

Chapitre VI

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Table des matières

Partie A : Rappels et compléments d'algèbre linéaire	2
1. Somme finie de sous-espaces vectoriels	2
2. Matrices semblables	9
3. Sous-espaces stables et endomorphismes induits	10
Partie B : Éléments propres	14
1. Éléments propres d'un endomorphisme	14
2. Propriétés des sous-espaces propres	20
3. Éléments propres d'une matrice carrée	23
Partie C : Polynôme caractéristique	27
1. Polynôme caractéristique	27

Dans ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On se limitera dans les manipulations au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie A

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

1. Somme finie de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, on généralise la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels vue en Sup' au cas d'un nombre fini de sous-espaces.

Définition 1. *Somme finie de sous-espaces vectoriels*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme de** $F_1, \dots, F_m$ et on note $F_1 + \dots + F_m$ ou encore $\sum_{i=1}^m F_i$, le sous-ensemble de E :

$$\sum_{i=1}^m F_i = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i \mid \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, x_i \in F_i \right\}.$$

Proposition 1.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\sum_{i=1}^m F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^m F_i \right).$$

En particulier, $\sum_{i=1}^m F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

On pose $F = \sum_{i=1}^m F_i$ et $U = \bigcup_{i=1}^m F_i$.

Montrons tout d'abord que F est un sous-espace vectoriel de E :

On a $F \subset E$ car pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et pour tout $x_i \in F_i \subset E$, E étant stable par combinaisons linéaires, $x_1 + \dots + x_m \in E$.

— On a $0_E = \sum_{i=1}^m \underbrace{0_E}_{\in F_i} \in F$ car pour chaque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, F_i est un sous-espace vectoriel de E et donc contient 0_E .

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x = x_1 + \dots + x_n, y = y_1 + \dots + y_n \in F$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$x_i, y_i \in F_i$. On a :

$$\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\lambda x_i + \mu y_i)}_{\in F_i} \in F$$

car pour chaque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, F_i est un sous-espace vectoriel de E et donc est stable par combinaisons linéaires.

Par suite, F est un sous-espace vectoriel de E . *On pouvait également montrer que F est un sous-espace de E comme l'image directe du sous-espace vectoriel $F_1 \times \dots \times F_m$ de E^m par l'application linéaire $f : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 + \dots + x_m$ de E^m dans E .*

Montrons que $F = \text{Vect}(U)$. Soit $x \in U$. Alors il existe $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $x \in F_j$. Pour chaque

$i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $y_i = \begin{cases} 0_E & \text{si } i \neq j \\ x & \text{si } i = j \end{cases}$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $y_i \in F_i$ et donc

$$x = \sum_{i=1}^m y_i \in F$$

Par suite, $U \subset F$.

Maintenant, soit G un sous-espace vectoriel de E contenant U . Soit $x = x_1 + \dots + x_m \in F$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in F_i$. Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in U \subset G$ et G est stable par combinaisons linéaires, $x \in G$. Par suite, $F \subset G$.

Ainsi, F est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant U i.e. $F = \text{Vect}(U)$. $\square$

Corollaire 1.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E . Si pour chaque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\mathcal{F}_i$ est une famille génératrice de F_i , alors la famille $\mathcal{F}$ obtenue en concaténant (i.e. en mettant bout-à-bout) les familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$, est une famille génératrice de la somme $F_1 + \dots + F_m$.

Démonstration.

Comme tout élément de $\mathcal{F}$ appartient à $U = \bigcup_{i=1}^m F_i$, on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(U) = F_1 + \dots + F_m$. Pour l'inclusion réciproque, on remarque que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, tout élément de F_i est combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{F}_i$ et donc de la famille $\mathcal{F}$. Par suite, $U \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$ qui est un sous-espace vectoriel de E . Or $\text{Vect}(U)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant U donc $F_1 + \dots + F_m = \text{Vect}(U) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Par suite, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de la somme. $\square$

Définition 2. Sous-espaces vectoriels en somme directe

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que $F_1, \dots, F_m$ sont en **somme directe** si, pour tout $y \in \sum_{i=1}^m F_i$:

il existe un **unique** m -uplet $(x_1, \dots, x_m) \in F_1 \times \dots \times F_m$ tel que $y = x_1 + \dots + x_m$;

autrement dit, y se décompose de manière unique sous la forme $y = x_1 + \dots + x_m$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in F_i$.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^m F_i$ est appelée **somme directe** de $F_1, \dots, F_m$ et on note $\bigoplus_{i=1}^m F_i = \sum_{i=1}^m F_i$ ou encore $F_1 \oplus \dots \oplus F_m = \sum_{i=1}^m F_i$.

Proposition 2.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe ;
- ii) pour tout $y = x_1 + \dots + x_m \in \sum_{i=1}^m F_i$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in F_i$:
 $y = 0_E$ implique, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i = 0_E$.
- iii) pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m F_j \right) \cap F_i = \{0_E\}$.
- iv) pour tout $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$, $(F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ ii) On suppose i). Soit $y = x_1 + \dots + x_m \in \sum_{i=1}^m F_i$ avec, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in F_i$. On suppose $y = 0_E$. Comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E et donc contiennent 0_E , celui-ci admet la décomposition $y = 0_E = \sum_{i=1}^m \underbrace{0_E}_{\in F_i}$ dans la somme $F_1 + \dots + F_m$. La somme étant directe, par unicité de la décomposition de y dans la somme, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i = 0_E$.

ii) $\Rightarrow$ iii) On suppose ii). Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On pose $F = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m F_j$. Soit $x \in F \cap F_i$. Comme $x \in F$, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $j \neq i$, il existe $x_j \in F_j$ tels que $x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m x_j$. On pose $x_i = -x \in F_i$. Alors on a :

$$\sum_{j=1}^m x_j = x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m x_j = -x + x = 0_E$$

Ainsi, par hypothèse, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_j = 0_E$. En particulier, on a $x = -x_i = -0_E = 0_E$.

