**Chapitre II**

# Intégrale généralisée

## Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ; les intervalles considérés sont supposés d'intérieur non vide et $a$ désigne un nombre réel.

# Partie A

# Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

## 1. Généralités

### a. Définitions et exemples

**Définition 1.** *Intégrale convergente*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_a^x f$ existe et est finie, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou encore $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

**Proposition-Notation 1.**

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $F$ une primitive de $f$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si $F$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a) \underbrace{=\ [F(t)]_a^{+\infty}}_{\text{notation}}$$

Démonstration.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$ :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $F$ admet une limite finie en $+\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} (F(x)-F(a)) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

□

**Exemple 1.**

1. Soit $\alpha > 0$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

> En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$ ; or sin ne possède pas de limite quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 1.**

Discuter de la convergence des intégrales suivantes et en cas de convergence, déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{it}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} te^t\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $I = [0,+\infty[$ et $F = \arctan$ est une primitive de $f$ sur $I$. De plus, $F$ admet $\frac{\pi}{2}$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$
2. La fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $I = [0,+\infty[$ et $F : t \mapsto \frac{e^{it}}{i}$ est une primitive de $f$ sur $I$. De plus, $F$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (en effet, il suffit de considérer par exemple la suite $(e^{i\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite), donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it}\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. La fonction $f : t \mapsto te^t$ est continue sur $I = [0,+\infty[$ et $F : t \mapsto (t-1)e^t$ est une primitive de $f$ sur $I$ (on peut retrouver cette primitive, sans connaissance du résultat a priori, par une intégration par parties par exemple). De plus, $F$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} te^t\,\mathrm{d}t$ diverge.
4. La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $I = [1,+\infty[$. De plus, par une intégration

par parties, on trouve :

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - \int t\frac{\frac{-2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ \int f(t)\,\mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\arctan(t).\end{aligned}$$

Par suite, $F : t \mapsto t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\arctan(t)$ est une primitive de $f$ sur $I$ et comme $\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0 + 2\times\frac{\pi}{2} = \pi$$

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$ converge et comme $F(1) = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_1^{+\infty} = \pi - (\ln(2) + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \ln(2).$$

**Exercice 2.**

1. Donner un exemple de fonction $f : [1,+\infty[ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $f$ n'est pas bornée et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

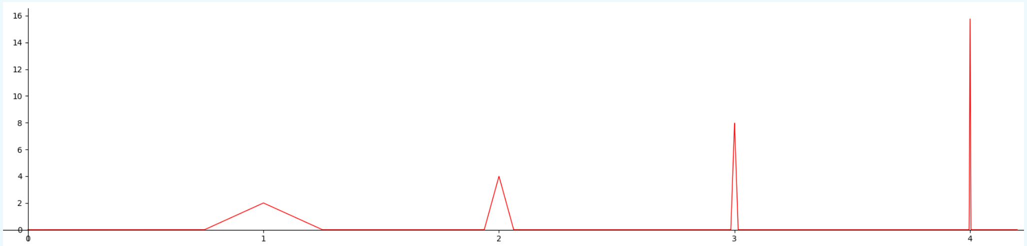
Correction.

1. On peut considérer la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. En effet, on a $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

2. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :
   — pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f$ est affine sur :
     - l'intervalle $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ avec $f(n - \frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$ ;
     - l'intervalle $[n, n + \frac{1}{4^n}]$ avec $f(n) = 2^n$ et $f(n + \frac{1}{4^n}) = 0$ ;

   — $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n - \frac{1}{4^n}, n + \frac{1}{4^n}]$.




Alors $f$ est continue et non bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_{n-\frac{1}{4^n}}^{n+\frac{1}{4^n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}.$$

On a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + \frac{1}{4^n} > x$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^{n+\frac{1}{4^n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left( \int_{k-\frac{1}{4^k}}^{k+\frac{1}{4^k}} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et, de plus, la fonction $f$ étant positive, la fonction $F$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que $F$ admet une limite finie en $+\infty$ *(on peut montrer simplement que la limite est bien* $1$*)* et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

### b. Intégrales de Riemann en $+\infty$

**Proposition 2.** *Intégrale de Riemann en* $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ est la fonction ln qui admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \begin{cases} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha < 1 ; \\ \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Ainsi, si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et si $\alpha < 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ; et dans le cas $\alpha > 1$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$$

□

### c. Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

**Proposition 3.** *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. Comme $f$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et donc $[a, b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$, d'après la relation de Chasles (pour les intégrales sur un segment) :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $x \mapsto \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, $\int_b^{+\infty} f$ converge.
Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left( \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty} \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 4.** *Linéarité de l'intégrale généralisée*

Soit $f, g \in C_{pm}([a,+\infty[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{pm}([a,+\infty[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a, par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, si les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $x \mapsto \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x \to +\infty} \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left( \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lambda \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \lim_{x \to +\infty} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 3.**

Déduire de la proposition précédente que l'ensemble des fonctions $f$ continues par morceaux telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Que dire de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ?

Correction.

D'après la proposition pécédente, l'ensemble $E = \{f \in C_{pm}([a,+\infty[, \mathbb{K}) \mid \int_a^{+\infty} f \text{ converge}\}$ est stable par combinaison linéaire ; de plus, la fonction nulle appartient à $E$ donc $E$ est un sous-espace vectoriel de $C_{pm}([a,+\infty[, \mathbb{K})$ : ainsi $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Toujours d'après la proposition précédente, on conclut que $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur $E$.

**Proposition 5.**

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{C})$. On a les équivalences suivantes :

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \overline{f}$ converge. Et dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent. Et dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t\ ; \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t\ ;$$

et

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

— L'application $z \mapsto \overline{z}$ est continue de $\mathbb{C}$ dans lui-même, donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \overline{\int_a^x f} = \int_a^{+\infty} \overline{f}$ admet une limite finie en $+\infty$. D'où l'équivalence annoncée par définition de la convergence d'une intégrale généralisée et on a, dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \overline{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \overline{\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t &= \overline{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

— Pour le sens directe de l'équivalence : si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors, d'après le point précédent, $\int_a^{+\infty} \overline{f}$ converge ; et, de plus, on a $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\overline{f}$ et $\mathrm{Im}(f) = \frac{1}{2i}f - \frac{1}{2i}\overline{f}$ ; donc, par combinaison linéaire (Proposition 4), $\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent et on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to+\infty} \overline{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \overline{\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} \\
\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t &= \overline{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent, comme $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, par combinaison linéaire (Proposition 4), $\int_a^{+\infty} f$ converge ; et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

□

**Proposition 6.** *Positivité et croissance*

Soit $f, g \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent.

