Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°17

1. Exercices basiques

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 1.

Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2.** $\dfrac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$ avec $a>0$	**4.** $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6.** $(4+x^2)^{-3/2}$

Correction.

1. Il suffit de remplacer t par $2x^2$ dans le développement en série entière de $\ln(1+t)$. On a donc
$$\ln(1+2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^nx^{2n}}{n}.$$
La série converge si $|2x^2|<1$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Il suffit de factoriser par a au dénominateur et d'utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$. Il vient
$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\times\frac{1}{1-\frac{x}{a}}.$$
Pour $|x/a|<1 \iff |x|<|a|$, on obtient
$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}.$$
Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.
3. On factorise par a :
$$\ln(x+a)=\ln\big(a(1+x/a)\big)=\ln(a)+\ln(1+x/a).$$
Pour $|x/a|<1$, soit $|x|<a$, on en déduit
$$\ln(x+a)=\ln(a)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{na^n}.$$
Le rayon de convergence de la série entière obtenue est a.

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

La série converge pour $|x| < 1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $a_n \geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1 puisque, pour $|x| > 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ ne peut pas converger puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

5. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $I =]-1/2, 1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x).$$

En utilisant le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on obtient

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1$)

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n}$$

(valable pour $|x| < 1/2$). En effectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1 + x - 2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n.$$

La série obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

6. On factorise par 4 pour se ramener à $(1+t)^\alpha$. On a donc

$$(4 + x^2)^{-3/2} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2}.$$

La fonction $u \mapsto (1+u)^{-3/2}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$\forall u \in]-1, 1[,\ (1+u)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n} u^n.$$

Il en résulte que pour tout x tel que $\frac{x^2}{4} \in]-1, 1[$, on a

$$\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-3/2} = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{3.5.7.\dots.(2n+1)}{2.4.6.\dots.2n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

La série entière obtenue a pour rayon de convergence $]-2, 2[$.

Exercice 2.

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Correction.

Notons f la fonction considérée. On pourrait écrire $f(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus astucieux et beaucoup plus simple si on pense à écrire (attention aux exposants !)

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$, il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Exercice 3.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Correction.

On décompose f en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x = 1/2$, on trouve $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b = 1$. Pour trouver a, on peut procéder par identification et on obtient $a = 1$. On développe en série entière chaque terme :

— Pour $x \neq 2$,
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x/2}.$$
Donc, pour $|x|/2 < 1$, on a
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$$

— Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

— Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence $1/2$.

Exercice 4.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{n-1}{n!}$. On vérifie facilement que la suite (u_{n+1}/u_n) tend vers 0, et donc le rayon de convergence de la série entière est égal à $+\infty$. Pour déterminer sa somme, on écrit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x \cdot x^n}{n!} - e^x = (x-1)e^x.$$

2. Posons $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Puisque $u_n \to 1$, la suite $|u_n z^n|$ est bornée si $|z| < 1$ et tend vers $+\infty$ si $|z| > 1$. On en déduit que le rayon de convergence de la série étudiée est égal à 1. Pour sommer la série entière, il suffit d'écrire

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^n\\ &= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

Même si cette dernière fonction semble ne pas être définie en 0, elle se prolonge bien sûr par continuité en ce point.

3. Comme pour la première série, la règle de d'Alembert montre facilement que le rayon de convergence de la série entière vaut $+\infty$. Ensuite, l'"astuce", dans ce type d'exercice où on voit apparaitre une fraction du type $P(n)/n!$, avec P un polynôme, et d'écrire le polynôme dans la base $1, n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \cdots$, dans le but de faire apparaitre la série de la fonction exponentielle. Ici, on a

$$(n+1)(n-2)=n^2-n-2=n(n-1)-2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n &= \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)}{n!}x^n-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n\\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-2)!}x^n-2e^x\\ &= x^2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n-2e^x=(x^2-2)e^x.\end{aligned}$$

4. Par la règle de d'Alembert, on prouve facilement que le rayon de convergence vaut $+\infty$. Pour identifier la somme, que nous noterons S, il faut "voir" que cette somme ressemble beaucoup à la fonction exponentielle, mais il faut l'évaluer en $-x^2/2$ pour voir apparaitre le $(-1)^n x^{2n}$ au numérateur et le 2^n au dénominateur. Au final (il faut aussi remarquer que la somme commence pour $n=1$), on obtient

$$S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n}=1-\exp(-x^2/2).$$

Exercice 5.

Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles :

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$
4. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

Correction.

1. Posons $u_n = \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a $u_{n+1}/u_n \to x^2$. Ainsi, si $|x| < 1$, la série est convergente et si $|x| > 1$, la série est divergent. Autrement dit, on a prouvé que le rayon de convergence est égal à 1. Posons, pour $x \in]-1,1[$, $S(x)$ la somme de la série entière. Alors S est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$(xS)'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$
Par intégration, on en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
et donc, pour $x \neq 0$,
$$S(x) = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
De plus, $S(0) = 1$.

