline & R_{\frac{\pi}{2}} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & R_{\frac{\pi}{2}} \end{array}\right)$$

(c) On vérifie que A est diagonalisable (ici dans $M_n(\mathbb{R})$) et on applique la méthode de la question précédente dans ce cas précis. On trouve, avec les techniques usuelles, $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, en posant $R = P\mathrm{diag}(2, -2, 1)P^{-1} \in M_3(\mathbb{R})$ par exemple, on a, comme dans le raisonnement de la question précédente, $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A)$. Et après calculs, on trouve :

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(d) Notons $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ les valeurs propres distinctes de A. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples, et plus précisément :

$$\pi_A = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i).$$

Soit $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$. On remarque que $0_n = \pi_A(A) = \pi_A(R^2) = \prod_{i=1}^{k}(R^2 - \lambda_i)$ et donc, le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{k}(X^2 - \lambda_i)$ est annulateur de R.
De plus, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\lambda_i \neq 0$ et donc possède deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$ que l'on note r_i et s_i et ainsi, le polynôme Q est scindé à racines simples car :

$$Q = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)(X - s_i)$$

Il en résulte que R est diagonalisable par caractérisation de la diagonalisabilité en terme de polynômes annulateurs.

2. *Quand on n'a pas de racine !*

(a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Procédons par contraposée. On suppose $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$. Alors il existe $R \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = A$. Par suite, on a :

$$\det(A) = \det(R^2) = \det(R)^2 \geq 0.$$

(b) Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, on vérifie $\det(A) = -1 < 0$ donc $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ d'après la question précédente ; et on vérifie de plus que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ (de valeurs propres -1 et 1) ainsi, d'après la question 1a, $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.
On peut vérifier également par le calcul que :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-i & -2+2i \\ 1-i & -1+2i \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A).$$

(c) Supposons par l'absurde qu'il existe $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$. Alors $R^{2n} = (R^2)^n = A^n = 0_n$ donc R est nilpotente et notons $p \in \mathbb{N}^*$ son indice de nilpotence.
Alors, d'après le cours (Proposition 32) $p \leq n$. Or, comme $n \geq 2$, on a $2n - 2 \geq n \geq p$, donc :

$$0_n = R^{2n-2} = (R^2)^{n-1} = A^{n-1} \neq 0_n$$

Contradiction !
Il en résulte que $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) = \emptyset$.

3. *Quand $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est infini.*

(a) Considérons $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. On a $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}(I_2)$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = R^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$R = I_2 \text{ (cas } a + d > 0) \text{ ou } R = -I_2 \text{ (cas } a + d < 0)$$
$$\text{ou}$$
$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + bc = 1 \text{ (cas } a + d = 0).$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{K}$, en prenant $a = 1$, $b = x$ et $c = 0$, on a :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$$

donc $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est infini car les R_x sont tous différents.

(b) On pourrait procéder par équivalence comme précédemment mais, d'expérience, on sait que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$ donc, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $R_x = xN \in \mathcal{R}(0_2)$. Comme tous les R_x sont différents, $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(0_2)$ est infini.

(c) Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ telle que A possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de multiplicité au moins 2 (alors dans ce cas, $n \geq 2$). Comme A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_1, ..., \lambda_{n-2})$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$. On note $r \in \mathbb{C}$ une racine de λ et, pour $i \in [\![1, n-2]\!]$, r_i une racine de λ_i.

On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$R'_x = \begin{cases} r\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

et :

$$D'_x = \left(\begin{array}{c|ccc} R'_x & & 0_{1,n-2} & \\ \hline & r_1 & & \\ 0_{n-2,1} & & \ddots & \\ & & & r_{n-2} \end{array}\right)$$

Soit $x \in \mathbb{C}$. D'après les questions 3a et 3b, $R'^2_x = \lambda I_2$, d'où $D'^2_x = D$ et donc, pour $R_x = PD'_xP^{-1}$, on obtient $R_x^2 = A$.

Les R_x étant tous différents (car les D'_x le sont), $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$ est infini.