— Si $f$ est positive (i.e. pour tout $t \in [a,+\infty[$, $f(t) \geq 0$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

— Si $f \leq g$ (i.e. pour tout $t \in [a,+\infty[$, $f(t) \leq g(t)$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration.

— On suppose $f$ positive. Alors, par positivité de l'intégrale sur un segment, pour tout $x \in [a+\infty[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Par passage à la limite, on obtient donc que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

— Si $f \leq g$, alors $h = g - f \geq 0$. De plus, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} h$ converge donc $\int_a^{+\infty} \underbrace{h(t)}_{g(t)-f(t)}\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Ainsi, $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ étant convergentes, par linéarité de l'intégrale généralisée, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

□

**Théorème 1.**

Soit $f \in C([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Démonstration.

Soit $f \in C([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction continue, positive sur $[a,+\infty[$.

($\Leftarrow$) Si $f = 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car la fonction nulle est une primitive de $f$ et admet une limite finie... nulle en $+\infty$ et on a $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = [0]_0^{+\infty} = 0$.

($\Rightarrow$) Raisonnons par contraposée. On suppose $f \neq 0$. Comme de plus $f$ est positive, il existe $t_0 \in [a,+\infty[$ tel que $f(t_0) > 0$.
Posons $\varepsilon = \frac{f(t_0)}{2} > 0$. Par continuité de $f$ en $t_0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [a,+\infty[$, si $|t - t_0| \leq \delta$ alors $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$.
En particulier, pour tout $t \in [t_0, t_0+\delta]$, on a alors :

$$f(t) \geq f(t_0) - \varepsilon = \frac{f(t_0)}{2}.$$

Par suite, par croissance de l'intégrale sur l'intervalle $[t_0, t_0+\delta]$, on a :

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{f(t_0)}{2}\,\mathrm{d}t = \delta\frac{f(t_0)}{2}.$$

Comme $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), $\int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{t_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, $f$ est positive, donc, par positivité de l'intégrale, $\int_a^{t_0} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ et $\int_{t_0+\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Par suite, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \delta\frac{f(t_0)}{2} > 0.$$

Il en résulte que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.
Ainsi, par contraposée, on a prouvé que si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$.

$\square$

**Proposition 7.** *Dérivation*

Soit $f \in C([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction **continue** sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors l'application de $\varphi : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ et on a $\varphi' = -f$.

Démonstration.

Comme $f$ est continue sur $[a, +\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ et vérifie $F' = f$. De plus, pour tout $x \in [a, +\infty[$, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), l'intégrale $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente car, par hypothèse, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ l'est et on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, la fonction $\varphi$ est bien définie sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - F(x).$$

Ainsi, $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ (la fonction constante $x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et la fonction $F$) et on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$ :

$$\varphi(x) = 0 - F'(x) = -f.$$

□

## 2. Intégrale généralisée de fonctions positives

**Proposition 8.**

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive.

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x \in [a, +\infty[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive. Alors l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante car, pour tous $x, y \in [a, +\infty[$ avec $x \leq y$, par positivité de l'intégrale, $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ et on a, d'après la relation de Chasles (la classique cette fois-ci) :

$$F(y) = \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geq 0} \geq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x).$$

De plus, d'après le théorème de la limite monotone, une fonction croissante $g$ sur $[a, +\infty[$ :

i) admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, elle est majorée sur $[a, +\infty[$ et dans ce cas, $\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \sup_{x\in[a,+\infty[} g(x)$ ;

ii) tend vers $+\infty$ si, et seulement si, elle n'est pas majorée.

Par suite,

— D'après la proposition-notation 1, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ et donc, d'après i), si, et seulement si, $F$ est majorée sur $[a, +\infty[$ et dans ce cas :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{x\in[a,+\infty[} F(x) = \sup_{x\in[a,+\infty[} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Par négation de ce qui précède, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, $F$ n'est pas majorée et donc, d'après ii), si et seulement si, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

□

**Théorème 2.** *Comparaison*

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$.

— Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.

ii) On suppose $f = 0(g)$ (ou $f = o(g)$) en $+\infty$. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

iii) On suppose $f \underset{x\to+\infty}{\sim} g$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Démonstration.

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$. On note $F : x \mapsto \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G : x \mapsto \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

— Supposons que $\int_a^{+\infty} g$ converge. D'après la relation de Chasles (Proposition 3), l'intégrale $\int_A^{+\infty} g$ converge. Par positivité de $g$, d'après la proposition 8, $G$ est majorée sur $[A, +\infty[$. Or, par croissance de l'intégrale, $F \leq G$ donc $F$ est majorée sur $[A, +\infty[$. Par suite, toujours d'après la proposition 8, $\int_A^{+\infty} g$ converge. Ainsi, d'après la relation de Chasles (Proposition 3), $\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Il s'agit de la contraposée du point précédent.

ii) Si $f = 0(g)$, alors il existe $A \geq a$ et $M > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq Mg(t)$. Or $\int_a^{+\infty} Mg$ converge si, et seulement si, $\int_a^{+\infty} g$ converge, donc, si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} Mg$ et donc, d'après i), $\int_a^{+\infty} f$ converge.
Si $f = o(g)$ alors $f = 0(g)$, donc, d'après ce qui précède, si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

iii) Si $f \underset{x\to+\infty}{\sim} g$, alors $f = 0(g)$ et $g = 0(f)$ ; ainsi, d'après ii), $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge.

$\square$

**Exercice 4.**

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Correction.

1. Soit $f : t \mapsto \frac{t^\alpha+1}{3t^\beta+5}$. Alors $f$ est définie (car $3t^\beta + 5 > 0$ pour tout $t \geq 0$), continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et on a :
$$\frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{3t^\beta} = \frac{1}{3t^{\beta-\alpha}}$$
Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\beta-\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.
Par suite, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.
De plus, $f$ étant continue sur $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge et donc :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.