2. Posons $u_n = \frac{n^3}{n!}$. On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série étudiée est égal à $+\infty$. Pour la sommer, on va exprimer n^3 en fonction de $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$ et n pour se ramener à des séries dérivées. On a en effet :
$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$
Utilisant que la dérivée de $\exp(x)$ est égale à $\exp(x)$, on trouve
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n = x^3 \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3} = x^3\exp(x).$$
De même, on a
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{n!}x^n = x^2\exp(x) \text{ et } \sum_{n\geq 0}\frac{n}{n!}x^n = x\exp(x).$$
On conclut que
$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n = (x^3+3x^2+x)\exp(x).$$

3. Il est clair, d'après la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence est égal à 1. De plus, si on pose $f(x) = \frac{1}{1+x}$, on a pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n.$$
En dérivant, il vient
$$-\frac{x}{(1+x)^2} = xf'(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^n,$$
soit finalement
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} n x^{2n+1} = x \times \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

4. Il est facile de vérifier, à l'aide de la règle de d'Alembert, que le rayon de convergence de la série entière vaut 1. On décompose ensuite en éléments simples la fraction rationnelle. On trouve
$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1/2}{2n-1}-\frac{1/2}{2n+1}.$$
Posons $f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ et $g(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n-1}$. Alors, d'après la première question, on sait que pour $x\neq 0$, on a
$$f(x)=\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
On se ramène à ce cas pour g, en remarquant que
$$\begin{aligned} g(x) &= -1+\sum_{n\geq 1}\frac{x^2x^{2(n-1)}}{2(n-1)+1}\\ &= -1+x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}\\ &= -1+x^2f(x). \end{aligned}$$
Finalement, on trouve que, notant S la somme de la série initiale, pour $x\neq 0$ dans l'intervalle $]-1,1[$,
$$S(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x^2-1}{4x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
Il est aussi clair que $S(0)=-1$.

Exercice 6.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\cos(\alpha\arcsin t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Correction.

1. On dérive deux fois f :
$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(\alpha\arcsin t)\\ f'(t) &= \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}}\sin(\alpha\arcsin t)\\ f''(t) &= \frac{-\alpha^2}{1-t^2}\cos(\alpha\arcsin t)-\frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)}\sin(\alpha\arcsin t). \end{aligned}$$
On combine d'abord f et f'' pour éliminer les termes en $\cos(\alpha\arcsin t)$ puis on ajoute les termes en f' nécessaires pour éliminer les termes en $\sin(\alpha\arcsin t)$. Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :
$$(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$. La fonction $t\mapsto (1-t^2)y''-ty'+\alpha^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\big((n+1)(n+2)a_{n+2}+(-n(n-1)-n+\alpha^2)a_n\big)t^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}=(n^2-\alpha^2)a_n.$$

Puisque $a_0=1$ (car $y(0)=1$) et $a_1=y'(0)=0$, on en déduit que $a_{2p+1}=0$ pour tout p et que

$$a_{2p}=\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right).$$

Réciproquement, la série entière

$$\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}$$

a un rayon de convergence égal à 1 (on le vérifie facilement par la règle de d'Alembert) et est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-t^2)y''-ty'+\alpha^2y=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-t^2\neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

$$f(x)=\sum_{p\geq 0}\frac{(-4)^p}{(2p)!}\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-p+1\right)\left(\frac{\alpha}{2}-p+2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}+p-1\right)x^{2p}.$$

Exercice 7.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\exp(\lambda\arcsin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x). \end{aligned}$$

   On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$

   Ceci doit être identiquement nul sur $]-R,R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2+\lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

   De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0)=1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.
3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1-x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Correction.

1. La fonction $x\mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x\mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u=-t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.
2. La fonction $x\mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x\mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.
3. Par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x)=xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt+1=xf(x)+1.$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y'=xy+1$. Écrivons ensuite $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n\geq 1$,

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$

et $a_0=1$. On en déduit finalement que

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant x^{2n+1} qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

Exercice 9.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On note $f_\alpha(x)=(1-x)^{-\alpha}$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f_α. Justifier que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et donner une équation différentielle du premier ordre vérifié par f_α sur $\mathcal{D}$.
2. On définit la famille de polynômes (L_k) par $L_0=1$ et $L_k(X)=X(X+1)\cdots(X+k-1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

3. En déduire que, pour tous réels α et β, on a

$$L_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que si α est un entier négatif ou nul, alors f_α est un polynôme et son domaine de définition est $\mathbb{R}$. Sinon f_α est défini par $f_\alpha(x)=\exp(-\alpha\ln(1-x))$ qui est bien défini si $1-x>0$, donc si $x<1$. Dans ce cas, $\mathcal{D}=]-\infty,1[$. Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et, pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a
$$f_\alpha'(x)=\frac{\alpha}{1-x}\exp(-\alpha\ln(1-x))=\frac{\alpha}{1-x}f_\alpha(x).$$
Ainsi, f_α vérifie l'équation différentielle suivante sur $\mathcal{D}$:
$$(1-x)y'(x)-\alpha y(x)=0$$
(cette équation est également vérifiée en $x=1$ si $1\in\mathcal{D}$, c'est-à-dire si $-\alpha\in\mathbb{N}$).
2. Posons $I=]-1,1[$. L'équation différentielle précédente se réécrit, sur I,
$$y'(x)-\frac{\alpha}{1-x}y(x)=0.$$
D'après le théorème de Cauchy linéaire, elle admet une unique solution définie sur I vérifiant $y(0)=1$: la fonction f_α. Considérons ensuite la série entière $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{n!}x^n$. Alors, puisque
$$\frac{\frac{L_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}}{\frac{L_n(\alpha)}{n!}}=\frac{n+\alpha}{n+1}\xrightarrow{n\to+\infty}1,$$
la règle de d'Alembert nous dit que cette série entière est de rayon de convergence 1. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $x\in I$,
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}x^n\\&=L_1(\alpha)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}\right)x^n.\end{aligned}$$
Or, $L_1(\alpha)=\alpha=\alpha L_0(\alpha)$ et
$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}(\alpha)}{n!}-\frac{L_n(\alpha)}{(n-1)!}&=\frac{L_{n+1}(\alpha)-nL_n(\alpha)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)-n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n-n)}{n!}\\&=\alpha L_n(\alpha).\end{aligned}$$
Ainsi, on a prouvé que, pour tout $x\in]-1,1[$,
$$(1-x)S'(x)=\alpha S(x).$$

