Corrigé du devoir surveillé n°5

Exercice 1.

Calculer les éléments propres puis diagonaliser, quand c'est possible, les matrices suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction.

— $\chi_A = (X-1)(X+1)(X+2)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

— $\chi_B = (X-1)^3$ et $\dim E_1(B) = 1$ car $E_1(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc B n'est pas diagonalisable car $\dim E_1(B) = 1 \neq 3 = m(1)$.

— $\chi_C = X(X-2)^2$ et $\dim E_0(C) = 1 = m(0)$, $\dim E_2(C) = 2 = m(2)$ car $E_0(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc C est diagonalisable et $C = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. *E3A 2021*

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\, dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ.**
   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   2.2. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)dt.$$

3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})$.

3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))$.

3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
Démontrer que la famille $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Correction.

1. On a $\deg(1) = 0, \ \deg(X-1) = 1, \ldots, \deg(X^k(X-1)) = k+1, \deg(X^{n-1}(X-1)) = n$.
La famille $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette famille de polynômes est échelonnée en degré donc est libre.
$\mathcal{B}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc $\boxed{\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. **Généralités sur φ.**

2.1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \int_0^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^1 P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^1 P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2).$$

Donc φ est linéaire. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ et $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$

2.2. $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est de dimension 1, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 0 ou 1. On a $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1 \neq 0$ donc φ est non nulle, $\mathrm{rg}(\varphi) \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 1 donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.}$
Par le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(\varphi) = (n+1) - 1 = n$. $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. 3.1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \int_0^x (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt = \lambda_1 \int_0^x P_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^x P_2(t)dt = \lambda_1 \varphi(P_1)(x) + \lambda_2 \varphi(P_2)$$

Donc $\psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2)$. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est linéaire.}}$

3.2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(X^k)(x) = \int_0^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On en déduit que $\psi(X^k) = \dfrac{1}{k+1}X^{k+1}$. Puisque $(1, X, \ldots, X^k, \ldots X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \ldots, \psi(X^k), \ldots, \psi(X^n)) &= \mathrm{Vect}\left(X, \frac{1}{2}X^2, \ldots, \frac{1}{k+1}X^{k+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}X^{n+1}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{k+1}, \ldots, X^{n+1}\right). \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^{k+1}, \ldots, X^{n+1}\right).}$

3.3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi(P)(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine du polynôme } \psi(P) \\ &\Leftrightarrow (X-1) \text{ divise le polynôme } \psi(P). \end{aligned}$$

Montrons l'équivalence demandée.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $(X-1)$ divise $\psi(P)$. De plus, $\psi(P)(0) = 0$ donc X divise $\psi(P)$. On en déduit que $X(X-1)$ divise $\psi(P)$ avec $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $\psi(P) \in X(X-1)\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Ainsi $\psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$.
Finalement, on a montré que : $\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(P) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right).}$

3.4. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $R_k(X) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$.
On remarque que $\deg(R_k) = k$ donc la famille $(R_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré donc libre. De plus

$$\psi(R_k) = (k+1)\psi(X^k) - k\psi(X^{k-1}) = (k+1)\frac{X^{k+1}}{k+1} - k\frac{X^k}{k} = X^{k+1} - X^k = X^k(X-1).$$

Donc $\psi(R_k) \in \mathrm{Vect}\left(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)\right)$. D'après la question **3.3.**, $R_k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
D'après la question **2.2.**, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension n.
$(R_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de cardinal n dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qui est de dimension n, donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
$\boxed{(R_k)_{1 \leq k \leq n} = \left((k+1)X^k - kX^{k-1}\right)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\varphi).}$

4. 4.1. On a $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = (n+1) \times 1$. Donc $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = n+1.}$