2. Soit $f : t \mapsto t^\alpha e^{-t}$. Alors $f$ est définie, continue et positive sur $[1, +\infty[$ et on a, par croissances comparées :
$$t^2 f(t) = t^{2+\alpha} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$
donc $f(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ; or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison :
$$\text{pour tout } \alpha > 0, \qquad \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

3. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$. Alors $f$ est définie, continue et positive sur $[2, +\infty[$.
   — <u>1er cas :</u> $\alpha > 1$.
   On pose $a = \frac{\alpha+1}{2}$ et ainsi $\alpha > a > 1$. Alors $\alpha - a > 0$ et donc, par croissances comparées lorsque $\beta < 0$ et par produit de limites lorsque $\beta \geq 0$ :
$$t^a f(t) = \frac{1}{t^{\alpha - a}} \ln(t)^{-\beta} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
   donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ en $+\infty$.
   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $a > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,\mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   — <u>2eme cas :</u> $\alpha < 1$.
   Si $\beta \leq 0$, pour tout $t \geq e$, on a $\ln(t)^{-\beta} \geq 1$ donc, pour tout $t \geq e$ :
$$f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha}.$$
   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha < 1$, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc, par comparaison, $\int_e^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
   On suppose $\beta > 0$. Comme pour tout $a > 0$, par croissances comparées, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, $\frac{\ln(t)^\beta}{t^a} \leq 1$ et donc, pour tout $t \geq t_0$ :
$$\frac{1}{\ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^a}.$$
   On pose $a = \frac{1-\alpha}{2}$. Alors $\alpha + a = \frac{1+\alpha}{2} < 1$ et $a > 0$, donc il existe $t_0 > 1$ tel que, pour tout $t \geq t_0$ :
$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \geq \frac{1}{t^{\alpha + a}}$$
   Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, comme $\alpha + a < 1$, $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+a}}\,\mathrm{d}t$ diverge, et donc, par comparaison, $\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et ainsi, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

— <u>3eme cas :</u> $\alpha = 1$.

Pour tout $t \geq 2$,

$$f(t) = \frac{1}{t\ln(t)^\beta} = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{(1-\beta)\ln(t)^{\beta-1}} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\ln(t)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Par suite, pour $x \geq 2$ :

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{(1-\beta)}(\ln(x)^{1-\beta} - \ln(2)^{1-\beta}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{1}{(\beta-1)}\left(\frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(x)^{\beta-1}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{(\beta-1)\ln(2)^{\beta-1}} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Donc, par définition, $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

**<u>Conclusion :</u>** on a donc : $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

## 3. Intégrabilité

**Définition 2.** *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$. On dit que $f$ est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ ou que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

**Théorème 3.**

Soit $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$. Si $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

Démonstration.

On suppose que $f \in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ est intégrable sur $[a,+\infty[$

— Traitons tout d'abord le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On note $f_+ = \max(f,\mathbf{0})$ qui est continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$ et $f_- = \min(f,\mathbf{0})$ qui est continue par morceaux et négative sur $[a,+\infty[$. Alors $f = f_+ + f_-$, $|f| = f_+ - f_-$ et de plus :

$$0 \leq f_+ \leq |f| \text{ et } 0 \leq -f_- \leq |f|$$

Par suite, comme $\int_a^{+\infty} |f|$ converge et $f_+, -f_-$ sont positives, par comparaison, $\int_a^{+\infty} f_+$ et $\int_a^{+\infty} -f_-$ convergent. Ainsi, comme $f = f_+ + (-1)(-f_-)$, par combinaison linéaire, $\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Ensuite, le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On a $f=\mathrm{Re}(f)+i\mathrm{Im}(f)$ avec $\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in C_{pm}([a,+\infty[,\mathbb{R})$ ; et les inégalités :

$$|\mathrm{Re}(f)|\leq |f| \text{ et } |\mathrm{Im}(f)|\leq |f|.$$

Ainsi, comme $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, par comparaison, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur $[a,+\infty[$ et sont à valeurs réelles, donc, d'après le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ précédent, $\int_a^{+\infty}\mathrm{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty}\mathrm{Im}(f)$ convergent.
Il en résulte que, d'après le proposition 5, $\int_a^{+\infty} f$ converge.

$\square$

**Exercice 5.**

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+i}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\,\mathrm{d}t$.

Correction.

1. La fonction $f:t\mapsto\frac{1}{t^2+i}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a, pour tout $t\in[0,+\infty[$ :

$$|f(t)|=\frac{1}{|t^2+i|}=\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}.$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$ $(2>1)$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge i.e. $f$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par suite, $\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. De plus, $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; et ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $f:t\mapsto\frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a, pour tout $t\in[1,+\infty[$ :

$$\left|\frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\right|=\frac{t|\sin(t)|}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\leq\frac{t}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\sqrt{2}te^{-\frac{t}{2}}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, d'après le critère de Riemann en $+\infty$ $(2>1)$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison, $\int_1^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge i.e. $f$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Il en résulte que $\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

# Partie B

## Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, $a, b$ désignent des réels tels que $a < b$.

### 1. Intégrale généralisée sur $]-\infty, a]$

**Définition 3.** *Intégrale convergente sur* $]-\infty, a]$

Soit $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.
Si la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^a f$ existe et est finie, on note $\int_{-\infty}^a f$ ou encore $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **diverge**.

**Remarque 1.**

Les propriétés de l'intégrale $\int_{-\infty}^a$ sont analogues à celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ et on les démontre sans difficulté en remarquant qu'en posant $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$, on obtient les propriétés suivantes :

— si $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ alors $\tilde{f} \in C_{pm}([-a, +\infty], \mathbb{K})$ ;

— les intégrales $\int_{-\infty}^a f$ et $\int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}$ sont de même nature ;

— en cas de convergence, $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{+\infty} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 6.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha$.

Correction.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons $f : t \mapsto e^{\alpha t}$. Alors

$$F : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ t & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty, 0]$. Or $F$ admet une limite finie en $-\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 0$. Donc $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$. Et dans ce cas,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{\alpha 0}}{\alpha} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

*Remarque : on aurait également pu utiliser la remarque précédente en remarquant que $g : t \mapsto e^{-\alpha t} = f(-t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.*

## 2. Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou $[a, b[$

**Définition 4.** *Intégrale convergente sur $[a, b[$*

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f$ **diverge**.

**Définition 5.** *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}(]a, b], \mathbb{R})$. On dit que $f$ est **intégrable** sur $]a, b]$ ou que $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente.

**Remarque 2.**

On définit de manière analogue l'intégrale sur un intervalle du type $]a, b]$.

Tous les résultats de la partie concernant l'intégrale sur $[?, +\infty[$ sont transposables aux cas des intégrales sur $]a, b]$ et sur $[a, b[$ ; citons notamment **les propriétés de comparaison** et le théorème "intrégrabilité d'une fonction implique convergence de l'intégrale de cette fonction" reproduit ci-après.

**Théorème 4.**

Soit $f \in C_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$. Si $f$ est intégrable sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Démonstration.