Par suite, $F \cap F_i = \{0_E\}$.

iii) $\Rightarrow$ iv) On suppose iii). Soit $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$. Alors $F_1 + \dots + F_{i-1} \subset F = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m F_j$ et donc $(F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i \subset F \cap F_i = \{0_E\}$. Par suite, $(F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$.

iv) $\Rightarrow$ i) On suppose iv). Soit $y \in \sum_{i=1}^m F_i$ et $y = x_1 + \dots + x_m$, $y = x'_1 + \dots + x'_m$ des décompositions de z dans la somme $\sum_{i=1}^m F_i$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i, x'_i \in F_i$.
On a $0_E = y - y = \sum_{i=1}^m (x_i - x'_i)$ donc, les F_i étant des sous-espaces vectoriels de E et ainsi étant stables par combinaisons linéaires, $x'_m - x_m \in F_m$ et

$$x'_m - x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \underbrace{(x_i - x'_i)}_{F_i} \in F_1 + \dots + F_{m-1}$$

Donc $x'_m - x_m \in (F_1 + \dots + F_{m-1}) \cap F_m = \{0_E\}$ par hypothèse. Par suite $x'_m = x_m$.
On réitère le même raisonnement de proche en proche pour $i = m-1, \dots, 2$ pour obtenir $x'_i = x_i$. Puis pour $i = 1$, on arrive alors à $x_1 - x'_1 = 0_E$ d'où $x'_1 = x_1$.
Il en résulte que la décomposition de y dans la somme $F_1 + \dots + F_m$ est unique. $\square$

Exemple 1.

- Dans $\mathbb{R}[X]$, les sous-espaces $F_i = \text{Vect}(X^i)$ pour $i = 0, \dots, m \in \mathbb{N}^*$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=0}^m F_i = \mathbb{R}_m[X].$$

- On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour $I \subset \mathbb{R}$, on note $F_I = \{f \in E \mid \forall x \notin I, f(x) = 0\}$
exercice : montrer que F_I est un sous-espace vectoriel de E . Alors les sous-espaces vectoriels $F_{]-\infty, 0]}$, $F_{[1, 8]}$, et $F_{[33, 100]}$ sont en somme directe et

$$F_{]-\infty, 0]} \oplus F_{[1, 8]} \oplus F_{[33, 100]} = F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8] \cup [33, 100]}.$$

On a $F_{]-\infty, 0]} \cap F_{[1, 8]} = \{0\}$ car si une fonction f appartient à cette intersection, elle est nulle en dehors de $]-\infty, 0]$ et en dehors de $[1, 8]$ qui sont des intervalles disjoints.

De plus, on a $F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]} = F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8]}$.

En effet, si $f = f_1 + f_2 \in F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]}$, alors, pour tout $x \notin]-\infty, 0] \cup [1, 8]$, $f(x) = 0$ car $x \notin]-\infty, 0]$, d'où $f_1(x) = 0$ et $x \notin [1, 8]$, d'où $f_2(x) = 0$. Ainsi, $F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]} \subset F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8]}$.

Et si $f \in F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8]}$, on pose :

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [1, 8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $f_1 \in F_{]-\infty, 0]}$ et $f_2 \in F_{[1, 8]}$ et $]-\infty, 0]$ et $[1, 8]$ étant disjoints, $f = f_1 + f_2 \in F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]}$. Ainsi $F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8]} \subset F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]}$.

Maintenant, comme $]-\infty, 0] \cup [1, 8]$ et $[33, 100]$ sont disjoints, comme précédemment, on a :

$$(F_{]-\infty, 0]} + F_{[1, 8]}) \cap F_{[33, 100]} = F_{]-\infty, 0] \cup [1, 8]} \cap F_{[33, 100]} = \{0\}$$

Il en résulte que $F_{]-\infty, 0]}$, $F_{[1, 8]}$, et $F_{[33, 100]}$ sont en somme directe.

Exercice 1.

On note :

- $S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$ (ensemble des matrices symétriques) et
- $A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$ (ensemble des matrices antisymétriques).

Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$, $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ sont en somme directe et déterminer leur somme.

Correction.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On pose $F_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, $F_2 = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$, $F_3 = \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

Soit $x = x_1 + x_2 + x_3 \in F_1 + F_2 + F_3$ avec $x_i \in F_i$. Alors on a :

$$f(x_1) = x_1; \quad f(x_2) = -2x_2 \quad \text{et} \quad f(x_3) = -x_3.$$

et donc,

$$f^2(x_1) = x_1; \quad f^2(x_2) = 4x_2 \quad \text{et} \quad f^2(x_3) = x_3.$$

Supposons $x = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, par linéarité de f , $f(x) = 0_E = f^2(x)$. Par suite, on a le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0_E \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0_E \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0_E \end{cases}$$

On le résout pour trouver $x_1 = x_2 = x_3 = 0_E$. Par suite, les sous-espaces sont en somme directe. *On peut remarquer qu'on n'a jamais utilisé la matrice M ... nous y verrons plus clair dans la suite du chapitre !*

Remarque 1.

