Chapitre IX

Endomorphismes d'un espace euclidien

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel (pas forcément de dimension finie).

Partie $*$

Rappels sur les espaces préhilbertiens réels

1. Rappels sur le produit scalaire

a. Produit scalaire

Définition $*1$. Produit scalaire

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque $*1$.

Usuellement, on note un produit scalaire de deux vecteurs $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$, $\langle u, v \rangle$ ou même $u \cdot v$. Dans la suite, on utilisera principalement la notation $(\cdot|\cdot)$.

Exercice $*1$.

Donner des exemples de produits scalaires sur les espaces : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $C(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

— pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

— pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vecteurs de $\ell^2(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(u|v) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

— pour f et g des vecteurs de $C(I)$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(f|g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

— pour A et B des vecteurs de $M_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}$$

Définition ∗2. Espace préhilbertien

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Le couple $(E,(\cdot|\cdot))$, ou simplement E s'il n'y a pas d'ambiguïté, est appelé **espace préhilbertien**.
Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

Exemple ∗1. Important

L'espace vectoriel $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ où, pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = {}^tXY,$$

est un espace euclidien. Le produit scalaire précédent est souvent désigné comme le produit scalaire **canonique** de $M_{n,1}$.

b. Norme associée à un produit scalaire

Définition ∗3. Norme associé au produit scalaire

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ et on appelle **norme associée au produit scalaire** $(\cdot|\cdot)$, l'application :

$$\|\cdot\| : \left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{(x|x)}. \end{array}\right.$$

De plus, on note $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ et on appelle distance associée à $\|\cdot\|$, l'application définie, pour $x, y \in E$, par :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Théorème ∗1. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'inégalité suivante, pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Et de plus, on a $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soit $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \|tx + y\|^2 = (tx + y|tx + y).$$

Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = t^2(x|x) + 2(x|y) + (y|y) = t^2\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2.$$

Pour $x \neq 0_E$, f est une fonction polynomiale de degré 2 et on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant Δ est négatif i.e.

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Par suite,

$$(x|y)^2 \leq (\|x\|\|y\|)^2$$

Et cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$ - et c'est même une égalité dans ce cas. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, si $x \neq 0_E$ et y colinéaire à x, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et

$$|(x|y)| = |\lambda|\|x\|^2 = \pm\|x\|.|\lambda|\|x\| = \|x\|\|y\|.$$

Réciproquement, pour $x \neq 0_E$, si l'égalité est vérifiée, alors $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$ donc f possède une racine λ i.e.

$$(\lambda x + y|\lambda x + y) = f(\lambda) = 0.$$

Donc par définie positivité du produit scalaire, $\lambda x + y = 0_E$; d'où x et y sont colinéaires. □

Proposition ∗1.

Soit E un espace préhilbertien réel. La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration.

- $\|\cdot\|$ est positive par positivité du produit scalaire).
- Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0$, alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$ car le produit scalaire est défini positif.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$, on a :

  $$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2(x|x) = \lambda^2\|x\|^2,$$

  d'où l'homogénéité.
- Soit $x, y \in E$. On a :

  $$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2,$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

d'où l'inégalité triangulaire.

□

Exercice ∗2.

Soit $x, y \in E$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $d(x,y) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)}$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme).*
3. $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(Identité de polarisation).*

Correction.

Tout cet exerice repose sur les égalités :

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y | x \pm y) = \|x\|^2 \pm 2(x|y) + \|y\|^2.$$

1. On a :
$$\begin{aligned} d(x,y)^2 &= \|x-y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$
d'où le résultat.
2. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$
3. On a :
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2) \\ &= 4(x|y) \end{aligned}$$
d'où le résultat.

2. Rappels et compléments sur l'orthogonalité

Définition ∗4. Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel.

— Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x \perp y$ si $(x|y) = 0$.

— Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ et on appelle **orthogonal** de A, l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ (a|x) = 0\}.$$

— Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** et on note $F \perp G$ si, pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$, $(x|y) = 0$. Autrement dit si $F \subset G^\perp$ (ou de manière équivalente, $G \subset F^\perp$).

Exercice ∗3.

Soit E un espace préhilbertien réel et $A \subset E$.

— Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de deux façons.

— Montrer que $A^\perp$ est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|$.

Correction.

1. Pour la première façon, il s'agit d'utiliser la définition de sous-espace vectoriel.
   Pour la deuxième, on remarque que $A^\perp = \bigcap_{a\in A} \mathrm{Ker}(\varphi_a)$ où, pour $a \in A$, $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$, donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E.