La démonstration est analogue au cas $[a,+\infty[$ en remplaçant simplement $+\infty$ par $b$. $\square$

**Exemple 2.**

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge

— La fonction ln est continue sur $]0,1]$. De plus, a fonction $F : t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de ln. Or, par croissances comparées, $t\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0^-$, donc $F$ tend vers $0$ en $0^+$. Ainsi, une primitive de ln admet une limite finie en 0 (0 étant la borne "posant problème"), donc, d'après la proposition-notation 1 adaptée à l'intervalle $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et on a :

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_0^1 = 1 \times \ln(1) - 1 - \left(\lim_{t\to 0}(t\ln(t) - t)\right) = -1.$$

— La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et la fonction ln est une primitive de $f$ sur cette intervalle ; de plus, ln a pour limite $-\infty$ en $0^+$ et donc n'admet pas de limite finie en 0. Par suite, $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

**Proposition 9.** *Intégrales de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On traite la nature de $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ :

- Si $\alpha = 1$, pour $a < x \leq b$, on a :

$$\int_x^b \frac{1}{t-a}\,dt = [\ln(t-a)]_x^b = \ln(b-a) - \ln(x-a) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$$

donc $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t-a}\,dt$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $a < x \leq b$ :

$$\begin{aligned}\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)(t-a)^{\alpha-1}}\right]_x^b \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} \\ \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t & \begin{cases} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

**Corollaire 1.** *Intégrale de Riemann en 0*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

On applique la proposition précédente (deuxième intégrale) pour $a = 0$ et $b = 1$.

Voici tout de même la démonstration directe pour une potentielle question de colle :) :

- Si $\alpha = 1$, pour $0 < x \leq 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

  donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $0 < x \leq 1$ :

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \begin{cases} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

**Proposition 10.**

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.
- Si $f$ est bornée sur $[a, b[$, alors $f$ est intégrable sur $[a, b[$.
- Si $f$ est prolongeable par continuité en $b$ i.e. si $f$ admet une limite finie en $b$, alors $f$ est

intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration.

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.

- On suppose $f$ bornée sur $[a, b[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [a, b[$, $|f(t)| \leq M$. Or, la fonction constante en $M$ sur $[a, b[$ est d'intégrale convergente, donc par comparaison (d'integrales de fonctions positives !), $\int_a^b |f(t)| \, dt$ converge i.e. $f$ est intégrable sur $[a, b[$.
- On remarque qu'une fonction $f$ continue par morceaux sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité en $b$ est la restriction d'une fonction $g$ continue par morceaux sur $[a, b]$. Or, toute fonction continue par morceaux sur un **segment** est bornée sur ce segment (*Exercice : prouver cette affirmation ; puis trouver un exemple de fonction continue par morceaux sur* $[0, 1[$ *qui n'est pas bornée*), donc $f$ est bornée sur $[a, b[$ comme restriction d'une fonction bornée. Ainsi, d'après le cas précédent, $f$ est intégrable sur $[a, b[$.

$\square$

**Exercice 7.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^{\frac{7}{2}} + 1} \, dt \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} \, dt \qquad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{e^{1-t} - 1} \, dt.$$

Correction.

1. Aucun souci : la fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{t^{\frac{7}{2}} + 1}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment ! Ainsi, l'intégrale converge.
2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$. Étudions $f$ au voisinage de 0. On a :
$$|f(t)| = \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$
Or, d'après le critère de Riemann en 0, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$ converge car $\frac{1}{2} < 1$ ; donc par comparaison $\int_0^1 |f(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t)| \, dt$ converge.
3. Comme la fonction $|\sin|$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto |\sin(\frac{1}{t})|$ est bornée sur 1 sur $]0, 1]$. Or la fonction constante en 1 est d'intégrale convergente sur $]0, 1]$ d'où $\int_0^1 |\sin(\frac{1}{t})| \, dt$ converge et donc $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t}) \, dt$ converge. (*On pouvait bien-sûr faire directement appel à la proposition précédente, mais ça ne coûte pas très cher de refaire ce raisonnement à chaque fois !*).
4. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{e^{1-t}-1}$ est positive et continue sur $[0, 1[$.
Étudions $f$ pour $t$ au voisinage de $1^-$. On a le développement limité à l'ordre 1 de la fonction

exp suivant :
$e^u = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$. Ainsi, en prenant $u = 1 - t \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$, on obtient :

$$e^{1-t} = 1 + (1-t) + \underset{t\to 1}{o}((1-t)^2)$$

Ainsi,

$$f(t) = \frac{1}{e^{1-t} - 1} = \frac{1}{(1-t) + \underset{t\to 1}{o}((1-t)^2)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}$$

Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge car $1 \geq 1$ ; donc par comparaison $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

## 3. Intégration sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe $a, b$ peuvent être égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement et on s'intéresse aux intégrales sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

**Définition 6.** *Intégrale convergente sur* $]a, b[$

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$.
S'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent, alors on note $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la quantité :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

**Proposition 11.**

Soit $f \in C_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$. Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, alors, pour tout $c \in ]a, b[$, $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent et on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Notation 1.**

Soit $F \in C(]a, b[, \mathbb{K})$. On note

$$[F(t)]_a^b = \lim_{t\to b} F(t) - \lim_{t\to a} F(t)$$

lorsque ces deux limites existent et sont finies.

**Proposition 12.**

Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{K})$ et $F$ une primitive de $f$ sur $]a,b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, la fonction $F$ admet des limites finies en $a$ et $b$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b\,.$$

**Exercice 8.**

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \sin(t)\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t-1}}\,\mathrm{d}t.$$

Correction.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est positive et continue sur $]0,1[$. On étudie donc $f$ au voisinage de 0 puis de 1 :
   — en 0 : on a
   $$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$
   Or $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.
   — en 1 : on a
   $$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$
   Or $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Comme $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $f : t \mapsto \sin(t)\ln\left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}\right)$ est continue sur $]1,+\infty[$. On étudie donc $f$ au voisinage de 1 puis de $+\infty$ :
   — en 1 : on remarque que $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \ln(t^2+1) - \ln(t+1) - \ln(t-1)$ donc :
   $$|f(t)| \underset{t\to 1^+}{\sim} -\sin(1)\ln(t-1) = \underset{t\to 1^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$$
   Or $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 1 ($\frac{1}{2} < 1$), donc, par comparaison, $\int_1^2 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

— <u>en $+\infty$ :</u> on remarque que $\ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) = \ln(1+\frac{2}{t^2-1})$ donc, comme $\frac{2}{t^2-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ :

$$|f(t)| \leq \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ $(2>1)$, donc, par comparaison, $\int_2^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Comme $\int_1^2 \frac{1}{|} f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_2^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ convergent, par définition, $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $f$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ et donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)\sqrt{e^t-1}}$ est continue et positive sur $]0,\frac{\pi}{2}[$. On étudie donc $f$ au voisinage de 0 puis de $\frac{\pi}{2}$.
— <u>en 0 :</u> comme $e^t - 1 \underset{t\to0}{\sim} t$, on a :

$$f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 $(\frac{1}{2}<1)$, donc, par comparaison, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