Attention ! On peut montrer que si $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe, alors, pour tous $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$. Mais **la réciproque est fautive** comme on peut s'en apercevoir dans l'exercice suivant :

Exercice 3.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$.

1. Déterminer $F + G + H$.

2. (a) Déterminer les intersections deux à deux entre F , G et H .
 (b) La somme $F + G + H$ est-elle directe ?
 (c) Que dire de la dernière affirmation de la remarque précédente.
3. Montrer la première affirmation de la remarque i.e. si $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Correction.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(1, 1) \in F + G + H$$

donc $\mathbb{R}^2 \subset F + G + H$. L'inclusion réciproque est vraie car $F + G + H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Par suite, $F + G + H = \mathbb{R}^2$.

2. (a) Si $u \in F \cap G$, alors il existe $\lambda, v \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, 0)$ et $u = (0, v)$ d'où $\lambda = 0$ et $v = 0$. Par suite $u = (0, 0)$. Ainsi, $F \cap G = \{(0, 0)\}$.
 Par des raisonnements similaires, on trouve $G \cap H = \{(0, 0)\} = H \cap F$.
- (b) La somme $F + G + H$ n'est pas directe car $(1, 1)$ admet dans $F + G + H$ les décompositions $(1, 1) = 0(1, 0) + 0(0, 1) + 1(1, 1)$ et $(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1) + 0(1, 1)$ qui sont différentes.
- (c) Les intersections deux à deux des facteurs de la somme sont toutes réduites à 0_E mais la somme n'est pas directe. La réciproque de l'implication énoncée dans la remarque précédente est donc fausse, comme annoncé !
3. On suppose $F_1, \dots, F_m$ en somme directe. Soit $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $i \neq j$. Quitte à les échanger, on peut supposer $j < i$. D'après le iv) de la proposition 2, on a $(F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$. Or, comme $j < i$, on a $F_j \subset F_1 + \dots + F_{i-1}$ donc $F_j \cap F_i \subset (F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$, d'où $F_j \cap F_i = \{0_E\}$.

Grâce à l'unicité de la décomposition dans une somme directe, on peut définir les applications qui, à un vecteur de la somme, associent chaque composante de sa décomposition :

Définition 3. Projecteurs associés à une somme directe

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe tels que $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$.

On appelle **projecteurs associés à la décomposition en somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ les applications $p_1, \dots, p_m$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\text{pour } x = x_1 + \dots + x_m \in E \text{ avec, pour tout } j \in \llbracket 1, m \rrbracket, x_j \in F_j, \\ p_i(x) = x_i.$$

Proposition 3.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$

et $p_1, \dots, p_m$ les projecteurs associés. Alors :

- pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, p_i est un projecteur ; plus précisément, p_i est la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m F_j$.
- $p_1 + \dots + p_m = \text{Id}_E$ et, pour tout $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Proposition 4.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E . On a :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^m F_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(F_i).$$

Et il y a égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Démonstration.

On considère l'application linéaire f de $F_1 \times \dots \times F_m$ dans $F_1 + \dots + F_m$ tel que $f : (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 + \dots + x_m$.

Par définition de la somme, f est surjective, donc :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^m F_i \right) \leq \dim(F_1 \times \dots \times F_m) = \sum_{i=1}^m \dim(F_i).$$

De plus, comme f est surjective, il y a égalité si, et seulement si, f est injective d'après le théorème du rang (on est bien en dimension finie ici, car cet énoncé n'a aucun intérêt en dimension infinie!).

Or, f étant linéaire, f est injective si, et seulement si, pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in F_1 \times \dots \times F_m$, $x_1 + \dots + x_m = f(x) = 0_E$ implique $x = (0_E, \dots, 0_E)$ i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i = 0_E$; d'après la proposition 2, ceci est équivalent à $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe.

□

Définition-Proposition 4. Base adaptée à une somme directe

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe.

Si, pour chaque $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i , alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant (i.e. en mettant bout-à-bout) les bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$, est une base $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

Une telle base $\mathcal{B}$ est appelée **base adaptée à la somme directe** $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note $(e_{i,j})_{j \in J_i}$ la base $\mathcal{B}_i$ de F_i . On note $I = \bigcup_{i=1}^m (\{i\} \times J_i)$ et on a :

$$\mathcal{B} = (e_{i,j})_{(i,j) \in I}.$$

- Liberté : Soit $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de scalaires presque tous nuls. On suppose $\sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E$. Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note $x_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \in F_i$. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} = 0_E.$$

Les F_i étant en somme directe, on obtient, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} = x_i = 0_E$; or, $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{j \in J_i}$ est une base de F_i et donc une famille libre, donc, pour tout $j \in J_i$, $\lambda_{i,j} = 0$.

Ainsi, pour tout $(i,j) \in I$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où $\mathcal{B}$ est une famille libre.

- Génération : Soit $x \in F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe $x_i \in F_i$ tels que $x = x_1 + \dots + x_m$. Or, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, comme $\mathcal{B}_i = (e_{i,j})_{j \in J_i}$ est une base de F_i , il existe une famille $(\lambda_{i,j})_{j \in J_i}$ une famille de scalaires presque tous nuls telle que :

$$x_i = \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}.$$

Par suite, la famille $(\lambda_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est une famille de scalaires presque tous nuls comme concaténation de m familles de scalaires presque tous nuls et on a :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_{i,j} \\ x &= \sum_{(i,j) \in I} \lambda_{i,j} e_{i,j} \end{aligned}$$

d'où x est combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{B}$.