4.2. Pour $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$, calculons $\psi_k(X^\ell)$. On pose $P(X) = X^\ell$.

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Si } k \le \ell - 1: & P^{(k)}(X) & = & \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)X^{\ell-k}. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \\ \text{Si } k = \ell: & P^{(\ell)}(X) & = & \ell!\ . & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(\ell)}(0)}{\ell!} = 1. \\ \text{Si } k \ge \ell + 1: & P^{(k)}(X) & = & 0. & \psi_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi $\boxed{\psi_k(X^\ell) = \delta_{k,\ell} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{array}\right. .}$

Montrons que la famille $(\psi_k)_{0\le k\le n}$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k = 0$. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

On a $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_\ell = 0$ donc la famille est libre.
La famille $(\psi_k)_{0\le k\le n}$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathcal{H}$ qui est de dimension $n+1$, donc c'est une base de $\mathcal{H}$. $\boxed{(\psi_0,\dots,\psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}.}$

4.3. φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\varphi \in \mathcal{H}$.
Soient $(\lambda_k)_{0\le k\le n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coordonnées de φ dans la base $(\psi_0,\dots,\psi_n)$ de $\mathcal{H}$: $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k$. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$.

$$\varphi(X^\ell) = \int_0^1 t^\ell dt = \frac{1}{\ell+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k\right)(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \psi_k(X^\ell) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{k,\ell} = \lambda_\ell.$$

Donc $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_\ell = \dfrac{1}{\ell+1}$. Ainsi $\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\psi_k.}$

Exercice 3. *CCP 2014*

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

II.1. Soit p un projecteur de E.

II.1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

II.1.b En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

II.1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

II.2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

II.3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

II.3.a Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

II.3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

II.3.c On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

II.3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

Correction.

II.1.

II.1.a Soit $x \in E$. Alors on a $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$. En effet, il est clair que $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E.$$

donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.
Par suite, on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
De plus, pour $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, on a, pour y un antécédent de x par p (y existe car $x \in \mathrm{Im}(p)$) :

$$x = p(y) = p^2(y) = p(p(y)) = p(x) = 0_E.$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$; donc $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe.
Il en résulte que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E.

On aurait pu également utiliser le lemme de décomposition des noyaux en remarquant que $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de p et que $Ker(p - Id_E) = Im(p)$.

II.1.b Notons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, où $r = \mathrm{rg}(p)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

Alors $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et d'après le lemme, la matrice de p dans la base e se décompose par blocs selon $\mathrm{mat}(p, e) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$, où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes.

Ainsi $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(p, e)) = r = \mathrm{rg}(p)$.

II.1.c Prenons f une base de E et considérons l'endomorphisme u de E défini par :

$$\mathrm{mat}(u, f) = M = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \multirow{2}{*}{$0_{2,n-2}$} \\ 0 & -1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{n-2,2}} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right) \text{ (on a bien } n \geq 2).$$

Alors $\mathrm{Tr}(u) = 2 = \mathrm{rg}(u)$, mais $M^2 \neq M$, donc u n'est pas un projecteur. Ainsi un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur de E.

II.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable, et son rang vaut 1.

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi B est aussi de rang 1.

Si B était diagonalisable, comme $chi_B = X^3$, B serait semblable à la matrice nulle, donc on aurait $B = 0$ ce qui est faux. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

II.3.

II.3.a D'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1$, donc il existe une base de $\mathrm{Ker}(u)$ de la forme $(e_1, \cdots, e_{n-1})$. On peut la compléter en une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $u(e_i) = 0$, donc en posant $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$,

$$\text{on a bien } \mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

II.3.b Supposons d'abord que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Alors $a_n = 0$ et la matrice de u étant triangulaire supérieure, $chi_u(X) = X^n$, donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$. Alors si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait nulle, ce qui est faux car $rg(u) = 1$. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$. Alors $a_n \neq 0$ et $chi_u(X) = X^{n-1}(X - a_n)$, donc il existe un vecteur propre f_n associé à a_n. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on sait alors que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$ est une base de vecteurs propres de E, donc u est diagonalisable.

II.3.c Avec les notations de la question précédente, $a_n = 1 \neq 0$

et $\mathrm{mat}(u, (e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = M$. On a $M^2 = M$, donc u est un projecteur.