— <u>en $\frac{\pi}{2}$ :</u> on remarque que $\cos(t) = \sin(\frac{\pi}{2}-t) \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{\pi}{2}-t$ donc :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}}-1}}$$

Or $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-t}\,\mathrm{d}t$ diverge d'après le critère de Riemann en $\frac{\pi}{2}$ $(1\geq1)$, donc, par comparaison, $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Une des deux intégrales (au moins) $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

*Remarque : si on avait commencé par faire l'étude en $\frac{\pi}{2}$, on aurait pu conclure directement à la divergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ sans faire l'étude en 0.*

# Partie C

## Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans cette partie, $I$ désigne un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert ou fermé, de longueur finie ou infinie) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et on note $a$ et $b$ ses extrémités (possiblement infinies).

### 1. Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, on résume et généralise les proporiétés de l'intégrale généralisée ; les démonstrations sont laissées à titre d'exercices au lecteur.

#### a. Espace de fonctions continues par morceaux intégrables

**Proposition 13.**

L'ensemble $E = \{f \in C_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ est intégrable}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire sur $E$.
De plus, cette application est positive et croissante.

#### b. Inégalités

**Proposition 14.** *Inégalité triangulaire*

Soit $f, g \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables. Alors

$$\int_I |f(t) + g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t + \int_I |g(t)| \,\mathrm{d}t.$$

**Proposition 15.**

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors

$$\left| \int_I f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

#### c. Séparation

**Proposition 16.** *Séparation*

Si $f$ est une fonction continue, positive et intégrable sur $I$, alors

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si, et seulement si, } f = \mathbf{0}.$$

### d. Relation de Chasles

**Proposition 17.**

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors pour tout $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## 2. Calculs d'intégrales

### a. Intégration par parties

**Théorème 5.** *Intégration par parties*

Soit $f, g \in C^1(I, \mathbb{K})$. Si la fonction produit $fg$ admet des **limites finies** aux bornes $a$ et $b$ de $I$, alors les intégrales $\displaystyle\int_I fg'$ et $\displaystyle\int_I f'g$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

Quitte à scinder l'intervalle $I$ en deux et utiliser la définition 6, on peut supposer "qu'il n'y a de problème potentiel qu'en $b$" i.e. $I = [a, b[$.
Soit $x \in I$. Comme $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[a, x]$, alors d'après le théorème d'intégration par parties sur un segment (vu en Sup' - on rappelle que sa démonstration repose sur la formule de la dérivée du produit de fonctions !), on a :

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \quad (*)$$

On suppose que le produit $fg$ admet une limite finie en $b$ (d'après notre réduction initiale, c'est déjà le cas en $a$ car $f$ et $g$ sont en particulier continues en $a$). Alors $[f(t)g(t)]_a^x$ tend vers la quantité finie $[f(t)g(t)]_a^b$ lorsque $x$ tend vers $b$. Ainsi, d'après l'égalité $(*)$, $\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$ si, et seulement si, $\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$ d'où par définition, $\displaystyle\int_I fg'$ et $\displaystyle\int_I f'g$ sont de même nature.

De plus, en cas de convergence de $\displaystyle\int_I fg'$ ou $\displaystyle\int_I f'g$, toujours d'après $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to b}\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to b}\left([f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b `f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 9.**

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
2. Justifier la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.
3. On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$.
   i) Justifier l'existence de $I_n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   ii) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$. En déduire $I_n$.

Correction.

1. On pose $f : t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}$. Alors $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ et comme $|f(t)|\underset{t\to0^+}{\sim}1$, $f$ est intégrable sur $]0,1]$ (elle est même prolongeable par continuité en 0 par $f(0)=1$). Par suite $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$. On pose $u : t\mapsto\frac{1}{t}$ et $v : t\mapsto-\cos(t)$. Alors $u,v$ sont $C^1$ sur $[1,+\infty[$ ; le produit $uv$ est défini en 1, vaut $u(1)v(1)=-\cos(1)$ en ce point et $u(t)v(t)=\frac{-\cos(t)}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

   Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty}u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

   Étudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t\mapsto\frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et en $+\infty$, on a :

   $$|g(t)|=\frac{|\cos(t)|}{t^2}\le\frac{1}{t^2}\text{ intégrable sur }[1,+\infty[\text{ d'après le critère de Riemann en }+\infty$$

   Ainsi, par comparaison, $g$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

   Comme $\int_0^1\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge, il en résulte, par la relation de Chasles, que

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Ici, on peut étudier directement la nature de cette intégrale avec les techniques vues précédemment. On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$. Alors $f$ est continue sur $]0,1[$. On étudie donc $f$ au voisinage de 0 et de 1 :
   - <u>en 0 :</u> on a $\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. Ainsi $f$ est prolongeable par continuité en 0 (par 1) et donc intégrable au voisinage de 0. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - <u>en 1 :</u> on remarque que $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$ donc :

   $$|f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} -\ln(1-t) = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

     Or, d'après le critère de Riemann en 1, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc par comparaison, $f$ est intégrable au voisinage de 1. Ainsi, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par suite, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Passons au calcul de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ : utilisons une intégration par partie. On va se rendre compte qu'il faut parfois être subtil dans nos primitives :
   - *Premier essai, sans subtilité :* on considère les deux fonctions $u, v$ de classe $C^1$ sur $]0,1[$ telles que, pour $t \in ]0,1[$ :

   $$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad u(t) = -\frac{1}{t}$$
   $$v(t) = \ln(1-t^2) \qquad v'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}.$$

     Pour appliquer le théorème d'intégration par parties, il faut vérifier que $uv$ admet des limites en 0 et 1. Or ici, on a $\lim_{t\to 1} u(t)v(t) = +\infty$ "à cause" du $\ln(1-t^2)$... oups ! On ne peut donc pas faire notre IPP !
     Mais on se rend compte qu'on peut faire en sorte de compenser le fait que $\ln(1-t^2)$ tende vers $-\infty$ en choisissant plus intelligemment notre primitive de $\frac{1}{t^2}$ : en effet, ici, $-\frac{1}{t}$ tend vers $-1$ alors qu'on voudrait "au minimum" que la primitive tende vers 0 pour potentiellement compenser le $\infty$ ! Ce qui nous amène au :
   - *Deuxième essai, avec subtilité :* on considère les deux fonctions $u, v$ de classe $C^1$ sur $]0,1[$ telles que, pour $t \in ]0,1[$ :

   $$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad u(t) = 1 - \frac{1}{t} = -\frac{1-t}{t}$$
   $$v(t) = \ln(1-t^2) \qquad v'(t) = -\frac{2t}{1-t^2}.$$