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$.

Il en résulte que $\mathcal{B}$ est une base de $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ comme famille libre et génératrice de $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. □

2. Matrices semblables

a. Matrices équivalentes

Définition 5. Matrices équivalentes

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = Q^{-1}AP.$$

Exercice 4.

Montrer que la relation "être équivalentes" est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(A) = r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ si, et seulement si, A est équivalente à la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

b. Matrices semblables**Définition 6.** Matrices semblables

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 2.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. Alors M et M' sont semblables ; en effet, on a

$$M' = P^{-1}MP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Remarque 2.

- Deux matrices A et B qui sont semblables ont le même déterminant.
- Deux matrices A et B qui sont semblables ont la même trace. En vertu de cette remarque et de l'exemple ci-dessus, cela permet de définir la trace d'un endomorphisme : la trace d'un endomorphisme est la trace d'une matrice de cet endomorphisme dans une base quelconque.

3. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Définition 7. Sous-espace stable

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$, i.e. pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Exemple 3.

- Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E .
- Une homothétie (i.e. λId_E où $\lambda \in \mathbb{K}$) stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E .
- Une intersection ou une somme de sous-espaces stables par un endomorphisme u est un sous-espace stable par u .

Exercice 5.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. En déduire que les seuls endomorphismes qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Correction.

1. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Alors, pour tout $x \neq 0_E$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Montrons que, pour tous $x, y \in E$ non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$.
 - 1er cas : x et y sont colinéaires. Alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu y$, d'où :

$$\lambda_x x = u(x) = \mu u(y) = \mu \lambda_y y = \lambda_y x;$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$.

- 2nd cas : (x, y) est libre. Alors on a

$$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par suite,

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E,$$

or (x, y) est libre donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$. Et donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Il en résulte qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$ (cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0_E$). Ainsi $u = \lambda \text{Id}_E$ est une homothétie.

2. Une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels. Réciproquement, si u est un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels, alors, pour tout $x \in E$, u stabilise $\mathbb{K}x = \text{Vect}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathbb{K}x$ i.e. $(x, u(x))$ est liée. Par suite, d'après la question précédente, u est une homothétie.

Proposition 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de F et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par u si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose F stable par u . Alors pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$, donc en particulier, comme chaque $e_i \in F$ pour $i \in I$, $u(e_i) \in F$.
- $(\Leftarrow)$. On suppose que pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$. Soit $x \in F$. Comme $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice, alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque tous nuls telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. Par suite, on a :

$$u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{u(e_i)}_{\in F},$$

donc, comme F est un sous-espace vectoriel, $u(x) \in F$. Il en résulte que F est stable par u . □

Remarque 3.

Pour $x \in E$, $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E . D'après la proposition précédente, ce sous-espace est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 7.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$, alors $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont stables par u .

Démonstration.

On suppose que u et v commutent.

- Soit $x \in \text{Ker}(v)$. Montrons que $u(x) \in \text{Ker}(v)$. On a :

$$v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$$

car $v \circ u = u \circ v$ et u est linéaire. Par suite, $\text{Ker}(v)$ est stable par u .

- Soit $v(x) \in \text{Im}(v)$ où $x \in E$. Montrons que $u(v(x)) \in \text{Im}(v)$. On a :

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) \in \text{Im}(v)$$

car $u \circ v = v \circ u$ et $u(x) \in E$. Par suite $\text{Im}(v)$ est stable par u . □

Définition 8. Endomorphisme induit

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme u de E . On appelle **endomorphisme induit par u sur F** et l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par $u_F = u|_F$ i.e. pour tout $x \in F$

$$u_F(x) = u(x)$$

Proposition 8.

On suppose E de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base adaptée** à F i.e. $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de F .

Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par bloc, i.e.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

avec $A \in M_p(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$ de l'endomorphisme induit u_F par u sur F .

Démonstration.

On note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors on a, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_i) = \sum_{j=1}^n m_{ij} e_j$. On note : $A = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$, $B = (m_{ij})_{1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq n}$, $C = (m_{ij})_{p+1 \leq i, j \leq n}$ et $D = (m_{ij})_{1 \leq j \leq p, p+1 \leq i \leq n}$.

On remarque que $(e_1, \dots, e_p)$ est en particulier une famille génératrice de F .

Ainsi,

F est stable par u

si, et seulement si,

pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i \in F$

si, et seulement si,

pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $m_{ij} = 0$

si, et seulement si,

$$D = (0)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ p+1 \leq i \leq n}}$$

si, et seulement si,

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

□

Partie B

Éléments propres

1. Éléments propres d'un endomorphisme

a. Définitions

Définition 9. *Valeur/vecteur propre d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \in E$ **non nul** tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre de u associé à λ** si :

$$x \neq 0_E \quad \text{et} \quad u(x) = \lambda x.$$

Proposition 9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$.

— Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ - autrement dit, si, et seulement si, $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

— Le vecteur x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $u(x)$ est colinéaire à x .

Démonstration.

•

λ est une valeur propre de u

si, et seulement si,

il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$

si, et seulement si,

il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u - \lambda \text{Id}_E(x) = 0_E$

si, et seulement si,

il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)(x)$

si, et seulement si,

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)(x) \neq \{0_E\}.$$

•

x est un vecteur propre de u

si, et seulement si,

il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$

si, et seulement si,

$u(x)$ et x sont colinéaires.

□

Exercice 6.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f : (x, y, z) \rightarrow (2y, 2x, 2z)$. Montrer que $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont des vecteurs propres de f . À quelle valeur propre chacun d'entre eux est-il associé ?