2. On reprend l'égalité $A^\perp = \bigcap_{a\in A} \mathrm{Ker}(\varphi_a)$ et on remarque que :
   — pour $a \in A$ et $x \in X$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$|f_a(x)| = |(a|x)| \leq \|a\|\|x\|.$$
   Donc f_a est $\|a\|$-lipschitzienne et donc continue pour $\|\cdot\|$.
   — $\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \varphi_a^{-1}(\{0\})$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_a)$ est un fermé pour $\|\cdot\|$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

   Par suite, $A^\perp$ est fermé pour $\|\cdot\|$ comme intersection de fermé.

Exemple ∗2.

— Dans un espace préhilbertien réel E, on a : $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

— Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $\{(1,-1)\}^\perp = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

— Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique,

$$\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3)) \perp \mathrm{Vect}(1,-2,1).$$

Définition ∗5. Famille orthogonale/orthonormale

Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est :

— **orthogonale** si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$,

$$(x_i|x_j) = 0.$$

— **orthonormale** si, pour tous $i, j \in I$,

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On dit qu'une famille de E est une **base orthonormale** si c'est une base et une famille orthonormale.

Exercice $*$4.

Soit E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les proposition suivantes :

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
2. On suppose que E admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$. Montrer que, pour tous $x, y \in E$ de décompositions dans $\mathcal{B}$, $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{i\in I} y_i e_i$ (sommes finies), on a :
$$(x|y) = \sum_{i\in I} x_i y_i \text{ et } x = \sum_{i\in I} (x|e_i) e_i.$$
3. (Théorème de Pythagore) Soit $(x_1, ... x_n)$ une famille finie orthogonale de vecteurs de E. Alors
$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Proposition 1.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$(x|y) = {}^t XY \quad (= \langle X, Y \rangle) \text{ où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

Soit $x, y \in E$. On note $e_1, ..., e_n$ les vecteurs de $\mathcal{B}$. Alors, si on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ les décompositions de x, y dans $\mathcal{B}$, par bilinéarité du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et par orthonormalité de $\mathcal{B}$, on a, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t XY$$

□

Proposition ∗2. Matrice d'un endormrphisme dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormale** de E. Si on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors :

$$A = ((u(e_j)|e_i))_{1 \le i,j \le n},$$

et, pour tous $x, y \in E$,

$$(u(x)|y) = {}^t X {}^t A Y = {}^t Y A X \text{ où } X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

Démonstration.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

— Soit $j \in [\![1, n]\!]$. D'une part, comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n (u(e_j)|e_i)e_i$ et d'autre part, par définition de A, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$; ainsi, par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = (u(e_j)|e_i)$.

— Soit $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = AX$ et donc :

$$(u(x)|y) = {}^t AXY = {}^t X {}^t AY.$$

□

Proposition ∗3. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $(e_1, ..., e_n)$ orthonormale de E telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k).$$

Plus précisément, on peut construire un telle famille $(e_1, ..., e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt : pour $k = 1, ..., n$

$$e_k = \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \text{ où } \varepsilon_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)e_i.$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ où les e_i sont donnés par le procédé de Gram-Schmidt :

- *Initialisation.* Pour $k = 1$, la propriété est vraie car

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

- *Hérédité.* Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose la propriété vraie pour k. On a, par hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i}_{\in \mathrm{Vect}(x_1,...,x_k)} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1}).$$

Par suite, $e_{k+1} = \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1})$. De plus, on a, pour $l \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{k+1}|\varepsilon_l) &= (x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)e_i|x_l - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{k}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_j)\underbrace{(e_i|e_j)}_{=0 \text{ si } j\neq i} \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k}(x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}(x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i)
\end{aligned}$$

□

Corollaire ∗1.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F admet une base orthonormale.

Démonstration.

Comme F est de dimension finie (disons p), il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_p)$ de F. Alors on orthonormalise cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base $\mathcal{B}'$ orthonormale de F. □

Exercice ∗5.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Déterminer, grâce au procédé de Gram-Schmidt, la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de la base formée des vecteurs :

$$(1, 1, 1), \quad (1, 2, 3), \quad (1, -2, 1).$$

Remarque ∗2.

Pour $A, B \subset E$ et F un sous-espace vectoriel de E, on a les propriétés suivantes :

— Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$,

— $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Définition ∗6. Somme directe orthogonale

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe orthogonale** si F et G sont en somme directe et $F \perp G$.