     Cette fois-ci, on a bien une limite finie en 1 :

   $$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

     et en 0 :

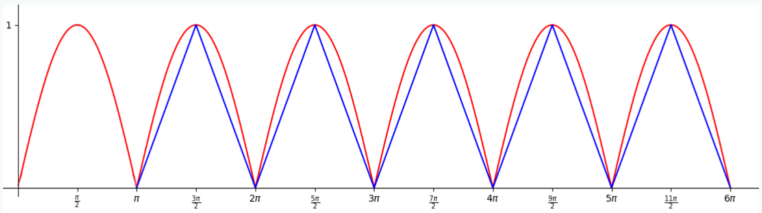
   $$u(t)v(t) = -\frac{(1-t)\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

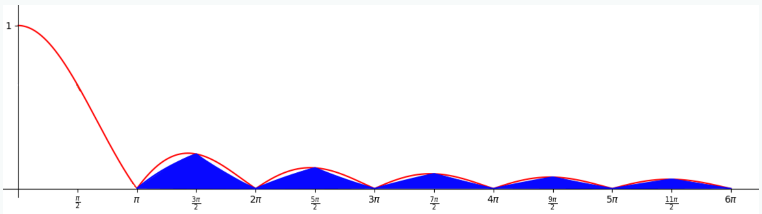
Ainsi, $uv$ admet des limites finies en 0 et 1, donc d'après le théorème d'intégration par parties, $\int_0^1 u'v$ et $\int_0^1 uv'$ sont de même nature. Or on a prouvé que $\int_0^1 u'v$ converge, donc $\int_0^1 uv'$ converge et toujours d'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{1-t}{t} \times \frac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= -2\ln(2).
\end{aligned}$$

**Remarque :** On vient de montrer dans l'exercice précédent que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais il est intéressant de remarquer que la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ i.e. $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Ce qui montre que la réciproque de "$f$ intégrable sur $I$ implique $\int_I f$ converge" est fausse.

Voici une démonstration de la non-intégrabilité de $f$ sur $[0, +\infty[$. Tout d'abord, exposons l'idée de cette démonstration :




On va minorer la fonction $|sin|$ sur $[\pi, +\infty[$ par la fonction $g$ "triangulaire" $\pi$-périodique dont le graphe est représenté en bleu dans le premier graphique. Ainsi, l'intégrale. Ainsi, $\int_\pi^{n\pi} \frac{|sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_\pi^{n\pi} \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et cette dernière intégrale représentée par l'aire bleu sur le deuxième graphique se minore aisément par la somme partielle d'une série divergente. On pourra ainsi conclure la divergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{|sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$.

Voyons cela rigoureusement :
La fonction $|\sin|$ est $\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, \pi]$ elle est égale à la fonction sin. Comme, pour

tout $x \in [0,\pi]$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$, sin est concave sur $[0,\pi]$. Ainsi, sa courbe est au dessus de la corde entre les abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ et de la corde entre les abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$.
Ces dernières ont pour équations respectives $y = \frac{2}{\pi}x$ et $y = -\frac{2}{\pi}(x-\pi)$.
On considère alors une fonction $g$ définie sur $[0,\pi]$, ayant pour image l'union de ces deux cordes, par exemple :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{2}{\pi}(x-\pi) & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Alors $g$ est continue sur $[0,\pi]$, et pour tout $x \in [0,\pi]$, $g(x) \leq \sin(x)$.
On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Par $\pi$-périodicité de $|\sin|$, on a, pour tout $x \in [x_k - \frac{\pi}{2}, x_k - \frac{\pi}{2}](= [0,\pi] + k\pi)$ :

$$|\sin(x)| \geq g(x - k\pi).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant un changement de variable $t = x - k\pi$, on a :

$$\int_{x_k-\frac{\pi}{2}}^{x_k+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_{x_k-\frac{\pi}{2}}^{x_k+\frac{\pi}{2}} \frac{g(x-k\pi)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{g(t)}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite, par symétrie du graphe de $g$ par rapport à la droite $t = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{x_k-\frac{\pi}{2}}^{x_k+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}t\,\mathrm{d}t = \frac{4}{(k+1)\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(k+1)}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_1 - \frac{\pi}{2} = \pi$ et $x_n + \frac{\pi}{2} = (n+1)\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k + \frac{\pi}{2} = (k+1)\pi = x_{k+1} - \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_k-\frac{\pi}{2}}^{x_k+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(k+1)}$$

Pour $x \geq \pi$, on pose $n(= n_x) = E(\frac{x}{\pi} - 1)$ ; alors $x \geq (n+1)\pi$ et $n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et donc, $\frac{1}{2(k+1)}$ étant le terme général d'une série à termes positifs divergente :

$$\int_{\pi}^{x} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(k+1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Il en résulte que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ également. Ainsi, $f$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ mais son intégrale sur $[0,+\infty[$ converge.

**Exercice 10.**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ est convergente puis qu'elle n'est pas absolument convergente.

Correction.

La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi, elle est continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge. Considérons l'intégrale sur $[1, +\infty[$.

On effectue une intégration par parties pour prouver la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \underbrace{\cos(t^2)}_{=\frac{1}{2t}(2t\cos(t^2))} \mathrm{d}t$. On pose :

$$u'(t) = 2t\cos(t^2) \qquad u(t) = \sin(t^2)$$
$$v(t) = \frac{1}{2t} \qquad v'(t) = -\frac{1}{2t^2}.$$

Alors $u, v$ sont $C^1$ sur $[1, +\infty[$ ; le produit $uv$ est défini en 1, vaut $u(1)v(1) = \frac{1}{2}\sin(1)$ en ce point et $u(t)v(t) = \frac{\sin(t^2)}{2t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Ainsi, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

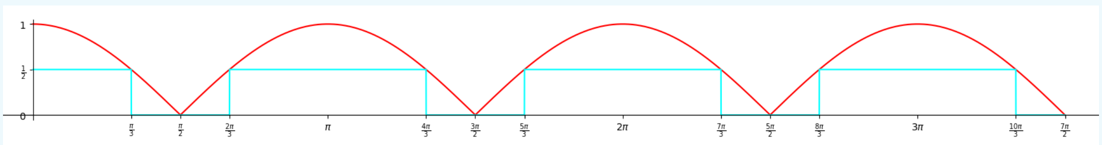
Étudions cette seconde intégrale : la fonction $g : t \mapsto -\frac{\sin(t^2)}{2t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et en $+\infty$, on a :

$$|g(t)| = \frac{|\sin(t^2)|}{2t^2} \leq \frac{1}{2}.\frac{1}{t^2} \text{ intégrable sur } [1, +\infty[ \text{ d'après le critère de Riemann en } +\infty$$

