Corrigé de la feuille d'exercices n°10

Exercices à traiter en priorité :
Exercices : 10 ; 6 ; 3 ; 2 ; 13 ; 15.

1. Somme directe de plusieurs sous-espaces

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et on pose

$$F = \mathrm{vect}(u_1 + u_2, u_3),\ G = \mathrm{vect}(u_1 + u_3, u_4),\ H = \mathrm{vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

Démontrer que $F \cap G = \{0\}$, que $F \cap H = \{0\}$ et que $G \cap H = \{0\}$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Correction.

On va simplement démontrer que $F \cap G = \{0\}$, les deux autres égalités se prouvant de façon tout à fait similaire. Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe des scalaires a, b, c, d tels que

$$u = a(u_1 + u_2) + bu_3 = c(u_1 + u_3) + du_4 \implies (a - c)u_1 + au_2 + (b - c)u_3 - du_4 = 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) étant libre, on en déduit que

$$a - c = a = b - c = -d = 0,$$

d'où l'on déduit successivement $a = d = 0$, puis $c = 0$, $b = 0$. Ainsi, $u = 0$. On va prouver que la somme $F + G + H$ n'est pas directe en trouvant un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans $F + G + H$. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_3 + (u_1 + u_3) + 0 \in F + G + H \\ &= (u_1 + u_2) + 0 + (-u_2) \in F + G + H. \end{aligned}$$

La somme n'est pas directe !

Exercice 2.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4). Soit

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x + y + z - t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$$

et $F = \mathrm{vect}(v)$ où $v = e_1 + e_3$.

1. On pose $G_1 = \mathrm{vect}(w_1)$ où $w_1 = e_1 + e_2$. La somme directe $E + F + G_1$ est-elle directe ? Préciser la dimension de $E + F + G_1$.

2. On pose $G_2 = \mathrm{vect}(w_2)$ où $w_2 = e_1+e_2+e_3$. La somme directe $E+F+G_2$ est-elle directe ? Préciser la dimension de $E+F+G_2$.

Correction.

On va utiliser le résultat suivant : si $\mathcal{B}_E$ est une base de E, $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G, la somme $E+F+G$ est directe si et seulement si $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une famille libre. Ceci nous incite à chercher une base de E. Pour cela, on remarque que

$$(x,y,z,t) \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & -y-z. \end{array} \right.$$

Ainsi, si on pose $u_1 = (-1,1,0,-1)$ et $u_2 = (-1,0,1,-1)$, la famille (u_1,u_2) est une base de E.

1. Voyons si la famille (v,w_1,u_1,u_2) est une famille libre. Pour cela, on résout le système $av+bw_1+cu_2+du_2=0$, d'inconnues a,b,c,d. La résolution de ce système, en utilisant la matrice augmentée, donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La famille est donc liée. La somme n'est pas directe ! De plus, on vérifie que (v,w_1,u_1) est libre, en reproduisant le calcul précédent (sauf la dernière ligne). C'est bien que (v,w_1,u_1) est une base de $E+F+G_1$ qui est de dimension 3.

2. On reprend la même méthode, mais en remplaçant w_1 par w_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

La famille est libre : E, F et G_2 sont en somme directe, et la dimension de $E+F+G_2$ est égale à 4.

2. Sous-espaces stables

Exercice 3.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(x) \in F$ pour tout $x \in F$. Soit p un projecteur de E. Démontrer que u commute avec p si et seulement si $\operatorname{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par u.

Correction.

Supposons d'abord que $u \circ p = p \circ u$, et prouvons que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par u. En effet, si $p(x) = 0$, alors $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(p)$. De plus, si $x \in \operatorname{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $u(x) = u \circ p(y) = p(u(y)) \in \operatorname{Im}(p)$. Remarquons que cette implication n'utilise pas du tout le fait que p est un projecteur. Réciproquement, supposons que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par u, et prouvons que u et p commutent. Prenons $x \in E$. Il se décompose de manière unique en $x = y + z$, avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \operatorname{Im}(p)$. En particulier, $p(y) = 0$ et $p(z) = z$. Mais alors, on a d'une part

$$u(p(x)) = u(z)$$

et d'autre part, puisque $u(y) \in \ker(p)$ et $u(z) \in \operatorname{Im}(p)$ par hypothèse :

$$p(u(x)) = p(u(y)) + p(u(z)) = u(z).$$

Ainsi, $u(p(x)) = p(u(x))$ et les deux endomorphismes p et u commutent.

3. Matrices semblables

Exercice 4.