Dans ce cas, on note alors $F \overset{\perp}{\oplus} G$ la somme $F \oplus G$.

Proposition ∗4.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Démonstration.

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $(\underbrace{x}_{\in F} | \underbrace{x}_{\in F^\perp}) = 0$ donc par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x = 0_E$.
De plus, par définition, $F \perp F^\perp$.
Par suite, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonal. □

Définition ∗7. Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de E .

Proposition ∗5.

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

— On suppose que F et G sont supplémentaires. Alors $F \perp G$ si, et seulement si, $G = F^\perp$.

— Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

— On suppose $F \perp G$. Alors $G \subset F^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in F^\perp = E = F \oplus G$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ et on a :
$$\begin{aligned}(x - x_G | x - x_G) &= (x - x_G | x_F) \\ &= \underbrace{(x|x_F)}_{=0} - \underbrace{(x|x_G)}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}$$
Donc, par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x - x_G = 0_E$, d'où $x = x_G \in G$.
Par suite, $G = F^\perp$.
La réciproque est immédiate car $F^\perp \perp F$.

— On applique le point précédent à "F" $= F^\perp$ et "G" $= F$. Comme $F^\perp \perp F$, on obtient alors $F = (F^\perp)^\perp$.

□

Exemple ∗3.

On considère les espaces vectoriels suivants munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs.

— Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P} : x+y = 0$. Alors la droite $\mathcal{P}^\perp = \text{Vect}(1, 1, 0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.

— Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère le sous-espace vectoriel F des suites stationnaires en 0. Alors $F^\perp = \{0\}$ et donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Proposition ∗6.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

D'après la proposition 4, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale. Montrons alors que $E = F + F^\perp$.

Soit $x \in E$. Le sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie alors on peut considérer une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de F. On pose $x_F = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i \in F$. Alors on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned} (x - x_F|e_j) &= (x|e_j) - (x_F|e_j) \\ &= (x|e_j) - \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)(e_i|e_j) \\ &= (x|e_j) - (x|e_j) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $x - x_F$ est orthogonal avec chacun des éléments d'une base de F, donc $x - x_F \in F^\perp$. Ainsi, $x = x_F + (x - x_F) \in F + F^\perp$.

Il en résulte que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

De plus, d'après ce qui précède, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et on applique alors la proposition 5. □

Corollaire ∗2.

Soit E un espace **euclidien** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E).$$

Démonstration.

Comme E est de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont de dimension finie et donc d'après la proposition précédente, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, d'où le résultat. □

Partie ∗∗

Projection orthogonale

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition ∗∗1. Projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale** sur F et on note p_F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^\perp$. L'image $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ par la projection orthogonale sur F est appelée **projeté orthogonal** de x sur F.

Remarque ∗∗1.

Pour F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.

Proposition ∗∗1.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F vérifie :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

Démonstration.

Comme dans la démonstration de 6, on décompose $x = y + z$ avec $y = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i \in F$ et $z \in F^\perp$. Par suite,

$$p_F(x) = \underbrace{p_F(y)}_{=y} + \underbrace{p_F(z)}_{=0_E} = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

□

Remarque ∗∗2.

La famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ obtenue à partir d'une famille $(x_1, \ldots x_n)$ libre de E grâce au procédé de Gram-Schmidt peut alors s'exprimer de la façon suivante : pour $k = 1, \ldots, n-1$, on note

$$F_k = \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_k) \ \ (= \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k))\,.$$

et on a :

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1} \text{ où } \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1});$$

de plus,

$$\|\varepsilon_{k+1}\| = \sqrt{\|x_{k+1}\|^2 - \|p_{F_k}(x_{k+1})\|^2}.$$

Proposition $ $2.**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(x_1, \dots, x_k)$ une famille génératrice de F. Pour $x, y \in E$, on a :

$$y = p_F(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} y \in F \\ (x - y|x_i) = 0 \ \forall i \in [\![1, k]\!]. \end{cases}$$

Exercice $ $1.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Déterminer la projection orthogonale de X^n sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Correction.

On a $\deg(p_F(X^n)) = 1$ donc $p_F(X^n) = aX + b$. De plus, on a :

$$\begin{cases} (X^n - p_F(X^n)|1) = 0 \\ (X^n - p_F(X^n)|X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{a+2b}{2} \\ \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{2a+3b}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6n}{(n+1)(n+2)} \\ b = \dfrac{2-2n}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$

d'où $p_F(X^n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(6nX + 2 - 2n)$.