Démonstration.

On a :

$$f(1, 1, 0) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 1(0, 0, 1)$$

$$f(1, -1, 0) = (-2, 2, 0) = (-2)(1, -1, 0)$$

Donc $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 et $(1, -1, 0)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 . □

Définition 10. Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u , on appelle **sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ** le sous-espace vectoriel de E noté $E_\lambda(u)$ et défini par :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Autrement dit, $E_\lambda(u)$ est l'ensemble contenant 0_E et l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ .

Définition 11. Spectre d'un endomorphisme

On suppose que E est de **dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u i.e.

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = \lambda x\}.$$

Remarque 4.

- le vecteur nul 0_E n'est JAMAIS un vecteur propre ! Par contre, il appartient à tout sous-espace propre.
- 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injectif. Dans ce cas, on a :

$$E_0(u) = \text{Ker}(u)$$

Exercice 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ est une valeur propre de u .

1. On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer que $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$.
2. On suppose u bijectif. Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1} . Que dire de $E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$?

Correction.

1. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u ,

$$x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \text{Im}(u).$$

Par suite, $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$.

2. Comme $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, 0 n'est pas valeur propre de u . Par suite, $\lambda \neq 0$.

Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u^{-1} , $x = u^{-1}(u(x)) = \lambda u^{-1}(x)$. Par suite, on a :

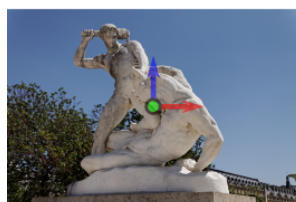
$$u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x,$$

Or, λ étant valeur propre de u , il existe $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ et donc, d'après ce qui précède, $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1} et x est un vecteur propre de u^{-1} associé à $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E_\lambda(u) \subset E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$. Et réciproquement, si $x \in E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$, par un raisonnement similaire, on obtient $u(x) = \lambda x$. Il en résulte que

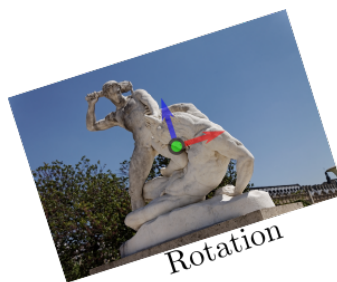
$$E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}) = E_\lambda(u).$$

b. Exemples

On applique les transformations suivantes à la première image. Déterminons les valeurs propres et leurs directions propres associées pour chacune des transformations. Une direction propre correspond à une direction qui reste inchangée après transformation et une valeur propre correspond à l'échelle de la modification (en tenant compte du changement de sens grâce au signe) après transformation dans la direction propre qui lui est associée.



Symétrie



Dilatation

Exemple 4.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors l'homothétie λId_E admet λ pour unique valeur propre et $E_\lambda(\lambda \text{Id}_E) = E$.
- Une rotation non triviale (i.e. d'angle différent d'un multiple de π) dans le plan euclidien n'admet pas de valeur propre.
- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non trivial de E i.e. $p^2 = p$ et $p \neq 0, \text{Id}_E$. Alors p admet pour valeurs propres 0 et 1 et on a :

$$E_0(p) = \text{Ker}(p) \quad \text{et} \quad E_1(p) = \text{Im}(p)$$

Si λ est une valeur propre de p , alors pour x un vecteur propre de p associé à λ , on a :

$$\lambda^2 x = p^2(x) = p(x) = \lambda x.$$

Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Montrons que 0 et 1 sont bien valeurs propres de p :

- Comme $p \neq \mathbf{0}$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq 0_E$. Ainsi, pour $y = p(x) \neq 0_E$, on a :

$$p(y) = p(p(x)) = p(x) = y = 1.y \quad \text{car } p^2 = p$$

Donc, y étant un vecteur non nul, 1 est bien valeur propre de p .

- Comme $p \neq \text{Id}_E$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq x$. Ainsi, pour $y = p(x) - x \neq 0_E$, on a, par linéarité de p :

$$p(y) = p(p(x)) - p(x) = 0_E = 0.y \quad \text{car } p^2 = p$$

Donc, y étant un vecteur non nul, 0 est bien valeur propre de p .

Déterminons désormais les sous-espaces propres associés à 0 et 1 :

- $\lambda = 0$. Pour tout endomorphisme qui admet 0 pour valeur propre, le sous-espace propre associé à 0 est égal à son noyau, donc $E_0(p) = \text{Ker}(p)$.
- $\lambda = 1$. Pour tout endomorphisme u qui admet $\lambda \neq 0$ pour valeur propre, $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$. Par suite, $E_1(p) \subset \text{Im}(p)$.

Réciproquement, pour $y = p(x) \in \text{Im}(p)$ avec $x \in E$, on a :

$$p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y.$$

d'où $y \in E_1(p)$.

Par suite, $\text{Im}(p) \subset E_1(p)$.

Il en résulte que $E_1(p) = \text{Im}(p)$.

- Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires non triviaux. La symétrie s par rapport à F parallèlement à G admet pour valeur propre 1 et -1 et on a :

$$E_1(s) = F \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = G$$

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Alors on a $s = 2p - \text{Id}_E$, donc, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$s(x) = \lambda x \Leftrightarrow p(x) = \frac{1 + \lambda}{2} x.$$

Par suite, comme p est non trivial, d'après l'exemple précédent, s admet 1 et -1 pour valeurs propres et

$$E_1(s) = E_1(p) = \text{Ker}(p) = F$$

et

$$E_{-1}(s) = E_0(p) = \text{Im}(p) = G.$$

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f : (x, y) \mapsto (2x, x + y)$. Alors $\text{Sp}(f) = \{2, 1\}$; et $E_2(f) = \text{Vect}((1, 1))$ et $E_1(f) = \text{Vect}((0, 1))$.