Puisque $S(0) = L_0(\alpha) = 1$, l'unicité dans le théorème de Cauchy nous dit que $S = f_\alpha$ sur $]-1, 1[$, ce qui est le résultat demandé.

3. Rappelons l'énoncé du théorème concernant le produit de Cauchy de deux séries entières : si $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x_n$ sont deux séries entières, alors leur produit de Cauchy est la série entière $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$. De plus, si A et B ont pour rayon de convergence respectifs R_A et R_B, alors le rayon de convergence de C vérifie $R_C \geq \min(R_A, R_B)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \min(R_A, R_B)$, on a
$$C(x) = A(x)B(x).$$
Appliquons ce résultat avec $A(x) = f_\alpha(x)$ et $B(x) = f_\beta(x)$, dont la série produit est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{k!(n-k)!}\right) x^n.$$
Tenant compte du fait que $f_\alpha \cdot f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ et que
$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\frac{1}{n!},$$
on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)}{n!}\right) x^n.$$
Par unicité du développement en série entière, on obtient finalement que pour tout $n \geq 0$,
$$L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Exercice 10.

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!.$$
Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Correction.

Prenons $x \in [-a, a]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}\|f^{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \leq C|xA|^{n+1}.$$
Soit $r = \min(a, 1/A)$. Alors si $|x| < r$, on a $|xA| < 1$ et donc $|xA|^{n+1} \to 0$. On en déduit que la série de Taylor de f converge vers f sur l'intervalle $]-r, r[$, et donc f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 11.

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ :

1. $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.
2. $g(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $g(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
3. $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ si $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $h(0) = 0$.

Correction.

1. Pour $x \neq 0$, on a, d'après le développement en série entière de sin,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$
Cette égalité est encore vraie en 0, puisque les deux membres sont alors égaux à 1. Ainsi, f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec une série entière de rayon de convergence $+\infty$. f est donc de classe C^∞.
2. Pour $x \geq 0$, on a
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Pour $x < 0$, on a :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$
Ainsi, g coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$: elle est donc de classe C^∞.
3. Pour $x \neq 0$, on a
$$h(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$
On développe en série entière le numérateur et le dénominateur, en mettant en facteur le premier terme. On trouve
$$h(x) = \frac{x^2 \times \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}}{x^2 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}}.$$
Posant $u(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$ et $v(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$, on voit que pour $x \neq 0$, $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Or, u et v sont de classe C^∞ (ce sont des sommes de série entière), v ne s'annule pas en 0, et de plus $u(0)/v(0) = 0 = h(0)$. Ainsi, h définit bien une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 comme quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas en 0.

Exercice 12.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de

l'intervalle de définition ?

2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R,R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R,R[$. En déduire une expression de f sur $]-R,R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Correction.

1. Posons $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)}\to|x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x|<1$ et divergente pour $|x|>1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x=1$, la série $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x=-1$, la série $\sum_{n\geq1}\frac{-1}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1,1]$.
2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1,1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1,1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x\in[-1,1]$, on a
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right|\leq\frac{1}{n(2n+1)}$$
et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1,1]$. Comme chaque fonction $x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1,1]$.
3. La série dérivée est, pour $|x|<1$,
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\ln(1+x^2).$$
En effet, pour $x\in]-1,1[$, on a $0\leq x^2<1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1+u)$. Puisque $f(0)=0$, on en déduit $f(x)=\int_0^x\ln(1+t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :
$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x 1\times\ln(1+t^2)dt\\&=\left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x-\int_0^x\frac{2t^2}{1+t^2}dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\int_0^x\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\int_0^x\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\&=x\ln(1+x^2)-2\left[t-\arctan(t)\right]_0^x\\&=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x.\end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1,1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0,1]$ tout entier. On conclut que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13.

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1,1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Correction.

1. Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque
$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
on a aussi convergence en 1 et -1. L'intervalle de convergence est donc $[-1,1]$.
2. Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle $[-1,1]$. En effet, pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $n \geq 2$, on a
$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$
et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.
3. f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a
$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x).$$
Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$
La constante C se calcule en remarquant que $f(0) = 0 = C$.
4. L'égalité précédente est, a priori, vraie sur $]-1,1[$, mais puisque f et $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ sont continues en 1, elle est aussi vraie en 1. On en déduit
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$

b. Espaces préhilbertiens réels

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction.