2. Distance à un sous-espace de dimension finie

On rappelle ici la définition de distance à une partie de E :

Définition $ $2.** Distance à une partie

Soit $x \in E$ et $A \subset E$. On appelle **distance** de x à A et on note $d(x, A)$ la quantité

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition $ $3.**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté orthogonale $p_F(x)$ de x sur F. Autrement dit :

— $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et ;

— pour tout $y \in F$, $d(x, F) = \|x - y\|$ implique $y = p_F(x)$.

Démonstration.

Soit $y \in F$. Alors on a $x - y = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a : $d(x, F) \geq \|x - p_F(x)\|$. Or, $p_F(x) \in F$ donc $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$. Il en résulte que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

De plus, pour $y \in F$, si $d(x, F) = \|x - y\|$, alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|y - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - d(x, F)^2 = 0.$$

$\square$

Exercice $ $2.**

Déterminer la quantité $A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Correction.

On remarque, en considérant $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et en notant $\mathbb{R}_1[X]$, que

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, F)^2 = d(X^2, p_F(X^2))^2$$

En reprenant le résultat de l'exercice $**$1, on obtient $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$, d'où

$$A = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Corollaire $ $1.**

Soit F un sous-espace de dimension finie k, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors on a :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2.$$

Démonstration.

On a $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)e_i$, et $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2.$$

$\square$

Théorème $ $1.**

Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille orthonormale de E. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration.

On applique le corollaire précédent à $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Alors on a :

$$\|x\|^2 = d(x,F)^2 + \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2 \geq \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2.$$

$\square$

Partie A

Adjoint d'un endomorphisme

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Représentation des formes linéaires

Théorème 1. *Théorème de représentation de Riesz*

Soit φ une forme linéaire sur l'espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x) = (a|x).$$

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E.

- **Existence :** On pose $a = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i$. Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a, par linéarité de f :

$$(a|x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \varphi(x).$$

- **Unicité :** Soit $a, b \in E$ tels que, pour tous $x \in E$, $(a|x) = \varphi(x) = (b|x)$. Alors, pour tous $x \in E$:

$$(a-b|x) = (a|x) - (b|x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0.$$

  Ainsi, $a - b$ appartient à l'orthogonal de E d'où $a - b = 0_E$ i.e. $a = b$.

$\square$

Corollaire 1.

Soit H un hyperplan de E. Il existe un vecteur non nul $n \in E$ tel que $H = \{n\}^\perp$.

Démonstration.

Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe (un unique) $n \in E$ tel que $\varphi : x \mapsto (n|x)$; de plus, comme $\varphi \neq \mathbf{0}$, $n \neq 0_E$ et on a :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid (n|x) = \varphi(x) = 0\} = \{n\}^\perp.$$

$\square$

Remarque 1.

Un tel vecteur n est appelé *vecteur normal* à H ; il n'y a pas unicité d'un vecteur normal : en effet, si n est normal à H, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, λn est normal à H.

Exercice 1.

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM).$$

Démonstration.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \operatorname{Tr}({}^tMN)$. Comme φ est une forme linéaire, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = (B|M) = \operatorname{Tr}({}^tBM)$. Ainsi, en posant $A = {}^tB$, on obtient :

$$\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM),$$

et de plus, A est unique par unicité de B. $\square$

2. Adjoint d'un endomorphisme

Lemme 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Démonstration.

- **Existence :** Soit $y \in E$. On note $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour $x \in E$ par $\varphi_y(x) = (u(x)|y)$. Par linéarité de u et du produit scalaire par rapport à sa première variable, φ est une forme linéaire sur l'espace euclidien E. Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur $a_y \in E$ tel que $\varphi_y(x) = (a_y|x)$ pour tous $x \in E$.

  Par suite, l'application $v : y \mapsto a_y$ est bien définie de E dans lui-même et on a alors, pour tous $x, y \in E$:
  $$(u(x)|y) = \varphi_y(x) = (a_y|x) = (x|a_y) = (x|v(y)).$$
  De plus, pour $y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in E$, par linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable :

  $$\begin{array}{rcl} (x|v(\lambda y + \mu z)) & = & (u(x)|\lambda y + \mu z) \\ & = & \lambda(u(x)|y) + \mu(u(x)|z) \\ & = & \lambda(x|v(y)) + \mu(x|v(z)) \\ (x|v(\lambda y + \mu z)) & = & (x|\lambda v(y) + \mu v(z)); \end{array}$$

donc $(x|v(\lambda y+\mu z)-(\lambda v(y)+\mu v(z)))=0$, pour tout $x\in E$, d'où :

$$v(\lambda y+\mu z)=\lambda v(y)+\mu v(z).$$

Ainsi, v est un endomorphisme de E.
Ce qui prouve l'existence.