On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$(*) f(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = & \lambda x \\ x + y & = & \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x & = & 0 \\ x + (1 - \lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

1er cas : $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 1$. Alors $(*)$ est équivalent à

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

Donc, dans ce cas, $(x, y) = (0, 0)$ est la seule solution de $f(x, y) = \lambda(x, y)$ donc λ n'est pas valeur propre de f .

2eme cas : $\lambda = 2$. Alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = & 0 \end{cases}$$

Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x, y) = 2(x, y)$ est $\{(x, y) \mid x - y = 0\} = \text{Vect}((1, 1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 2$ est valeur propre de f et $E_2(f) = \text{Vect}((1, 1))$.

3eme cas : $\lambda = 1$. Alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \end{cases}$$

Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x, y) = (x, y)$ est $\{(x, y) \mid x = 0\} = \text{Vect}((0, 1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 1$ est valeur propre de f et $E_1(f) = \text{Vect}((0, 1))$.

- Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ tel que $D : f \mapsto f'$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre et $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on a $f \in \text{Ker}(D - \lambda \text{Id}_E)$ si, et seulement si, $f' - \lambda f = 0$, c'est à dire, f est solution de l'équation différentielle homogène $y' - \lambda y = 0$. Cette équation a pour ensemble de solution $\{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$; donc λ est une valeur propre de D et on a :

$$E_\lambda(D) = \{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.f$$

où f est le vecteur propre de D associé à λ défini par $f : x \mapsto e^{\lambda x}$.

Exercice 8.

Ques dire des valeurs propres...

1. de l'endomorphisme nul 0 ? de l'identité Id_E ?
2. d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$?
3. de l'application $\Delta : P \rightarrow P'$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même ?

Correction.

1. Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $0_E = 0(x) = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 0$, donc λ est la seule valeur propre de 0 et $E_0(0) = E$.
Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $x \text{Id}_E = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 1$, donc λ est la seule valeur propre de Id_E et $E_1(\text{Id}_E) = E$.
2. Une rotation de $\mathbb{R}^3$ (d'angle différent d'un multiple de π) n'admet qu'une seule valeur propre. Il s'agit de la valeur propre 1 dont le sous-espace propre associé est l'axe de la rotation.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P' = \lambda P$ implique $\deg(P) = \deg(P') = \deg(P) - 1$. Ainsi $P = 0$ est la seule solution de $P = \lambda P'$, donc si $\lambda \neq 0$, λ n'est pas une valeur propre de Δ .
Pour $\lambda = 0$, $P' = 0$ a pour solutions les polynômes constants. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de Δ et $E_0(\Delta) = \text{Ker}(\Delta) = P = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}$.

2. Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est valeur propre de u alors $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et

$$\dim(E_\lambda(u)) \geq 1.$$

Correction.

On suppose que λ est une valeur propre de u . Alors $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire d'espace de départ E . De plus, par définition de λ valeur propre, il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors x appartient à $E_\lambda(u)$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\text{Vect}(x) \subset E_\lambda(u)$ car $\text{Vect}(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x . Or $\dim(\text{Vect}(x)) = 1$ car $x \neq 0_E$, d'où :

$$\dim(E_\lambda(u)) \geq \dim(\text{Vect}(x)) \geq 1.$$

Proposition 11.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v et les sous-espaces propres de v sont stables par u .

Démonstration.

On suppose que u et v commutent. Comme u commute avec Id_E , alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, u commute avec $v - \lambda \text{Id}_E$. Ainsi, d'après la proposition 7, $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par u . Par suite, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u , $E_\lambda(u) = \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par u .

On raisonne de même pour la stabilité par v des sous-espaces propres de u . □

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u , alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe i.e.

$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}.$$

Démonstration.

On suppose que λ, μ sont des valeurs propres de u qui vérifient $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u) \cap E_\mu(u)$. Alors on a :

$$u(x) = \lambda x \text{ et } u(x) = \mu x.$$

Par suite, par linéarité de u

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x = u(x) - u(x) = u(x - x) = u(0_E) = 0_E$$

Or $\lambda - \mu \neq 0$ donc $x = 0_E$ par l'axiomatique d'un espace vectoriel.

Ainsi $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) \subset \{0_E\}$ et donc $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}$. □

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u , alors, pour tous vecteurs propres x et y associés à λ et μ respectivement, la famille (x, y) est libre.

Démonstration.

On suppose $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ et $y \in E_\mu(u) \setminus \{0_E\}$. D'après la proposition précédente, $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe, donc (x, y) est libre.

Exercice : Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que F et G sont en somme directe. Montrer que toute famille (x, y) avec $x \in F \setminus \{0_E\}$ et $y \in G \setminus \{0_E\}$ est libre. □

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes distinctes, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_k}(u)$ sont en somme directe.

Démonstration.

Montrons, par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la propriété $\mathcal{P}_k$ = "pour k -uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de valeurs propres distinctes de u , les sous-espaces propres associés sont en somme directe".

L'initialisation $k = 2$ est donnée par la proposition précédente.