4. (a) Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. On spoose $M \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)$. Alors $MA = M^3 = AM$ donc A et M commutent. Ainsi, on a :

$$(\lambda_j m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = MA = AM = (\lambda_i m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Par suite, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $(\lambda_j - \lambda_i)m_{i,j} = 0$ d'où $m_{i,j} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$. D'où $M = \mathrm{diag}(m_{1,1}, ..., m_{n,n})$.
De plus,

$$\mathrm{diag}(m_{1,1}^2, ..., m_{n,n}^2) = M^2 = A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

d'où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,i}$ est une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de λ_i.
Ainsi, en notant, pour $i \in [\![1, n]\!]$, μ_i une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de λ_i, on obtient :

$$\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_i\mu_i & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n\mu_n \end{pmatrix} \middle| (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

Les λ_i étant tous différents, au plus l'un deux est nul. Or tout nombre complexe non nul admet exactement 2 racines carrées et 0 admet exactement une racine carrée donc :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(D)) = \begin{cases} 2^n & \text{si } \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) On suppose que A possède n valeurs propres non nulles et distinctes. Comme $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = n$ alors A est diagonalisable car la somme des sous-espaces propres est de dimension au moins n et donc n.
Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}^*$ les valeurs propres de A, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
Soit $R \in M_n(\mathbb{C})$. On note $D' = P^{-1}RP$. Ainsi, $R^2 = PD'^2P^{-1}$ et donc :

$$\begin{aligned} & R \in \mathcal{R}(A) \\ \Leftrightarrow\ & \\ & R^2 = A \\ \Leftrightarrow\ & \\ & D'^2 = D \\ \Leftrightarrow\ & \\ & D' \in \mathcal{R}(D) \end{aligned}$$

Par suite, si on note $c : M \mapsto PMP^{-1}$, on a :

$$\mathcal{R}(A) = c(\mathcal{R}(D))$$

Or, comme $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont deux à deux distinctes, d'après la question 4a, on a $\mathcal{R}(D) = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1\mu_1, ..., \varepsilon_n\mu_n) \mid (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n\}$ où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ μ_i est une racine carrée de λ_i et de plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{R}(D)) = 2^n$ si les λ_i sont non nuls ou 2^{n-1} sinon.
Ainsi, c étant un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(A)) = \begin{cases} 2^n & \text{si 0 n'est pas valeur propre de } A \\ 2^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. *Quand $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est topologique.*

(a) i. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $f : M \mapsto M^2$ de $M_n(\mathbb{K})$ dans lui-même est continue sur $M_n(\mathbb{K})$ comme composée de l'application linéaire $M \mapsto (M, M)$ et de l'application bilinéaire $(M, N) \mapsto MN$ toutes deux continues car $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Ainsi, $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A) = f^{-1}(\{A\})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$ comme image réciproque du fermé $\{A\}$ (car singleton) par l'application continue f.

ii. — Si $n = 1$, $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est fini (de cardinal 1 ou 2) donc compact dans $\mathbb{K}$.
Si $n \geq 2$, comme vu précédemment, pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$D'_x = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & x & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(I_n)$$

Or, on a $\|D'_x\|_\infty = |x| \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} +\infty$ pour la norme définie par $\|(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n}(|m_{i,j}|)$ donc $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(I_n)$ n'est pas borné et donc n'est pas compact.

iii. Supposons par l'absurde qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $M, N \in M_n(\mathbb{K})$, $\|MN\| \geq \|M\|.\|N\|$. Comme $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(I_n)$ n'est pas compact, il existe une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{R}(I_n)$ telle que $\|R_k\| \geq k$.
Par suite, pour $M = R_k = N$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|I_n\| = \|MN\| \geq \|M\|.\|N\| = \|R_k\|^2 = k^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

Contradiction !
Par suite, une telle norme n'existe pas.

(b) i. — On procède par réccurence sur $\mathbb{N}^*$.

