# Feuille d'exercices n°18

## 1. Endomorphismes des espaces euclidiens

### a. Adjoint

**Exercice 1.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

**Exercice 2.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|;\ \lambda$ valeur propre de $f\}$. On rappelle que $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}$.

1. On suppose que $f$ est autoadjoint. Montrer que $\|f\| = \rho(f)$.
2. On ne suppose plus que $f$ est autoadjoint. Montrer que $\|f\|^2 = \|f^* f\|$. En déduire que $\|f\| = \sqrt{\rho(f^* f)}$.

**Exercice 3.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que, si $(e_i)$ et $(f_k)$ sont deux bases orthonormées de $E$, alors
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u^*(f_k)\|^2.$$
2. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$ est indépendant de la base orthonormée choisie.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Montrer que
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

**Exercice 4.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $f^*$ a la même propriété.
2. Montrer que $f - Id_E$ et $f^* - Id_E$ ont le même noyau.
3. Montrer que $E = \ker(f - Id_E) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(f - Id_E)$.
4. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$.

## b. Endomorphismes autoadjoints / Matrices symétriques réelles

**Exercice 5.**

Justifier que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable, et trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $P^T AP$ soit diagonale.

**Exercice 6.**

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclien, et soient $u, v$ deux endomorphismes autoadjoints de $E$.

1. Démontrer que $\ker(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u) = E$.
2. Démontrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

**Exercice 8.**

Déterminer les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

**Exercice 9.**

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a$ un vecteur unitaire de $E$ et $\lambda$ un réel.

1. Démontrer que
$$f(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme autoadjoint de $E$.
2. Déterminer les valeurs propres de $f$ et les sous-espaces propres correspondants.

**Exercice 10.**

Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de $u$ ?

**Exercice 11.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut $A$ ?

**Exercice 12.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Est-ce que la matrice $A + iI_n$ est inversible ?

**Exercice 13.**

Soit $u : E \to E$ tel que, pour tous $x, y \in E$, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Démontrer que $u$ est linéaire.

**Exercice 14.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, soit $u$ un endomorphisme autoadjoint de $E$ et soient $(e_i)$, $(f_j)$ deux bases orthonormales de $E$.

1. Démontrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2.$$
2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Démontrer que
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

**Exercice 15.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Soit $(u, v)$ une famille libre de vecteurs de $E$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par

$$f(x) = \langle u, x\rangle u - \langle v, x\rangle v.$$

1. Démontrer que $f$ est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer les valeurs propres de $f$ ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

**Exercice 16.**

Soit $H$ la matrice $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1. Exprimer $\langle HX, X\rangle$ à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2}dx$).
2. En déduire que la matrice $H$ est définie positive.

**Exercice 17.**

Quel est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices symétriques définies positives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 18.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme autoadjoint $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout $x$ de $E$, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout $x$ de $E$ non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que $u$ appartient à $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit $v_i$ par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^{\perp}$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que $v$ est positif.
3. Soit $w$ un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   (a) Montrer que $wu = uw$.
   (b) En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   (c) Soit $w_i$ l'endomorphisme induit par $w$ sur $E_i$. Vérifier que $w_i$ est autoadjoint positif, puis diagonaliser $w_i$.
   (d) En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in GL(E)$.
   (a) Montrer que $f \circ f^* \in S^{++}(E)$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$. Cette factorisation s'appelle décomposition polaire de $f$.

### c. Isométries vectorielles / Matrices orthogonales

**Exercice 19.**

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

**Exercice 20.**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. On considère l'endorphisme de $E$ défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que $\phi$ est une symétrie orthogonale.

**Exercice 21.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, et $a \in E\backslash\{0\}$. On pose

$$s_a(x) = x - 2\frac{(a, x)}{(a, a)}a,$$

Montrer $s_a$ est une isométrie vectorielle. Calculer $\ker(s_a - id)$, $\ker(s_a + id)$. Décrire alors géométriquement $s_a$.

**Exercice 22.**

On considère la matrice $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M$ est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que $M$ est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

**Exercice 23.**

Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 24.**

Caractériser l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 25.**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

**Exercice 26.**

Soient $E$ un plan euclidien orienté, $r$ une rotation de $E$ et $s$ une symétrie orthogonale de $E$.

1. Déterminer l'isométrie vectorielle $s \circ r \circ s$.
2. Déterminer l'isométrie vectorielle $r \circ s \circ r$.
3. A quelle condition a-t-on $s \circ r = r \circ s$ ?

**Exercice 27.**

Soit $E$ un plan vectoriel euclidien orienté, et soient $u$ et $v$ deux vecteurs unitaires de $E$. Déterminer les automorphismes orthogonaux qui envoient $u$ sur $v$.

**Exercice 28.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3, et soit $f \in O^-(E)$. Démontrer que $f$ est la composée d'une rotation d'axe une droite $D$ et de la réflexion par rapport à $D^\perp$.

**Exercice 29.**

Déterminer les réels $a, b, c, d, e$ tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 30.**

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique usuelle d'espace euclidien orienté. La base canonique est noté $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le vecteur $(1, 1, 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est noté $\vec{v}$. Dans cet exercice, on souhaite calculer la matrice $M$ dans la base canonique de la rotation $r$ d'axe $\mathbb{R}\vec{v}$ et d'angle $2\pi/3$.

1. Méthode 1 : en étudiant la restriction de $r$ au plan affine $P$ d'équation $x + y + z = 1$, déterminer la matrice $M$.
2. Méthode 2 : En utilisant la matrice de $r$ dans une base orthonormée directe donc le premier vecteur est le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}$, déterminer $M$.

**Exercice 31.**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{O}(E)$ diagonalisable. Démontrer que $u$ est une symétrie.

## d. Divers

**Exercice 32.**

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

1. Montrer que $u$ est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle = 0$.
2. Montrer que $u$ est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est antisymétrique.
3. On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^{\perp}$.
4. Soit $F$ un sous-espace de $E$ stable par $u$. Démontrer que $F^{\perp}$ est stable par $u$.
5. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2)$.
6. Démontrer que le spectre de $u$ est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.
7. Montrer que $u^2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.
8. Soit $F$ un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2 = -\alpha^2 Id_F$, où $\alpha > 0$. Démontrer qu'il existe une base orthonormale de $F$ telle que la matrice de $v$ dans cette base soit de la forme
$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$
où
$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
9. En déduire qu'il existe une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a pour forme
$$\begin{pmatrix} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$