II.3.d Les trois colonnes de A étant 2 à 2 colinéaires et non nulles, $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $\mathrm{Tr}(A) = 1$, donc d'après la question précédente, A est une matrice de projecteur.

Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$, or on vérifie que A annule les deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4. *E3A 2020*

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines.
   Donner, sans démonstration, les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.
2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n.$$
   On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.
   On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

Exercice

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathscr{C},\ S(x) = z,\ \text{avec}\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathscr{C},\ T(x) = y,\ \text{avec}\quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.
3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.
4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même de S.
5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
   Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.
6. Étude de l'endomorphisme S
   Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. Étude de l'endomorphisme T
   On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   (a) Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\operatorname{Ker}(T-\lambda \operatorname{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
   On pourra utiliser les questions de cours.
   (b) L'endomorphisme T est-il injectif ?
   (c) Déterminer $\operatorname{Ker}(T-2\operatorname{id}_{\mathscr{C}})$ et $\operatorname{Ker}(T+2\operatorname{id}_{\mathscr{C}})$.
   (d) Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.
8. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
   Soit N l'application qui, à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.
   (a) Vérifier que, pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.
   (b) Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.
   (c) Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?
   (d) Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.
   (e) Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Correction.

Questions de cours

1. Avec $a \neq 0$. Si s_1 et s_2 sont les racines de $aX^2 + bX + c$, on a : $aX^2 + bx + c = a(X - s_1)(X - s_2)$ donc $\boxed{\sigma_1 = s_1 + s_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \sigma_2 = s_1 s_2 = \frac{c}{a}}$
2. On note $\mathcal{C}$ l'équation caractéristique
   — Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \middle| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$
   — Si r est solutions double de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \middle| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n}$
   — Si $\mathcal{C}$ possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées. On note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi[$. Alors $\boxed{\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \middle| \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))r^n}$

****

1. La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathscr{C}$
2.
   - $\mathscr{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
   - Soit $(x, x') \in \mathscr{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y'.
     On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} =$

$\alpha x_{-n}+\beta x'_{-n}$.
Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi $y\in\mathscr{C}$. Et donc $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{C}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leq A$.
De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_{-n}|\leq B$.
On pose alors $C=\max(A,B)$, et on a : $\forall n\in\mathbb{Z}, |x_n|\leq C$: la suite x est bornée.
Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathscr{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{C}$. Soit $y=T(x)=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. On a : $\forall n\in\mathbb{Z}, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$. Ainsi :
   - $\forall n\in\mathbb{N}^*, y_n=x_{n-1}+x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   - De même $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

   Ainsi $y\in\mathscr{C}$.
   On en déduit que T est une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$.
   Montrons la linéarité. Soit $(x,x')\in\mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. On pose $y=T(x)$, $y'=T(x')$, $z=\alpha x+\beta x'$, et $w=T(z)$ et $v=\alpha y+\beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x+\beta x')=\alpha T(x)+\beta T(x')$ i.e. $v=w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v.
   On a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:
   $v_n=\alpha y_n+\beta y'_n=\alpha\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right)+\beta\left(x'_{n-1}+x'_{n+1}\right)=\left(\alpha x_{n-1}+\beta x'_{n-1}\right)+\left(\alpha x_{n+1}+\beta x'_{n+1}\right)$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1}+z_{n+1}=w_n$. Donc $v=w$.
   Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}}$

5.
   - Méthode 1. On a clairement $S\circ S=\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ et donc son axe, $\ker(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, et sa direction, $\ker(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}$.
     Or on a tout aussi clairement $F=\{x\in\mathscr{C};\forall n\in\mathbb{Z}, x_n=x_{-n}\}=\{x\in\mathscr{C}; S(x)=x\}=\ker(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G=\ker(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathscr{C}}$
   - Méthode 2. On a $F=\ker(S-\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G=\ker(S+\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe i.e. $F+G=F\oplus G$.
     De plus, si $x\in\mathscr{C}$, $x'=\frac{1}{2}(x+S(x))$ et $x''=\frac{1}{2}(x-S(x))$, on montre aisément $x=x'+x''$, $x'\in F$ et $x''\in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C}=F+G$.
     Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :
   $\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