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$. Or,

$$\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y, et donc que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0 \iff \lambda(2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|) \geq 0.$$

Dressant le tableau de signes de ce produit, il ne peut être toujours positif que si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ est toujours nul, c'est-à-dire si $y = 0$, ou si $2\langle x, y\rangle + \lambda\|y\|$ ne s'annule qu'en 0, c'est-à-dire si $\langle x, y\rangle = 0$. Dans les deux cas, on trouve bien que x et y sont orthogonaux.

Exercice 15.

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$;
4. $\mathrm{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Correction.

1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $y \in A^\perp$.
2. On commence par prendre $x \in (A \cup B)^\perp$, et prouvons que $x \in A^\perp$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in A \cup B$, et donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ceci montre la première inclusion. Réciproquement, si $x \in A^\perp \cap B^\perp$, prenons $y \in (A \cup B)$. Alors si $y \in A$, on a bien $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $x \in A^\perp$, et le cas où $y \in B$ se résout de la même façon.
3. D'après la première question, puisque $A \subset \mathrm{vect}(A)$, on a

$$\mathrm{vect}(A)^\perp \subset A^\perp.$$

Réciproquement, si $y \in A^\perp$, prenons $x \in \mathrm{vect}(A)$. Alors on peut trouver des éléments

$a_1, \dots, a_n$ de A et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle y, x\rangle &= \langle y, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n\rangle \\
&= \lambda_1\langle y, a_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle y, a_n\rangle \\
&= \lambda_1 0 + \dots + \lambda_n 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et donc $y \in \mathrm{vect}(A)^\perp$.

4. On va commencer par prouver que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Mais, soit $x \in A$. Choisissons $y \in A^\perp$. On a alors $\langle x, y\rangle = 0$, ce qui prouve que $x \in A^{\perp\perp}$. D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par A et on a bien l'inclusion demandée.
5. Notons $B = \mathrm{vect}(A)$ et $n = \dim(E)$. Alors d'après la question précédente,

$$(A^\perp)^\perp = (B^\perp)^\perp.$$

D'autre part,

$$\dim(B^\perp) = n - \dim B \implies \dim((B^\perp)^\perp) = n - \dim(B^\perp) = \dim(B).$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $B \subset (B^\perp)^\perp$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension. Ils sont donc égaux !

Exercice 16.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1),\ v = (1, 1, 1),\ w = (-1, -1, 0).$$

Correction.

Le premier vecteur est simplement $\frac{u}{\|u\|}$. Puisque $\|u\| = \sqrt{2}$, on a

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Cherchons ensuite e_2' sous la forme $e_2' = v + \lambda e_1$ de sorte que $\langle e_2', e_1\rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\langle e_2', e_1\rangle &= \langle v, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} + \lambda \\
&= \sqrt{2} + \lambda.
\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\lambda = -\sqrt{2}$ ce qui donne

$$e_2' = (0, 1, 0).$$

Il est déjà normalisé et donc on pose $e_2 = (0,1,0)$. Cherchons ensuite e_3' sous la forme

$$e_3' = w + \lambda e_1 + \mu e_2$$

de sorte que $\langle e_3', e_1\rangle = 0$ et $\langle e_3', e_2\rangle = 0$. Il vient :

$$\begin{array}{rcl} \langle e_3', e_1\rangle & = & \langle w, e_1\rangle + \lambda\langle e_1, e_1\rangle \\ & = & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \lambda \end{array}$$

d'où il vient $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle e_3', e_2\rangle & = & \langle w, e_2\rangle + \mu\langle e_2, e_2\rangle \\ & = & -1 + \mu \end{array}$$

d'où $\mu = 1$. On en déduit que

$$e_3' = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

On normalise ce vecteur, et on trouve

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 17.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Correction.

On va orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1. Sa norme est $\sqrt{2}$. On pose donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite

$$Q_1(X) = X + \lambda P$$

où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P\rangle = 0$. Mais,

$$\langle Q_1, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}dt + \lambda\langle P, P\rangle = \lambda.$$

On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux !), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en

$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$

On pose enfin
$$R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$$
de sorte que $\langle R_1, P\rangle = 0$ et $\langle R_1, Q\rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X, et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,
$$\langle R_1, P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$
On trouve $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc
$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$
Reste à normaliser ce vecteur en
$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1).$$
Ainsi, $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2-1)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 18.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par
$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+t = 0 \text{ et } x+y+2z-t = 0\}.$$
Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1,8,1,1)$ sur F.

Correction.

On commencer par rechercher une base de F. Pour cela on écrit que
$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in F &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t &=& 0\\ x+y+2z-t &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+t &=& 0 & \\ 2z-2t &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcll} x &=& -y & -t\\ y &=& y & \\ z &=& & t\\ t &=& & t\end{array}\right.\end{aligned}$$
Ainsi, si on pose $u_1 = (-1,1,0,0)$ et $u_2 = (-1,0,1,1)$, on trouve que (u_1,u_2) est une base de F. Notons ensuite $p_F(u)$ le projeté orthogonal de F sur u et donnons deux méthodes pour le calculer. Une première méthode consiste à écrire que $p_F(u) = au_1 + bu_2 = (-a-b, a, b, b)$ de sorte que $u - p_F(u) = (1+a+b, 8-a, 1-b, 1-b)$. On sait que $u - p_F(u) \perp u_1$. Calculant le produit scalaire, on trouve
$$-1-a-b+8-a = 0 \iff 2a+b = 7.$$
On sait aussi que $u - p_F(u) \perp u_2$ et toujours avec l'aide du produit scalaire :
$$-1-a-b+1-b+1-b = 0 \iff a+3b = 1.$$