- **Unicité :** Soit $v,w\in\mathcal{L}(E)$ tels que, pour tous $x,y\in E$:

$$(x|v(y))=(u(x)|y)=(x|w(y)).$$

Soit $y\in E$. alors pour tout $x\in E$:

$$(x|v(y)-w(y))=(x|v(y))-(x|w(y))=(u(x)|y)-(u(x)|y)=0.$$

Par suite, $v(y)=w(y)$.
Donc $v=w$. Ce qui prouve l'unicité.

□

Le lemme précédent légitime la définition suivante :

Définition 1.

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On appelle **endomorphisme adjoint** - ou simplement **adjoint** - de u l'unique endomorphisme de E noté u^* tel que, pour tous $x,y\in E$:

$$(u(x)|y)=(x|u^*(y))$$

Exemple 1.

— Si u est une homothéthie de E, alors $u^*=u$.

> En effet, pour $u=\lambda\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a, pour tous $x,y\in E$:
>
> $$(u(x)|y)=(\lambda x|y)=\lambda(x|y)=(x|\lambda y)=(x|u(y)).$$
>
> Par suite, $u^*=u$.

— Pour $E=\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f:(x,y)\mapsto(x+2y,x)$, on a $f^*=g:(x,y)\mapsto(x+y,2x)$.

> En effet, pour tous $(x,y),(a,b)\in E$:
>
> $$(f(x,y)|(a,b))=(x+2y)a+xb=x(a+b)+y.2a=((x,y)|g(a,b))$$
>
> Par suite, $f^*=g$.

3. Propriétés de l'adjoint

Proposition 2. *Matrice de l'adjoint dans une base orthonormale*

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$. L'endomorphisme v est l'adjoint de u i.e. $v = u^*$ si, et seulement si, $B = {}^tA$.
En particulier, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$.

Démonstration.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, u^* son adjoint, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

($\Rightarrow$) On suppose $v = u^*$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$b_{ij} = (u^*(e_j)|e_i) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = a_{ji}.$$

car u^* est l'adjoint de u.
Par suite, on a $B = {}^tA$.

($\Leftarrow$) On suppose $B = {}^tA$. Soit $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. On a :

$$(u(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX \underbrace{{}^tA}_{=B} Y = {}^tX(BY) = (x|v(y))$$

Par suite, par unicité de l'adjoint de u, on a $v = u^*$.

□

Proposition 3.

L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

Notons $\mathrm{Ad} : u \mapsto u^*$.

— *1ère façon : avec la définition.*
L'application Ad va bien de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{array}{rcl} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) & = & \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) \\ & = & \lambda(x|u^*(y)) + \mu(x|v^*(y)) \\ ((\lambda u + \mu v)(x)|y) & = & (x|(\lambda u^* + \mu v^*)(y)). \end{array}$$

Donc, par unicité de l'adjoint :

$$\mathrm{Ad}\,(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda \mathrm{Ad}(u) + \mu \mathrm{Ad}(v).$$

Par suite Ad est linéaire.

Montrons que Ad est involutive. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $v = u^*$. Pour tous $x, y \in E$:

$$(v(x)|y) = (u^*(x)|y) = (x|u(y)),$$

donc $v^* = u$ par unicité de l'adjoint. Ainsi, $\mathrm{Ad}^2(u) = \mathrm{Ad}(v) = v^* = u$ i.e. Ad est une involution.
Ainsi, Ad est un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{L}((\mathcal{L}(E)), +, \circ)$ car, étant une involution, il est sa propre inverse ; d'où Ad est bijective et donc un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.