Ainsi, par comparaison, $g$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc les intégrales $\int_1^{+\infty} -\frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Il en résulte, par la relation de Chasles, que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

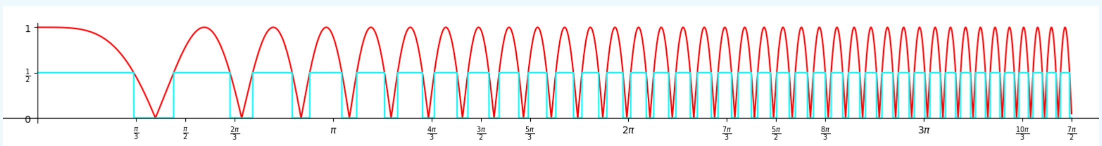
Montrons que $\int_0^{+\infty} |\cos(t^2)|\,\mathrm{d}t$ diverge.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi]$, $|\cos(x)| \geq \frac{1}{2}$.



Alors, en considérant la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, définie, pour $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\sqrt{-\frac{\pi}{3} + k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}\,] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|\cos(t^2)| \geq g(t)$.



Montrons que la fonction $g$ est d'intégrale divergente sur $[0, +\infty[$ ce qui nous permettra de conclure par comparaison.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \displaystyle\int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} g(t)\,\mathrm{d}t$, on a alors :

$$u_k = \int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi} - \sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}\right).$$

De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} g(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \int_{\sqrt{-\frac{\pi}{3}+k\pi}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+k\pi}} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Or, on a :

$$\begin{array}{rcl}
u_k & = & \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}+k\pi} - \sqrt{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi}\right) \\
& = & \dfrac{\sqrt{k\pi}}{2}\left(\left(1+\dfrac{1}{3k}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\dfrac{1}{3k}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
& = & \dfrac{\sqrt{k\pi}}{2}\left(\left(1+\dfrac{2}{3k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)\right) - \left(1-\dfrac{2}{3k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\right) \\
& = & \dfrac{\sqrt{k\pi}}{2}\left(\dfrac{4}{3k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)\right) \\
u_k & \underset{k\to+\infty}{\sim} & \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}.
\end{array}$$

Par suite, d'après le critère de Riemann $\frac{1}{2} \leq 1$, la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ diverge et, comme elle est à termes positifs, elle tend vers $+\infty$, et donc :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} + \sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, on a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x \geq \sqrt{\frac{\pi}{3}}$ et $n = \lfloor \frac{x^2-\frac{\pi}{3}}{\pi} \rfloor$, comme $x \to +\infty$ implique $n \to +\infty$ :

$$\int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}+n\pi}} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Par comparaison de fonctions positives, il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\cos(t^2)|\,\mathrm{d}t$ diverge.

### b. Changement de variable

Dans ce paragraphe, on considère $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

**Théorème 6.** *Changement de variable*

Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi : ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe $C^1$, bijective et strictement monotone. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

— si $\varphi$ est croissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ;

— si $\varphi$ est décroissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Démonstration.

On rappelle que la démonstration du théorème de changement de variable pour l'intégrale sur un segment repose sur la formule de dérivation d'une composée de fonctions et le théorème fondamental de l'analyse et que l'hypothèse $\varphi$ de classe $C^1$ seule suffit.
Pour l'énoncé dans le cadre d'une intégrale généralisée que nous devons prouver, nous aurons toutefois besoin des hypothèses supplémentaires de bijectivité et de stricte monotonie de la fonction $\varphi$. Allons-y :

*On se place ici dans le cas où l'intégrale n'a de "problème" qu'en $b$. On traite le cas général en coupant l'intégrale en deux et en utilisant ensuite la relation de Chasles.*
*De plus, on traite dans la suite le cas $\varphi$ strictement croissante, celui où $\varphi$ est strictement décroissante se prouve de manière analogue (en prenant bien garde à l'ordre des bornes !).*
Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi : [\alpha,\beta[\to [a,b[$ une fonction de classe $C^1$, bijective et strictement croissante.
Soit $x \in [a,b[$. La fonction $\varphi$ étant de classe $C^1$ sur le segment $[a,x]$, on effectue le changement de variable **sur un segment** $t=\varphi(u)$ sur l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour obtenir :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Les nombres $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(x)$ étant bien définis car $\varphi$ est bijective de $[\alpha,\beta[$ dans $[a,b[$. On pose $x'=\varphi^{-1}(x)\in[\alpha,\beta[$.
Comme $\varphi$ est strictement croissante et bijective de $[\alpha,\beta[$ dans $[a,b[$, $\varphi^{-1}$ est l'est aussi de $[a,b[$ dans $[\alpha,\beta[$ ; on a $\varphi^{-1}(a)=\alpha$ et :

$$\lim_{x\to b} x' = \lim_{x\to b}\varphi^{-1}(x)=\beta \quad \text{et} \quad \lim_{x'\to\beta} x = \lim_{x'\to\beta}\varphi(x') = b.$$

Par suite, par définition, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et, si l'une de des deux converge, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to b}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{x'\to \beta}\int_{\alpha}^{x'} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 11.**

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ puis la calculer grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Correction.

Commençons par justifier la convergence de l'intégrale :
On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$. Alors $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— en 0 : on considère $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On a :

$$|f(t)| = \frac{-\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en 0 ($\frac{1}{2} < 1$) donc , par comparaison, $\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, d'où $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

— en $+\infty$ : on considère $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction est positive sur $[1, +\infty[$ et on a, par croissances comparées :

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) = \frac{t^{\frac{3}{2}}\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

d'où :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($\frac{3}{2} > 1$) donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion : d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Passons au calcul de cet intégrale :

On effectue le changement de variable licite $u=\frac{1}{t} \Leftrightarrow t=\frac{1}{u}$, car ici, on a $\varphi : u \mapsto t=\varphi(u)=\frac{1}{u}$ qui est bien de classe $C^1$, bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a :

- $u \to +\infty$ quand $t \to 0^+$ et $u \to 0$ quand $t \to +\infty$ ;
- $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

Et donc, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$ sont de même nature par théorème de changement de variable, et donc convergent du fait que la première est convergente, et on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1)-\ln(u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par suite, $2\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

## 3. Intégration des relations de comparaison

**Proposition 18.** *Intégration des relations de domination/négligeabilité*

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $f$ est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

**Ce résultat est toujours vrai lorsqu'on remplace les $O$ par des $o$.**

Démonstration.