Montrer que les matrices A, B, C et D suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est A. On a donc $u(e_1) = u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_2$. Alors,

1. Si on pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_3, e_2)$, alors la matrice de u dans $\mathcal{B}_1$ est B.
2. Si on pose $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_3, e_1)$, alors la matrice de u dans $\mathcal{B}_2$ est C.
3. Si on pose $\mathcal{B}_3 = (e_3, \frac{1}{4}e_2, e_1)$ alors la matrice de u dans $\mathcal{B}_3$ est D.

Exercice 5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.

1. Démontrer que A est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.
2. On suppose de plus que $\mathrm{Im}(A)$ et $\ker(A)$ sont supplémentaires. Démontrer que l'on peut demander $C = 0$. Que dire de B ?

Correction.

On notera, pour éviter toute confusion, u et non A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

1. Puisque A est de rang r, $\ker(u)$ est de dimension $n - r$ d'après le théorème du rang. Soit S un supplémentaire de $\ker(u)$, de dimension r, et considérons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S, $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$, de sorte que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Alors la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ a bien la forme voulue.
2. On reprend la même démonstration, mais cette fois on choisit comme supplémentaire de $\ker(u)$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$. On a alors bien $C = 0$, et puisque le rang de A vaut r, il en est de même du rang de B qui est donc inversible.

Exercice 6.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de démontrer que M et D sont semblables. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1. Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{vect}(u_1) = \ker(f - Id)$. De même, prouver l'existence de $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{vect}(u_2) = \ker(f - 2Id)$ et $\mathrm{Vect}(u_{-4}) = \ker(f + 4Id)$.
2. Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Conclure.

Correction.

1. Soit $u(x,y,z)$. Alors

$$\begin{aligned} u\in\ker(f-Id) &\iff (f-Id)(u)=0\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+2y-z &=& 0\\ 3x-3y &=& 0\\ -2x+2y &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& y\\ z &=& z\end{array}\right.\end{aligned}$$

   Si on pose $u_1=(1,1,1)$, alors on vient de prouver que $\ker(f-Id)=u_1$. De même, en résolvant l'équation $f(u)-2u=0$, puis l'équation $f(u)+4u=0$, on trouve respectivement $\mathrm{vect}(u_2)=\ker(f-2Id)$ et $\mathrm{Vect}(u_{-4})=\ker(f+4Id)$ avec $u_2=(4,3,-2)$ et $u_{-4}=(2,-3,2)$.
2. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que c'est une famille libre, ce qui est laissé au lecteur.
3. Notons B la matrice de f dans la base (u_1,u_2,u_{-4}). Puisque $f(u_1)=u_1$, que ,$f(u_2)=2u_2$ et $f(u_{-4})=-4u_{-4}$, on a $B=D$. Ainsi, M et D représentent la même matrice dans des bases différentes. Elles sont donc semblables.

Exercice 7.

1. Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x\in E$, la famille $(x,f(x))$ est liée.
2. Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Correction.

1. Si f est une homothétie, alors $(x,f(x))$ est bien toujours liée. Réciproquement, l'hypothèse nous dit, que pour tout x non-nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$. On doit prouver qu'il existe un scalaire λ tel que $\lambda_x=\lambda$ pour tout x de E, ou encore que $\lambda_x=\lambda_y$ quels que soient x et y non-nuls. Si la famille (x,y) est liée, c'est clair, car $y=\mu x$ et $\mu\lambda_y x=\lambda_y y=f(y)=\mu f(x)=\mu\lambda_x x$ et on peut simplifier par $\mu x\neq 0$. Si la famille (x,y) est libre, calculons $f(x+y)$. D'une part,

$$f(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=\lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y,$$

   d'autre part,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)=\lambda_x x+\lambda_y y.$$

   Puisque la famille (x,y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_{x+y}$, ce qui est le résultat voulu.
2. On va raisonner par récurrence sur n, le résultat étant vrai si $n=1$. Soit f l'application linéaire associée à M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si f est une homothétie, alors M est diagonale et comme sa trace est nulle, c'est la matrice nulle. Sinon, soit $x\in\mathbb{K}^n$ tel que $(x,f(x))$ est libre. Alors on peut compléter cette famille en une base $(x,f(x),e_3,\dots,e_n)$.

Dans cette base, la matrice de f est

$$N = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & N' & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$

Autrement dit, M est semblable à N. Puisque N est de trace nulle, N' est de trace nulle. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}N'Q$ soit une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Posons alors

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$

Alors, P est inversible, et on vérifie aisément que $P^{-1}NP$ est une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Ainsi, N, donc M, est semblable à une telle matrice.