— *2nde façon : avec la proposition précédente.* Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.
L'application $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (et même d'algèbres) et l'application $T : A \mapsto {}^tA$ est un automorphisme involutif de $M_n(\mathbb{R})$.
Or, on a :
$$\mathrm{Ad} = M^{-1} \circ T \circ M,$$
en effet, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a, d'après la proposition précédente :
$$M^{-1} \circ T \circ M(u) = M^{-1}(T(A)) = M^{-1}\left({}^tA\right) = u^* = \mathrm{Ad}(u).$$
Donc $\mathrm{Ad} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels comme composée d'isomorphismes d'espces vectoriels.
De plus, comme T est involutif, on a :
$$\mathrm{Ad}^2 = \left(M^{-1} \circ T \circ M\right) \circ \left(M^{-1} \circ T \circ M\right) = M^{-1} \circ T^2 \circ M = M^{-1} \circ T \circ M = \mathrm{Ad}.$$
Il en résulte que Ad est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.'

□

Proposition 4.

Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Correction.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a :
$$\begin{array}{rcl} (u \circ v(x)|y) & = & (u(v(x))|y) \\ & = & (v(x)|u^*(y)) \\ & = & (x|v^*(u^*(y))) \\ (u \circ v(x)|y) & = & (x|v^* \circ u^*(y)). \end{array}$$
Donc, par unicité de l'adjoint $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
Remarque : on aurait pu également utiliser une base orthonormale et utiliser la caractérisation matricielle de l'adjoint en remarquant que, pour toutes matrices A, B, ${}^tAB = {}^tB{}^tA$.

Proposition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :
$$\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp} \text{ et } \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrons tout d'abord les inclusions suivantes :

— Montrons $\mathrm{Ker}(u^*) \subset \mathrm{Im}(u)^{\perp}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe

$x' \in E$ tel que $y = u(x')$ et on a :

$$(x|y) = (x|u(x')) = (\underbrace{u^*(x)}_{=0_E}|x') = 0$$

D'où $x \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Par suite, $\mathrm{Ker}(u^*) \subset \mathrm{Im}(u)^\perp$.

— Montrons que $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^*(x)$ et on a, pour tout $x' \in \mathrm{Ker}(u)$:

$$(y|x') = (u^*(x)|x') = (x|\underbrace{u(x)}_{=0_E}) = 0$$

D'où $y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Par suite, $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Montrons les inclusions réciproques. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (comme E est euclidien ici, tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie), $(F^\perp)^\perp = F$ et si $A, B \subset E$ tels que $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
Ainsi, on a, d'après les inclusions précédentes appliquées à $v = (u^*)^* = u$ (car la passage à l'adjoint est involutif) :

—
$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}((u^*)^*) \subset \mathrm{Im}(u^*)^\perp$$

d'où :
$$\mathrm{Ker}(u)^\perp \supset \mathrm{Im}(u^*).$$

Par suite, $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

—
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}((u^*)^*) \subset \mathrm{Ker}(u^*)^\perp$$

d'où :
$$\mathrm{Im}(u)^\perp \supset \mathrm{Ker}(u^*).$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

□

Exercice 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer (par forcément dans l'ordre indiqué) que :

$$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u) \quad \mathrm{Tr}(u^*) = \mathrm{Tr}(u) \quad \det(u^*) = \det(u)$$

et en terme de réduction :

$$\chi_{u^*} = \chi_u \quad \mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u) \quad \pi_{u^*} = \pi_u.$$

En déduire les liens potentiels entre diagonalisation/trigonalisation de u et u^*.

Proposition 6.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration.

On suppose F stable par u. Soit $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $y \in F$, $u(y) \in F$ et :

$$(u^*(x)|y) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{u(y)}_{\in F}) = 0$$

D'où $u^*(x) \in F^\perp$.
Il en résulte que $F^\perp$ est stable par u^*. $\square$

Partie B

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Matrices orthogonales

a. Définitions

Définition 2. *Matrice orthogonale*

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit M est une **matrice orthogonale** si ${}^tMM = I_n$.
On appelle **groupe orthogonal** d'ordre n et on note $O_n(\mathbb{R})$ (ou encore $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ i.e.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}.$$

Définition-Proposition 3.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$;
- si $\det(M) = 1$, on dit M est une matrice orthogonale **directe** (ou **positive**) ;
- si $\det(M) = -1$, on dit M est une matrice orthogonale **indirecte** (ou **négative**) ;

On appelle **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et on note $SO_n(\mathbb{R})$ (ou encore $SO(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales directes i.e.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Définition 4. *Matrices orthogonalement semblables*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **orthogonalement semblables** s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PA{}^tP$.

b. Propriétés des matrices orthogonales

On justifie ici la terminologie de "groupe" (spécial) orthogonal :

Proposition 7.