Ainsi, (a,b) est solution du système suivant, que l'on va résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+3b & = & 1 \\ 2a+b & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+3b & = & 1 \\ -5b & = & 5 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 4 \\ b & = & -1 \end{array}\right.$$

On trouve $p_F(u) = (-3,4,-1,-1)$. Deuxième méthode : on va orthonormaliser la base (u_1,u_2). Puisque $\|u_1\| = \sqrt{2}$, on pose

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0).$$

On cherche ensuite $u_2' = u_2 + \alpha v_1$ de sorte que $\langle u_2', v_1\rangle = 0$. Ceci donne

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

On obtient

$$u_2' = (-1,0,1,1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

D'autre part,

$$\|u_2'\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{10}{4}$$

et donc on pose

$$v_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-1,2,2).$$

On sait ensuite que $p_F(u) = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2$. Or,

$$\langle u, v_1\rangle = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ et } \langle u, v_2\rangle = \frac{-5}{\sqrt{10}}$$

de sorte que

$$\langle u, v_1\rangle v_1 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$$

et

$$\langle u, v_2\rangle v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1\right).$$

Après un dernier petit calcul, on retrouve bien $p_F(u) = (-3,4,-1,-1)$.

Exercice 19.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de x^2 sur $F = \mathrm{vect}(1,x)$.

Correction.

On va étudier deux façons de répondre à cet exercice. La première consiste à calculer une base orthonormée de F, et d'utiliser l'expression de la projection dans une base orthonormée. Posons

$e_1 = 1$ et $e_2 = x$, qui est une base de $F = \mathrm{vect}(1, x)$. On va orthonormaliser cette base en une base orthonormale (u_1, u_2). D'abord on a

$$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = 1.$$

Ensuite, on chercher $u_2' \in \mathrm{vect}(u_1, e_2)$ tel que $u_2' \perp u_1$. Pour cela, on écrit $u_2' = e_1 + \lambda_1 u_1$. On a

$$\begin{aligned} u_2' \perp u_1 &\iff \langle u_2', u_1 \rangle = 0 \\ &\iff \langle e_1, u_1 \rangle + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \int_0^1 x dx + \lambda_1 = 0 \\ &\iff \lambda_1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_2' = x - \frac{1}{2}$ est orthogonal à u_1 et $\mathrm{vect}(u_1, u_2') = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$. On normalise ensuite u_2' :

$$\|u_2'\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}$$

et

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \sqrt{12} u_2' = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Il vient alors

$$p_F(x^2) = \langle x^2, u_2 \rangle u_2 + \langle x^2, u_1 \rangle u_1.$$

Or

$$\langle x^2, u_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x^3 - x^2) dx = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

et

$$\langle x^2, u_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

On obtient pour conclure

$$p_F(x^2) = \frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{3} = x - \frac{1}{6}.$$

L'autre méthode consiste à écrire a priori que $p_F(x^2) = ax + b$ puis à déterminer a et b en écrivant que

$$\begin{aligned} x^2 - p_F(x^2) \perp 1 &\iff \langle x^2 - ax - b, 1 \rangle = 0 \\ &\iff \int_0^1 (x^2 - ax - b) dx = 0 \\ &\iff \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 - p_F(x^2) \perp x &\iff \langle x^2 - ax - b, x \rangle = 0 \\ &\iff \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx) dx = 0 \\ &\iff \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0. \end{aligned}$$

On obtient un système que l'on résout facilement :

$$\left\{\begin{array}{lll}\frac{1}{3}-\frac{a}{2}-b & = & 0\\ \frac{1}{4}-\frac{a}{3}-\frac{b}{2} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll}a & = & 1\\ b & = & -1/6.\end{array}\right.$$

On retrouve bien sûr le même projeté orthogonal $p_F(x^2)=x-\frac{1}{6}$.

Exercice 20.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $u(3,4,3)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z=0$.

Correction.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est donnée par $v=(2,1,-1)$. Ainsi, par une formule du cours,

$$d(u,\mathcal{P})=\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|}=\frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 21.

Soit $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M,N\rangle=\operatorname{Tr}(M^TN).$$

On pose $F=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F.

Correction.

1. On remarque d'abord qu'une matrice M appartient à F si et seulement si elle s'écrit aI_2+bK avec $K=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ Autrement dit, F est l'espace vectoriel engendré par les matrices I_2 et K. Soit $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ un élément de E. Alors M est élément de $F^\perp$ si et seulement si M est orthogonale à I_2 et à K. Maintenant,
$$\langle M,I_2\rangle=x+t \text{ et } \langle M,K\rangle=y-z.$$
Ainsi, M est élément de $F^\perp$ si et seulement si $t=-x$ et $z=y$. Autrement dit, on a prouvé que
$$F^\perp=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Une base de $F^\perp$ est donnée par (A,B), avec

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

On va orthonormaliser cette base pour obtenir une base orthonormale de $F^\perp$. On ne va pas avoir à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car A et B sont déjà orthogonales : $\langle A,B\rangle=0$. De plus,

$$\|A\|=\|B\|=\sqrt{2}$$

comme le montre un rapide calcul. Si on pose

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{2}}A \text{ et } B_1=\frac{1}{\sqrt{2}}B,$$

alors (A_1,B_1) est une base orthonormée de $F^\perp$.