Hérédité : Soit k un entier plus grand que 2. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ des valeurs propres distinctes de u . Soit $x = x_1 + \dots + x_{k+1} \in \sum_{i=1}^{k+1} E_{\lambda_i}(u)$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. On suppose $x = 0_E$. Alors, par linéarité de u , on a d'une

part $u(x) = 0_E$ et d'autre part :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k+1} u(x_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i.$$

Par suite, on a :

$$0_E = u(x) - \lambda_{k+1}x = \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $E_{\lambda_i}(u)$ étant un sous-espace vectoriel, $(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. Ainsi, $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i$ appartient à la somme $\bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ qui est bien directe par hypothèse de récurrence. Ainsi, comme $\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i = 0_E$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $(\lambda_i - \lambda_{k+1})x_i = 0_E$, d'où $x_i = 0_E$ car $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$. Et de plus, on a alors, $x_{k+1} = x = 0_E$, d'où, pour tout $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $x_i = 0_E$. Il en résulte que la somme $\sum_{i=1}^{k+1} E_{\lambda_i}(u)$ est directe. Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$, $\mathcal{P}_k$ est vraie. $\square$

Corollaire 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u toutes distinctes, alors :

$$\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \dim(E).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valeurs propres de u deux à deux distinctes. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe et on a :

$$\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u) \right) \leq \dim(E).$$

$\square$

Théorème 1.

On suppose E de dimension finie n . Tout endomorphisme u de E admet au plus n valeurs propres distinctes ; autrement dit :

$$\#\text{Sp}(u) \leq n.$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose par l'absurde que $\#\text{Sp}(u) > n$. Alors il existe $n+1$ valeurs propres de u deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$. Pour chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$, on a $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \geq 1$,

donc :

$$n + 1 \leq \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq n.$$

Contradiction. Par suite $\#\text{Sp}(u) \leq n$. □

Remarque 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Les valeurs propres de l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F sont les valeurs propres λ de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. Dans ce cas,

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

3. Éléments propres d'une matrice carrée

a. Définitions

Définition 12. *Éléments propres d'une matrice*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On dit que λ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nulle** telle que

$$AX = \lambda X.$$

— Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A , on dit que $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de A associé à λ** si :

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad AX = \lambda X.$$

— Si $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A , on appelle **sous-espace propre associé de A à λ** le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(A)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

— On appelle **spectre** de A et on note $\text{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A .

Remarque 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On remarque que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9.

Déterminer les valeurs, vecteurs et sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

Correction.

— 1er cas : $n = 1$

On a $A = (1) = I_1 \in M_1(\mathbb{K})$ donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et $E_1(A) = M_1(\mathbb{K})$.

— 2ème cas : $n \geq 2$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_i le i -ième vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors on a, $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $AE_1 = S = AE_i$ donc $E_1 - E_i \in \text{Ker}(A)$. La famille $(E_1 - E_i)_{2 \leq i \leq n}$ est une famille libre et, comme $\text{rg}(A) = 1$ (car $\text{Im}(A) = \text{Vect}(S)$), d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1 \geq 1$; d'où $(E_1 - E_i)_{2 \leq i \leq n}$ est une base de $\text{Ker}(A)$.

Ainsi, 0 est valeur propre de A car $\text{Ker}(A - 0I_n) = \text{Ker}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ et on a :

$$E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}(E_1 - E_2, \dots, E_1 - E_n).$$

On remarque que les sommes de chaque ligne sont égales et valent toutes n donc la colonne $S \neq 0_{n,1}$ est vecteur propre de A associé à n qui est donc valeur propre.

De plus, comme 0 et n sont des valeurs propres distinctes, leurs sous-espaces propres respectifs sont en somme directe et donc :

$$n = n - 1 + 1 \leq \underbrace{\dim(E_0(A))}_{=n-1} + \underbrace{\dim(E_n(A))}_{\geq 1} \leq \dim(M_{n,1}(\mathbb{K})) = n.$$

Par suite, $\dim(E_n(A)) = 1$ d'où :

$$E_n(A) = \text{Vect}(S),$$

et $E_n(A)$ et $E_0(A)$ sont de somme $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc A ne possède pas d'autre valeur propre.

Conclusion :

$$\text{Sp}(A) = \{0, n\} \text{ et } E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_n(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

b. Propriétés du spectre d'une matrice

Proposition 14.

On suppose E de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors on a $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$.

De plus, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E_{\lambda}(u) \text{ si, et seulement si, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{\lambda}(A).$$

Démonstration.

L'application $\varphi_B : E \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$\varphi_B : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, l'équation $MX = \lambda X$ est équivalente à l'équation $u(x) = \lambda x$ d'où le résultat. $\square$

Proposition 15.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = PE_\lambda(B)$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifie $B = P^{-1}AP$.

Démonstration.

On peut voir deux matrices semblables comme les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes. On obtient alors le résultat souhaité en appliquant la proposition précédente. $\square$

Proposition 16.

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $A \in M_n(\mathbb{K}')$. Alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K}') \subset M_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre de A . Comme $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors X vu comme matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ vérifie l'équation $AX = \lambda X$. Donc $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. $\square$

Exercice 10.

Illustrer le résultat précédent en déterminant les spectres dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda^2)x = 0 \\ (1 + \lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

Par suite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $1 + \lambda^2 > 0$, l'unique solution de ce système est $(0, 0)$ (et ce, pour toute valeur

de λ). Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $1 + \lambda^2 = 0$ si, et seulement si $\lambda = \pm i$. Ainsi, $M(x, y) = \lambda X$ possède des solutions non nulles si, et seulement si, $\lambda = \pm i$. Les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$ sont donc i et $-i$, d'où $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{i, -i\}$.