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.
En particulier, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} = {}^tM$.

Proposition 8.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, ..., C_n$ ses colonnes.
La matrice M est une matrice orthogonale si, et seulement si, la famille $(C_1, ..., C_n)$ est une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Le même résultat est valable pour les lignes de M.

2. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

On rappelle que dans cette partie, E est en particulier un espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 5. *Orientation*

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ **définissent la même orientation de** E si $\det(P) > 0$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Orienter l'espace E revient à se fixer une base $\mathcal{B}$ de référence. Ce choix étant fait, on appelle **bases directes**, les bases qui définissent la même orientation que $\mathcal{B}$ et **bases indirectes**, les autres.

Exemple 2.

On oriente $\mathbb{R}^3$ grâce à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Alors la base (e_2, e_3, e_1) est directe et la base (e_1, e_3, e_2) est indirecte.

Exercice 3.

Montrer que le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ne change pas l'orientation d'une base.

Proposition 9.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ et de plus, $P \in SO_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ définissent la même orientation de E.

Proposition 10.

On suppose que E est orienté. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes de E, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

3. Isométries vectorielles

a. Définitions et premières propriétés

Définition 6. *Isométrie vectorielle*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou également un **automorphisme orthogonal**) si, pour tout $x \in E$,
$$\|u(x)\| = \|x\|.$$
On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in O(E)$ alors u est un automorphisme de E.

Démonstration.

On suppose $u \in O(E)$. Alors $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$; en effet, si $x \in \operatorname{Ker}(u)$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0$, donc par séparation de la norme, $x = 0_E$. Par suite, u est un endomorphisme injectif en dimension finie : il est donc bijectif ; ainsi, u est un automorphisme de E. $\square$

Exercice 4.

Soit $u \in O(E)$. Quelles sont les seules valeurs propres possibles pour u ?

Exemple 3.

— Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

> En effet, soit s une symétrie orthogonale de E. Alors s est la symétrie sur $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $F^\perp$, donc, pour tout $x \in E$, on a $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$ et donc $s(x) = y - z$; ainsi, d'après le theorème de Pythagore :
> $$\|s(x)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2.$$
> Donc s est une isométrie vectorielle.

— En particulier, toute réflexion i.e. symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, est une isométrie vectorielle.

b. Caractérisations des isométries vectorielles

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, pour tous $x, y \in E$, on a :
$$(u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Démonstration.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tous $x, y \in E$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x)|u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|.$$

D'où $u \in O(E)$.

($\Rightarrow$) Soit $x, y \in E$. On a :

$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x|y).$$

□

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, $u^* = u^{-1}$.

Démonstration.

($\Rightarrow$) On suppose $u \in O(E)$. Soit $x, y \in E$. Comme u est bijective, il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. Par suite, comme $z = u^{-1}(y)$ et d'après la proposition précédente :

$$(u(x)|y) = (u(x)|u(z)) \underbrace{=}_{u \in O(E)} (x|z) = (x|u^{-1}(y))$$

Ainsi, par unicité de l'adjoint de u, $u^* = u^{-1}$.

($\Leftarrow$) On suppose $u^* = u^{-1}$. Soit $x \in E$. On a :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = (x|\underbrace{u^*(u(x))}_{=u^{-1}(u(x))}) = (x|x) = \|x\|^2.$$

Par suite, u est une isométrie vectorielle de E.

□

Proposition 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, l'image de la base $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormale de E.

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E.

- ($\Rightarrow$). On suppose $u \in O(E)$. Comme u est un isomorphisme, $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base de E. De plus, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}.$$

Donc $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormale.

- ($\Leftarrow$). On suppose que $\mathcal{B}' = (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormale. Soit $x \in E$. On a :

$$u(x) = u(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)u(e_i),$$

Par suite, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Il en résulte que $u \in O(E)$.

$\square$

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Cela découle du fait que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$. $\square$

Remarque 2.

On a alors un isomorphisme de groupes entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.

c. Déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration.

On suppose $u \in O(E)$. Alors, pour $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, on a, d'après le corollaire précédent, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\det(u) = \det(M) = \pm 1$. $\square$

Définition 7.

Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle **directe** si $\det(u) = 1$ et **indirecte** si $\det(u) = -1$.
On appelle **groupe spécial orthogonal** et on note $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles

directes de E i.e.

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}.$$

Remarque 3.