(a) Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}$. Soit $x \in \ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n-1} + x_{n+1} = \lambda x_n$. En particulier :
$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \lambda x_{n+1} + x_n = 0$ et, en posant $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x'_{n+2} - \lambda x'_{n+1} + x'_n = 0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta > 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A, B, C, D tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar^n + \frac{B}{r^n}$ et $x'_n = Cr^n + \frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc $A = 0 = C$. De plus $x_0 = x'_0$ donc $B = D$. Enfin $x'_1 + x_1 = \lambda x_0$ donc $(\lambda - 2r)\,B = 0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) \subset \{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$
- Si $\Delta < 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjugués distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.
  D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent [a] car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) \subset \{0_{\mathscr{C}}\}$
  S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}$, $\boxed{\ker(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}}$

(b) On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\ker(T) = \{0_{\mathscr{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

(c)
- Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \ker(T - 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante.
  Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T - 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.
  Ainsi $\boxed{\ker(T - 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$
- Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \ker(T + 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle.
  Ainsi $\boxed{\ker(T + 2\mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}}$

(d) Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{T \text{ ne possède qu'une valeur propre : } 2}$

8. .

(a) Soit $x \in \mathscr{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq A$. Ainsi, si on pose $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq$

$u_n \leq \frac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

(b)
- N est bien une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathbb{R}^+$
- Séparation. Soit $x \in \mathscr{C}$ telle que $N(x) = 0$. On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$. On a $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$ i.e. x est la suite nulle.
- Homogénéité. Soit $x \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $y = \lambda x$, $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n. On a :
  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{|\lambda x_n|+|\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n} = |u_n|$. Ainsi par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ i.e. $\underline{N(\lambda x) = |\lambda| N(x)}$
- Inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}^2$. Soit $z = x + y$. On note x_n, y_n, z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$.
  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|z_n|+|z_{-n}|}{2^n} \leq \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n} + \frac{|y_n|+|y_{-n}|}{2^n}$.
  Donc en passant à la somme, on obtient $\underline{N(x+y) \leq N(x) + N(y)}$

Ainsi $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathscr{C}}$

(c) Soit $x \in \mathscr{C}$ et $x' = S(x)$. On note $u_n = \frac{|x_n|+|x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|x'_n|+|x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ donc $N(x') = N(x)$.
Ainsi S conserve la norme N i.e. $\boxed{S \text{ est une isométrie de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$.
En prenant $k = 1$, on a établi : $\forall x \in \mathscr{C}, N(S(x)) \leq kN(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, $\boxed{S \text{ est un endomorphisme continu de } (\mathscr{C}, N)}$.

(d) $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est également une application continue de $(\mathscr{C}, N)$ vers lui-même, donc $R = S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est continue sur $(\mathscr{C}, N)$. Donc $F = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = R^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\boxed{F \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$.
De même $\boxed{G \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$ car $G = (S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$.

(e) On considère la suite $\left(x^{(P)}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathscr{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(P)} = 2^n$ si $n \in [\![1, P]\!]$, $x_n^{(P)} = 0$ sinon. Les suites $x^{(P)}$ sont bien dans $\mathscr{C}$ et on a $N\left(x^{(P)}\right) = \sum_{n=1}^{P} 1 = P$ et $\left\|x^{(P)}\right\|_\infty = 2^P$. Comme la suite $\left(\frac{2^P}{P}\right)_{P\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\|x^{(P)}\|_\infty}{N(x^{(P)})}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathscr{C} \setminus \{0_{\mathscr{C}}\}, \|x\|_\infty \leq KN(x)$.
Ainsi $\boxed{\text{les deux normes } N \text{ et } \|\ \|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes}}$

a. Fallait-il démontrer ce résultat classique ici ?