2. Il suffit d'appliquer le résultat qui exprime le projeté dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned}p_{F^\perp}(J)&=\langle J,A_1\rangle A_1+\langle J,B_1\rangle B_1\\&=0+\frac{2}{\sqrt{2}}B_1\\&=B.\end{aligned}$$

3. On sait que

$$\mathrm{dist}(J,F)=\|J-p_F(J)\|=\|p_{F^\perp}(J)\|=\|B\|=\sqrt{2}.$$

Exercice 22.

Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3,b_0+b_1X+b_2X^2+b_3X^3)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H=\{P\in E;\ P(1)=0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Correction.

1. Puisque H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3. Pour trouver une base de H, il suffit de trouver trois vecteurs indépendants. Posons par exemple $R_1(X)=X-1$, $R_2(X)=X^2-X$ et $R_3(X)=X^3-X^2$. (R_1,R_2,R_3) est une famille de 3 éléments de H, qui est libre car les degrés respectifs des R_i sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan. Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connait l'équation d'un sous-espace

vectoriel. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a donc

$$\begin{aligned} P \in H &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrrr} a_0 & = & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & = & a_1 & & \\ a_2 & = & & a_2 & \\ a_3 & = & & & a_3. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cette méthode donne comme base $(X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1)$.

2. Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente. On a donc :

$$P_1 = R_1/\|R_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}}(X - 1).$$

Posons $P_2' = R_2 + \lambda P_1$, avec λ de sorte que $(P_2', P_1) = 0$, ce qui entraîne $\lambda = -(P_1, R_2)$. Après normalisation, on trouve

$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2).$$

On procède de même pour P_3, et on trouve

$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left(X^3 - (X^2 + X + 1)/3\right).$$

3. On a

$$P_H(x) = \sum_{j=1}^{3}(X, P_j)P_j = \frac{-1}{4}\left(X^3 + X^2 - 3X + 1\right).$$

Il vient :

$$d^2(x, H) = \|x\|^2 - \|P_H(x)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Si on n'avait pas calculé une base orthonormale de H, on aurait pu remarquer que le polynôme $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ est normal à l'hyperplan H et donc que

$$d(X, H) = \frac{|\langle X, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 23.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Correction.

1. On commence par trouver une base de G. Mais on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2 & = & 0 \\ x_3+x_4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & -x_1 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & -x_3. \end{array}\right.$$
On en déduit que (e_1-e_2, e_3-e_4) est une base de G. Ces deux vecteurs sont déjà orthogonaux, il suffit de les normaliser. Si on pose $u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3-e_4)$, alors (u_1,u_2) est une base orthonormale de G.
2. On va calculer $p_G(e_i)$ par la formule
$$p_G(e_i)=\langle e_i,u_1\rangle u_1+\langle e_i,u_2\rangle u_2.$$
On en déduit que la matrice de p_G dans la base canonique est
$$\frac12\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$
3. On sait que $d(x,G)=\|x-p_G(x)\|$. Écrivons $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Alors
$$p_G(x)=\frac12(x_1-x_2,-x_1+x_2,x_3-x_4,-x_3+x_4)$$
et donc
$$x-p_G(x)=\frac12(x_1+x_2,x_1+x_2,x_3+x_4,x_3+x_4).$$
Il vient
$$d(x,G)^2=\frac12\left((x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2\right).$$

Exercice 24.

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A=\frac16\left(\begin{array}{ccc} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right).$$
Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1,1,1)$ à ce plan.

Correction.

On commence par remarquer que $A^2=A$. Ainsi, p est bien une projection. On va calculer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$. Il suffira ensuite de démontrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour pouvoir conclure. On remarque d'abord que $(x,y,z) \in \ker(p)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-2y+z &=& 0\\ -2x+2y+2z &=& 0\\ x+2y+5z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+5z &=& 0\\ 6y+12z &=& 0\\ -12y-24z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z\\ y &=& -2z\\ z &=& z\end{array}\right.$$

Ainsi, $\ker(p) = \mathrm{vect}(u)$, où $u = (-1,-2,1)$. On en déduit (on sait déjà que p est une projection) que $\mathrm{Im}(p)$ est de dimension 2. Puisque $p(e_1)$ et $p(e_2)$ sont indépendants, en posant $v = (5,-2,1)$ et $w = (-2,2,2)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{vect}(v,w)$. Pour démontrer que p est une projection orthogonale, il reste à prouver que $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. Mais $u \perp v$ et $u \perp w$, donc on a bien $\mathrm{vect}(u) \perp \mathrm{vect}(v,w)$. Puisque u est un vecteur normal au plan $\mathrm{Im}(p)$, une équation de ce plan est

$$-x-2y+z=0.$$

Enfin, on calcule la distance de $(1,1,1)$ au plan $\mathrm{Im}(p)$ par la formule du cours :

$$d = \frac{|\langle u,(1,1,1)\rangle|}{\|u\|} = \frac{|-1-2+1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 25.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3,4,5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

Correction.