On suppose $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $A \in [a,b[$ tel que, pour tout $t \in [A,b[$, $|f(t)| \leq Mg(t)$.

- On suppose que $\int_a^b g$ converge. Alors, comme $f(t) = \underset{t\to b}{O}(g(t))$, on a $|f(t)| = \underset{t\to b}{O}(g(t))$ donc, par comparaison (Théorème 2), $f$ est intégrable sur $[a,b[$.
  De plus, pour tout $x \geq A$, on a :
  $$\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq Mg(t)}\,\mathrm{d}t \leq M\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$
  d'où :
  $$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
- On pose $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de $g$ qui s'annule en $a$.
  On suppose que $\int_a^b g$ diverge. Alors, comme $g$ est positive, d'après la proposition 8 (qui reste vraie en remplaçant la borne $+\infty$ par $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), on a $G(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

  On a, en posant $C = \int_a^A (|f(t)| - Mg(t))\,\mathrm{d}t$ :
  $$\begin{aligned}
  \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\\
  &\leq \int_a^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_A^x \underbrace{|f(t)|}_{Mg(t)}\,\mathrm{d}t\\
  &\leq \int_a^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_A^x Mg(t)\,\mathrm{d}t}_{=\int_a^x Mg(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^A Mg(t)\,\mathrm{d}t}\\
  &\leq \int_a^A (|f(t)| - Mg(t))\,\mathrm{d}t + M\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\\
  \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq MG(x) + C.
  \end{aligned}$$

  Or, $G(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc il existe $B \in [A,b[$ tel que, pour tout $x \geq B$, $C \leq MG(x)$. Ainsi, pour tout $x \geq B$ :
  $$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2MG(x) = 2M\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
  Il en résulte que :
  $$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

*On raisonne de manière analogue dans le cas petit o.* □

**Exercice 12.**

1. Montrer qu'en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$ *(on pourra penser à utiliser une IPP).*

Correction.

1. On pose $f : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$ et $g : t \mapsto e^{t^2}$. Les fonctions $f$ et $g$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$.
   En $+\infty$, on a, pour tout $t \geq 1$, $g(t) \geq 1$ et $\int_1^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$ diverge, donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
   De plus, on a $f \underset{t\to+\infty}{=} o(g)$ car $\frac{1}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
   Ainsi, par intégration de la relation de négligeabilité (Proposition 18), on a :
$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right).$$

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. On applique une intégration par parties (licite car sur le **segment** $[1, x]$) à l'intégrale $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en considérant les deux fonctions $u, v$ de classe $C^1$ sur $[1, x]$ telles que, pour $t \in [1, x]$ :
$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad u(t) = -\frac{1}{t}$$
$$v(t) = e^{t^2} \qquad v'(t) = 2te^{t^2}.$$
   Alors on a, par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{e^{t^2}}{t}\right]_1^x - \int_1^x 2te^{t^2} \times \left(-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^{x^2}}{x} + e + 2\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
   D'où :
$$\frac{e^{x^2}}{x} = 2\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + e - \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
   De plus, d'après la question 1, $\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $t \mapsto e^{t^2}$ est positive et $\int_1^{+\infty} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge. Donc $e \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

   De nouveau d'après la question 1, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.
   Ainsi, on obtient :
$$\frac{e^{x^2}}{x} = 2\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right),$$

d'où :

$$\frac{e^{x^2}}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et donc finalement :

$$\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

**Proposition 19.** *Intégration de la relation d'équivalence*

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $f$ est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors $f$ n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

*Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour démontrer la proposition 18, mais reproduisons le tout de même ici :*

On suppose $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$.

- On suppose que $\int_a^b g$ converge. Alors, comme $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, $g$ étant positive, $f$ est positive au voisinage de $b$ et donc, par comparaison (Théorème 2), $f$ est intégrable sur $[a,b[$. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Comme $f(t) = \underset{t\to b}{\sim}(g(t))$, il existe $A \in [a,b[$ tel que, pour tout $t \in [A,b[$, $|f(t)-g(t)| \leq \varepsilon g(t)$. Alors, pour tout $x \geq A$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_x^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_x^b \underbrace{|f(t)-g(t)|}_{\leq \varepsilon g(t)}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \varepsilon\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{\sim}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

- On suppose que $\int_a^b g$ diverge. Alors, comme $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, $g$ étant positive, $f$ est positive au voisinage de $b$ et donc, par comparaison (Théorème 2), $f$ est n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

  On pose $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de $g$ qui s'annule en $a$. Comme dans la démonstration du deuxième point de la proposition 18, on a $G(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

  Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Comme $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, il existe $A \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [A, b[$, $|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)$. On a, en posant $C = \int_a^A (|f(t) - g(t)| - \frac{\varepsilon}{2} g(t))\,\mathrm{d}t$ :

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_x^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^A |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t + \int_A^x \underbrace{|f(t) - g(t)|}_{\frac{\varepsilon}{2} g(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^A |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_A^x \frac{\varepsilon}{2} g(t)\,\mathrm{d}t}_{=\int_a^x \frac{\varepsilon}{2} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^A \frac{\varepsilon}{2} g(t)\,\mathrm{d}t} \\
&\leq \int_a^A (|f(t) - g(t)| - \varepsilon g(t))\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \\
\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} G(x) + C.
\end{aligned}$$

  Or, $G(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, donc il existe $B \in [A, b[$ tel que, pour tout $x \geq B$, $C \leq \frac{\varepsilon}{2} G(x)$. Ainsi, pour tout $x \geq B$ :

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon G(x) = \varepsilon \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

  Il en résulte que :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

**Exercice 13.**

Dans cet exercice, on cherche à déterminer un équivalent simple en $1^-$ de $\varphi : x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in ]-1, 1[$ :

$$\varphi(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire un équivalent simple de $\varphi$ en $1^-$.

Correction.

1. Soit $x \in ]-1,1[$. La fonction arcsin est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $[x,1[$ et $\lim_{t\to 1^-} \arcsin(t) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, donc l'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin(t)]_x^1 = \arcsin(1) - \arcsin(x) = \varphi(x).$$

2. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}.\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}.$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ étant une intégrale convergente d'une fonction positive, par intégration de la relation d'équivalence (cas de convergence), on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{t\to 1^-}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{2}.\sqrt{1-t}\right]_x^1 \\
\varphi(x) &\underset{t\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}.\sqrt{1-x}
\end{aligned}$$