- Initialisation. Soit I une partie infinie de $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $I \subset \mathcal{Z}(P)$, alors le polynôme P à **une** indéterminée possède une infinité de racines dans $\mathbb{K}$ et donc est le polynôme nul.
Par suite, $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie.
Soit $I_1, ..., I_{k+1}$ des parties infinies de $\mathbb{K}$ et $P = \sum_{i=(i_1,...,i_k)\in\mathbb{N}^{k+1}} a_i X_1^{i_1}...X_{k+1}^{i_{k+1}} \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_{k+1}]$. On suppose $I_1 \times ... \times I_{k+1} \subset \mathcal{Z}(P)$.
On remarque que, pour tout $x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{K}^{k+1}$:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_j(x_1, .., x_k) x_{k+1}^j.$$

où $P_j = \displaystyle\sum_{i=(i_1,...,i_k)\in\mathbb{N}^k} a_{(i,j)} X_1^{i_1}...X_k^{i_k} \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$ pour $j \in \mathbb{N}$.
Soit $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{K}^p$. On note, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$b_j = P_j(x_1, .., x_k) \in \mathbb{K}.$$

Comme la famille $(a_{(i,j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}^k\times\mathbb{N}}$ est presque nulle, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^k$ et pour tout $j \geq N$, $a_{(i,j)} = 0$ et donc $b_j = 0$.
Par suite, on peut considérer le polynôme de $\mathbb{K}[X]$:

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j X^j$$

qui vérifie donc, pour tout $x = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathbb{K}^{k+1}$:

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x_{k+1}^j = \sum_{j=0}^{+\infty} P_j(x_1, .., x_k) x_{k+1}^j = P(x).$$

Soit $(x_1, ..., x_k) \in I_1 \times ... \times I_k$. Pour tout $\lambda \in I_{k+1}$, on a, comme $(x_1, .., x_k, \lambda) \in I_1 \times ... \times I_{k+1} \subset \mathcal{Z}(P)$:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \lambda^j = P(x_1, .., x_k, \lambda) = 0.$$

Or, I_{k+1} est infini donc le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ admet une infinité de racines, d'où $Q = 0$ et donc la famille $(b_j = P(x_1, ..., x_k))_{j\in\mathbb{N}}$ est nulle.

Ceci étant vrai pour tout $(x_1, ..., x_k) \in I_1 \times ... \times I_k$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $I_1 \times ... \times I_k \subset \mathcal{Z}(P_j)$ et donc, comme $P_j \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$, par hypothèse de récurrence, $P_j = 0$ i.e. $(a_{(i',j)})_{i' \in \mathbb{N}^k}$ est nulle.

Il en résulte que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^{k+1}} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_{(i',j)})_{i' \in \mathbb{N}^k}$ est la famille nulle et donc $P = 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_k]$. Procédons par contraposée. On suppose que $\mathring{\mathcal{Z}}(P) \neq 0$.
On munit $\mathbb{K}^p$ de la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$. Alors il existe $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathcal{Z}(P)$ et $r > 0$ tel que $\prod_{i=1}^k = \mathcal{D}(x_i, r) = B(x, r) \subset \mathcal{Z}(P)$ où $\mathcal{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < R\}$.
Or, comme $r > 0$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathcal{D}(x_i, r)$ est une partie infinie de $\mathbb{K}$; par suite, d'après $\mathcal{P}_k$, $P = 0$.

ii. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. Alors on a $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ si, et seulement si, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$a_{i,j} - \sum_{k=1}^n r_{i,k} r_{k,j} = 0$$

On identifie $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{n^2}$. On considère alors, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, le polynôme $P_{i,j} \in \mathbb{K}[X_{1,1}, ..., X_{n,n}]$ défini par :

$$P_{i,j}(X_{1,1}, .., X_{n,n}) = a_{i,j} - \sum_{k=1}^n X_{i,k} X_{k,j}.$$

Et on obtient ainsi :

$$\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A) = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} \mathcal{Z}(P_{i,j}).$$

D'après la question précédente, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{Z}(P_{i,j})$ est d'intérieur vide et ainsi, comme l'intérieur d'une intersection est incluse dans l'intersection des intérieurs, $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}(A)$ est d'intérieur vide.