Un vecteur normal du plan est $u = (2,1,-1)$. Un point du plan est $A = (0,0,2)$. On en déduit que la distance recherchée est

$$d = \frac{|\langle u,\overrightarrow{AM}\rangle|}{\|u\|} = \frac{\langle (2,1,-1),(3,4,3)\rangle}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

2. Exercices d'entraînement

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 26.

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Correction.

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \exp(\lambda \arcsin x) \\ f'(x) & = & \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\ f''(x) & = & \dfrac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \dfrac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x). \end{array}$$

   On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $t \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$

   Ceci doit être identiquement nul sur $]-R, R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + \lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

   De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - x^2 \neq 0$ sur $]-1, 1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 27.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Correction.

1. La fonction $x \mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u = -t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.
2. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.
3. Par dérivation d'un produit, on a
$$f'(x) = xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-x^2/2}dt + 1 = xf(x) + 1.$$
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = xy + 1$. Écrivons ensuite $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$
et $a_0 = 1$. On en déduit finalement que
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$
Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Procédant ainsi, on ne trouverait pas facilement la même réponse, mais plutôt un terme devant x^{2n+1} qui s'écrit comme une somme. Par identification, on en déduirait une jolie identité combinatoire.

Exercice 28.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du.$$
On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(xu)du$.
2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1}R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Correction.

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. On sait que f^{n+1} est croissante sur I puisque $f^{(n+2)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $u \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$. Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.
3. Il s'agit de démontrer que $R_n(x)$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite $(R_n(\alpha))$ est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour $x = \alpha$, et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$. Et donc $(R_n(x))$ tend bien vers 0.

b. Espaces préhilbertiens réels

Exercice 29.

On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Correction.

Soit $g \in F^\perp$. Remarquons que la fonction h définie par $h(x) = xg(x)$ est dans F. On en déduit que $(g,h) = 0$, ce qui donne $\int_0^1 xg^2(x) = 0$. Or, la fonction $x \mapsto xg^2(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$. Puisque son intégrale est nulle, c'est qu'il s'agit de la fonction identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = 0$. Maintenant, g est continue, et donc on obtient que g est identiquement nulle. Ainsi, $F^\perp = \{0\}$. D'autre part, si F admettait un supplémentaire orthogonal, on aurait $F \oplus F^\perp = E$. Ici, $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal !

3. Exercices d'approfondissement

a. Régularité des séries entières et développements en série entières

Exercice 30.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que $\int_0^{+\infty} t^{2k+1} e^{-t^2} dt = \frac{k!}{2}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt$$

   (a) en procédant à une intégration terme à terme ;
   (b) en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto t^{2k+1}e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, on a $t^{2k+1}e^{-t^2} = o(t^{-2})$. Ceci justifie la convergence de $I_k = \int_0^{+\infty} t^{2k+1}e^{-t^2}dt$. De plus, en réalisant une intégration par parties (on intègre te^{-t^2} et on dérive t^{2k}), on a pour $k \geq 1$
$$I_k = \left[\frac{-1}{2}t^{2k+1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} t^{2k-1}e^{-t^2}dt = kI_{k-1}.$$
Comme de plus
$$I_0 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2},$$
on en déduit que $I_k = \frac{k!}{2}$.
2. (a) Puisque la fonction sinus est développable en série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on a
$$\sin(xt) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1},$$
c'est-à-dire que
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}dt.$$
On va ensuite permuter la série et l'intégrale en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. En effet, on a
$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}\right| dt \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}I_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}.$$
Or, posons $u_k = \frac{k!}{2(2k+1)!}|x|^{2k+1}$. On a
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+1)|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} \to 0.$$
Par le critère de d'Alembert, la série $\sum_k u_k$ converge, il en est donc de même de la série $\sum_k \int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}\right| dt$. Par le théorème d'intégration terme à terme, on peut permuter la série et l'intégration, et on obtient donc
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(tx)^{2k+1}e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{2(2k+1)!}x^{2k+1}.$$
(b) On va appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres. Pour cela, posons $g(x,t) = e^{-t^2}\sin(tx)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$. De plus, on a
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\cos(tx)$$
ce qui implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on a
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq te^{-t^2}.$$

Cette dernière fonction (qui ne dépend plus de x) est intégrable sur $[0,+\infty[$. Ainsi, f est dérivable et
$$f'(x)=\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(tx)dt.$$
Pour former une équation différentielle vérifiée par f, on va intégrer par parties, en intégrant te^{-t^2} et en dérivant $\cos(tx)$. Il vient
$$f'(x)=\left[\frac{-1}{2}e^{-t^2}\cos(tx)\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\sin(tx)dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}f(x).$$
Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $2y'+xy=1$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; d'après le théorème de Cauchy, f est la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(0)=0$. Cherchons maintenant une solution $y(x)=\sum_{k\geq 1}a_kx^k$ de cette équation différentielle vérifiant $y(0)=0$. On a
$$2\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{k+1}=1$$
soit
$$2a_1+\sum_{k=0}^{+\infty}\left((k+2)a_{k+2}+a_k\right)x^{k+1}=1.$$
Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1=\frac{1}{2}$ puis que $a_{k+2}=\frac{-a_k}{k+2}$. Après un calcul standard, on trouve (évidemment !) le même développement en série entière qu'à la question précédente.

Exercice 31.

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}e^{n^2ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque k, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\geq k^ke^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Correction.