□

Partie C

Polynôme caractéristique

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n .

1. Polynôme caractéristique

a. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

L'application $M \mapsto \det(M)$ est une fonction polynomiale en les coefficients de M . Ainsi, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ fixée, l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est une fonction polynomiale de la variable λ ; ce qui justifie la définition suivante :

Définition 13. *Polynôme caractéristique d'une matrice carrée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de A** et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Remarque 7.

On notera directement $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Pour justifier cette notation, il faudrait pouvoir définir le déterminant d'une matrice à coefficients polynomiaux. Et c'est possible : au lieu d'utiliser le corps de base $\mathbb{K}$ pour les coefficients, on utilise le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. La théorie reste la même.

Proposition 17.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

En utilisant la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a, pour $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\chi_A(\lambda) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1 - C_1, \dots, \lambda e_n - C_n).$$

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est multilinéaire, donc en développant l'expression précédente on remarque que l'on obtient un polynôme de degré au plus n et on a, pour $0 \leq k \leq n$ où c_{n-k} est le coefficient de $\chi_A(\lambda)$ correspondant à λ^{n-k} :

$$\begin{aligned} c_{n-k} \lambda^{n-k} &= \sum_{i_1 < \dots < i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1, \dots, -C_{i_1}, \dots, \lambda e_j, \dots, -C_{i_k}, \dots, \lambda e_n) \\ &= (-1)^k \lambda^{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, C_{i_1}, \dots, e_j, \dots, C_{i_k}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Par suite, on obtient le résultat en évaluant, c_{n-k} pour $k = 0, 1$ et n :

- $c_n = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$
- $c_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, C_i, \dots, e_n) = -\sum_{i=1}^n a_{ii} = -\text{Tr}(A).$
- $c_0 = (-1)^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \det(A).$

□

Exercice 11.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$. Exprimer le coefficient c_1 du monôme de degré 1 dans $\chi_A(X)$ en fonction des a_{ij} .

Correction.

On utilise les notations de la démonstrations précédente :

$$\begin{aligned} c_1 &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, e_3) + \det_{\mathcal{B}}(C_1, e_2, C_3) + \det_{\mathcal{B}}(e_1, C_2, C_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique de A . Autrement dit :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

Démonstration.

$$\lambda \in \text{Sp}(A)$$

si, et seulement si,

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$

si, et seulement si,

$$A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$$

si, et seulement si,

$$\lambda I_n - A \notin GL_n(\mathbb{K})$$

si, et seulement si,

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

si, et seulement si,

$$\chi_A(\lambda) = 0.$$

□

Corollaire 4.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, alors A a au moins une valeur propre.

Démonstration.

On note χ_A le polynôme caractéristique de A .

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, on a $\deg(\chi_A) = n$. Par suite, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou en raisonnant en terme de facteurs irréductibles, on peut montrer que χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.

□

Méthode : Calcul des éléments propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dans le corps $\mathbb{K}$.

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A .
- On factorise dans $\mathbb{K}$ le polynôme caractéristique χ_A de A et on détermine toutes ses racines.
- Chaque racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de χ_A étant une valeur propre de χ_A , on résout le système

$$MX = \lambda X,$$

qui, NÉCESSAIREMENT, admet une infinité de solution (car λ est une valeur propre de A).

- Pour chaque racine λ de χ_A , le sous-espace propre associé à λ est égal à l'ensemble des solutions du système précédent :

$$E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}.$$

En pratique, on cherchera une base $(X_1, \dots, X_k)$ de l'ensemble des solutions de $MX = \lambda X$ i.e. une famille libre maximale de vecteurs propres associés à λ , afin d'écrire :

$$E_\lambda(A) = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n).$$

Exercice 12.

Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. $\chi_A = X^2 - 3X$, d'où $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et on a :

$$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

2. $\chi_B = X^3 - X^2 - 3X - 1$, d'où $\text{Sp}(B) = \{-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ et on a :

$$E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\right), E_{1-\sqrt{2}}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{1+\sqrt{2}}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}\right)$$

3. $\chi_C = X^3 - 15X^2 + 72X - 108$, d'où $\text{Sp}(B) = \{3, 6\}$ et on a :

$$E_3(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_6(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

4. $\chi_D = X^3 + 2X^2 + X + 2$, d'où $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(D) = \{-2\}$ et $\text{Sp}(D) = \{\pm i\}$. On a :

$$E_{-2}(D) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et dans le cas de $\mathbb{C}$, on a de plus :

$$E_i(D) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-i}(D) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

5. $\chi_E = X^3 + X^2 - 30X$, d'où $\text{Sp}(E) = \{-6, 0, 5\}$ et on a :

$$E_{-6}(E) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), E_0(E) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_5(E) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{20}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 13. Matrice compagnon

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

En déduire que pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P = \chi_A$.

Correction.

Voici deux méthodes pour obtenir le résultat (on explicite ici seulement la deuxième) :

1) On développe le déterminant $\det(\lambda I_n - A)$ par rapport à la dernière colonne.

$$2) \text{ On a } \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En faisant l'opération : $L_0 \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} X^i L_i$, on obtient :

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

où $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On obtient alors le résultat en développant par rapport à la 1ère ligne.

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$, la matrice compagnon A de la question précédente a pour polynôme caractéristique le polynôme P .

Proposition 18.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les coefficients diagonaux de A .

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in K$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - \alpha_n \end{vmatrix}$$

D'où $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \alpha_i)$. □