4. Eléments propres et polynôme caractéristique

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Correction.

f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et et seulement si $f' = \lambda f$. f est donc un multiple de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, et la réciproque est vraie. Autrement dit, tous les réels sont des valeurs propres pour D, et $\exp(\lambda x)$ est une base de l'espace propre associé à λ.

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Correction.

Soit (u_n) un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors on a $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_n+u_{n-1}}{2}=\lambda u_n \iff (1-2\lambda)u_n=-u_{n-1}.$$

On distingue alors trois cas :

— Si $\lambda=1$, alors on a $u_0=u_0$ (qui n'implique plus rien sur u_0), puis pour tout $n\geq 1$, on a $u_n=u_{n-1}$. Réciproquement, toute suite constante est bien vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de ϕ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes.

— Si $\lambda=1/2$, alors le système devient $u_0=0$ et pour tout $n\geq 1$, $u_{n-1}=0$ ce qui implique que (u_n) est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de ϕ.

— Dans tous les autres cas, le système devient $u_0=0$ et pour tout $n\geq 1$,

$$u_n=\frac{1}{2\lambda-1}u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est là-encore la suite nulle, et λ n'est pas valeur propre.

En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 10.

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&5&2\\2&-3&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Correction.

Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X)=(X-1)(X-2)(X+4).$$

Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résoud AX=X, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-x+2y-z&=&0\\3x-3y&=&0\\-2x+2y&=&0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1,2,-4)$, la matrice de passage étant

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X - 1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 3y + 2z & = & 0 \\ -2x + 4y + 2z & = & 0 \\ 2x - 3y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x + 3y + 2z & = & 0 \\ -2x + 3y + 2z & = & 0 \\ 2x - 3y - 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x - 3y - 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1, 2, 2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = -(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1, u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0, 0, 1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Donner les éléments propres de ϕ.

Correction.

On va écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. Remarquons que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a
$$\phi(X^k) = (-k+1)X^k - kX^{k-1}.$$
Ainsi, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $1, 0, \dots, -n+1$. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure étant exactement les valeurs situées sur la diagonale, on en déduit que ϕ est diagonalisable, ses valeurs propres étant les $(n+1) = \dim(E)$ réels distincts $1, 0, -1, \dots, -n+1$.

Exercice 12.

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres de ϕ.

Correction.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$, les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda m_{j,i}$, pour $1 \leq j < i \leq n$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ pour tous les couples (i,j). Ceci entraîne que $\lambda = \pm 1$. On distingue plusieurs cas.

— Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que -1 est une valeur propre de ϕ, les vecteurs propres appartenant à $\mathrm{vect}(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n(n-1)/2$.

— Si $\lambda = 1$, on n'a plus de contraintes sur les éléments diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléménts non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant éléments de $\mathrm{vect}(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Exercice 13.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Correction.

1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A et soit Z un vecteur propre non-nul associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$
où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.

2. Il suffit de choisir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour remarquer que $AZ = Z$. Ainsi, Z est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 14.

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned} MN \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff \det(MN) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \times \det(N) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0 \\ &\iff M \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in GL_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On a donc

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n).$$

D'après la première question (et une récurrence immédiate), $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement, pour tout $i = 1, \dots, n$, $B - \lambda_i I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B)$. Ceci revient à dire que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

Exercice 15.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A et Q celui de A^{-1}. Quelle relation a-t-on pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ entre $Q(\lambda)$ et $P(\lambda^{-1})$?

Correction.

On écrit, pour $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^{-1}) \\ &= \det(A^{-1}(\lambda A - I_n)) \\ &= \det(A^{-1})\det(\lambda A - I_n) \\ &= \det(A^{-1})\det(-\lambda(\lambda^{-1} I_n - A)) \\ &= \det(A^{-1})(-\lambda)^n \det(\lambda^{-1} I_n - A) \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} P(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Exercice 16.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On souhaite prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Démontrer le résultat si A ou B est inversible.
2. Dans le cas général, on considère les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $PN = MP$ et conclure.

Correction.

1. Si par exemple A est inversible, AB et BA sont semblables. En effet, on peut écrire

$$A^{-1}(AB)A = BA.$$

2. Il est clair que

$$PN = MP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   De plus, P est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur sa diagonale, donc P est inversible. Il vient que M et N sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Mais le calcul de χ_M fait intervenir le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure par blocs. On peut calculer ce déterminant par blocs et on trouve que

$$\chi_M(X) = X^k \chi_{BA}(X).$$

   De même, on a aussi

$$\chi_N(X) = X^k \chi_{AB}(X).$$

   Puisque $\chi_M = \chi_N$, on en déduit que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.