1. Posons $u_n(x)=e^{-n}e^{n^2ix}$. Alors u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\geq 0$, on a
$$u_n^{(k)}(x)=(in^2)^ke^{-n}e^{n^2ix}.$$
Puisque $n^{2k}e^{-n}=O(n^{-2})$, il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$|u_n^{(k)}(x)|\leq Mn^{-2}.$$
La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées k-ièmes $\sum_{n\geq 0}u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k\geq 0$. Ainsi, $f=\sum_n u_n$ est de classe C^∞.

2. D'après le calcul précédent, on a $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n\geq 0} n^{2k}e^{-n} \geq k^{2k}e^{-k}$. Or, $k^k \geq k!$, et donc

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \geq \frac{k^k}{k!}k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}.$$

3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide I centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, f serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Mais pour $x \neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \geq k^k(x/e)^k \to +\infty$$

(on peut aussi vérifier la non-convergence par le critère de d'Alembert). Ainsi, f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 32.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n) ?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Correction.

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 1$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. La suite (b_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_0 & = & \frac{1}{a_0} \\ b_n & = & \frac{-1}{a_0}\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \end{array}\right.$$

2. Soit $R > 0$ tel que $|a_n| \leq R^n$ pour $n \geq 1$, et on pose $C > 0$ suffisamment grand pour que
$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|$$
On va prouver par récurrence sur n que $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors
$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{n} \frac{R^k}{C^k}\frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de (b_n), on a $f(z)g(z) = 1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g = 1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

Exercice 33.

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que
$$k = \operatorname{card}\big\{i \in \{1,\dots,n\};\ s(i) = i\big\}.$$
On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1,2,3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Correction.

1. Puisque $\{1,2,3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
   - les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que
$$D_{3,0} = 2,\ \ D_{3,1} = 3,\ \ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$

2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ ayant k point fixes, alors la famille $A_0,\dots,A_n$ forme une partition de l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   — $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
   — ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

   Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k}D_{n-k,0}$.
4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z|<1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.
5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x|<1$. De plus, on a

$$(\exp x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{1}{n!}.$$

   Mais

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = 1.$$

   On obtient

$$(\exp x)f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x)f(x) = \frac{1}{1-x}$, on tire

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

   On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

   Par identification, on obtient bien $d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
7. La probabilité recherchée est $p_n = d_n/n! = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1) = 1/e$.

Exercice 34.

On rappelle qu'une involution de $\{1,\dots,n\}$ est une application $s : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors

$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$

2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1,1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Correction.

1. Considérons s une involution de $\{1,\dots,n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $\{1,\dots,n\}$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $\{1,\dots,n\}$. Dans ce cas, $s(k) = n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Une involution est nécessaire bijective. Donc $I_n \leq n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1.
3. On a
$$(1+x)S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_n - nI_{n-1}}{n!} x^n.$$
En utilisant le résultat de la première question, on obtient
$$(1+x)S(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x).$$
4. La résolution de l'équation différentielle donne
$$S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} = e^x e^{\frac{x^2}{2}}.$$
On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve
$$I_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!} \text{ et } I_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$

b. Espaces préhilbertiens réels

Exercice 35.

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u+v \perp u-v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve

l'orthogonalité : pour tout couple $(x, y) \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

(a) Prouver le sens direct.

(b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Démontrer que, pour tout couple (i, j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

(c) Démontrer le sens réciproque.

Correction.

1. On va utiliser la formule de polarisation
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
Si on applique cette formule à $x = u+v$ et $y = u-v$, x et y sont orthogonaux et on trouve $\|u\| = \|v\|$.

2. Bien sûr, le sens réciproque est trivial puisqu'il suffit de choisir $x = y$. Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda x$. Alors, par la formule de polarisation rappelée ci-dessus qu'on utilise deux fois :
$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\lambda^2\|x+y\|^2 - \lambda^2\|x-y\|^2\right)\\
&= \frac{\lambda^2}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\
&= \lambda^2\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

3. (a) C'est trivial d'après la question précédente.

   (b) On sait que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

   (c) Soit $\lambda > 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ. Soit $x \in E$ qui s'écrit
$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$
Alors
$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$
La famille $(f(e_i))$ étant orthogonale, on a
$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2\|f(e_i)\|^2\\
&= \lambda^2\sum_{i=1}^n |x_i|^2\\
&= \lambda^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$
f est bien une similitude de rapport λ.

Exercice 36.

Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

2. Montrer que X_0 est l'unique solution de

$$A^T AX = A^T B.$$

3. Application : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Correction.

1. Puisque A est de rang p, l'application $X \mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Or, $\inf\{\|AX-B\|;\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ est la distance de B à $\mathrm{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0.
2. On a

$$\begin{aligned} AX_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z \in \mathrm{Im}(A),\ AX_0 - B \perp Z \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX_0 - B \perp AX \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T(AX_0 - B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X^T(A^T AX_0 - A^T B) = 0 \\ &\iff A^T AX_0 = A^T B. \end{aligned}$$

   X_0 est donc bien l'unique solution de $A^T AX = A^T B$.
3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2. La borne inférieure est donc atteinte en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ solution de $A^T AX_0 = A^T B$.. Or

$$A^T AX_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A^T B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que $x_0 = -1/2$ et $y_0 = 0$, et donc l'infimum recherché vaut $7/2$.