On considère que E est orienté. Si $u \in SO(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe, alors la base orthonormale formée par l'image de $\mathcal{B}$ par u est directe.

Proposition 16.

Le groupe orthogonal est un sous-groupe de $GL(E)$ et le groupe spécial orthogonal $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.

4. isométries vectorielles en dimension 2

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien **de dimension 2**.

Notation 1.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Proposition 17.

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :
- $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$.
- R_θ est inversible et $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Démonstration.

- On a, d'après les formules d'additions de cos et sin :

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos\theta + (\theta') \end{pmatrix} \\ R_\theta R_{\theta'} &= R_{\theta+\theta'} \end{aligned}$$

De plus, $R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$.

— D'après le résultat précédent, on a :

$$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2.$$

donc R_θ est inversible et son inverse est $R_{-\theta}$.

□

Proposition 18.

Soit E un espace euclidien de dimension 2, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in O(E)$.

— Si u est indirecte il existe un unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta.$$

— Si u est directe i.e. $u \in SO(E)$, il existe un unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta.$$

Démonstration.

Soit E un espace euclidien de dimension 2, $u \in O(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormale de E.
Alors, comme u est linéaire, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $u(e_1) = ae_1 + be_2$ et $u(e_2) = ce_1 + de_2$.
Comme $u \in O(E)$, d'après la proposition 14, $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormale de E et donc

$$\begin{cases} \text{i)} & a^2 + b^2 = \|u(e_1)\|^2 = 1 \\ \text{ii)} & c^2 + d^2 = \|u(e_2)\|^2 = 1 \\ \text{iii)} & ac + bd = (u(e_1)|u(e_2)) = 0 \end{cases}$$

Par suite, d'après les égalités i) et ii), il existe des uniques (à 2π près) $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ et $c = \sin(\theta')$, $d = \cos(\theta')$.
De plus, on a, d'après l'égalité iii) :

$$\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') = bd + ac = 0$$

Ainsi $\theta + \theta' = 0\ [\pi]$ d'où $\theta' = -\theta + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$d = (-1)^k \cos(\theta) \text{ et } c = (-1)^{k+1} \sin(\theta)$$

i.e.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta \text{ ou } S_\theta$$

On remarque alors que $\det(R_\theta) = 1$ et $\det(S_\theta) = -1$. Ainsi :

— Si u est indirecte, $\det(u) = -1$ d'où $M = S_\theta$.

— Si u est directe, $\det(u) = 1$ d'où $M = R_\theta$.

□

Théorème 2. *Classification des matrices orthogonales 2×2*

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.
- Si M est indirecte i.e. $\det(M) = -1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = S_\theta$.
- Si M est directe i.e. $\det(M) = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_\theta$.

Démonstration.

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. On considère alors l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M. Alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ qui est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.
Par suite, d'après le corollaire 2, $u \in O(\mathbb{R}^2)$. On remarque que $\det(M) = \det(u)$ et donc, d'après la proposition 18 :
- Si $\det(M) = -1$, alors $\det(u) = -1$ d'où, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = S_\theta$.
- Si $\det(M) = 1$, alors $\det(u) = 1$ d'où, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_\theta$.

□

Proposition 19.

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Démonstration.

Soit $M, N \in SO_2(\mathbb{R})$. D'après le théorème précédent, il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $M = R_\theta$ et $N = R_{\theta'}$. Ainsi, d'après la proposition 17, on a :

$$MN = R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = NM.$$

Donc $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif. □

Théorème 3. *Classification des isométries vectorielles en dimension 2*

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in O(E)$.
- Si u est indirecte, alors u est une réflexion i.e. une symétrie othogonale par rapport à une droite vectorielle (car $\dim(E) = 2$).
- Si u est directe i.e. $u \in SO(E)$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ à 2π près tel que, **pour toute base orthonormale <u>directe</u>** $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe.
- On suppose u est indirecte. D'après la proposition 18, il existe une unique, à 2π près, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta$. De plus, on a $M^2 = I_2$, donc $u^2 = \mathrm{Id}_E$ d'où u est une

symétrie. De plus, pour $x, y \in E$ tels que $u(x) = x$ et $u(y) = -y$, on a, comme $u \in O(E)$:

$$(x|y) = (u(x)|u(y)) = (x| - y) = -(x|y),$$

d'où $(x|y) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux, d'où u est une symétrie orthogonale.
Comme $\det(u) = -1$, $u \neq \pm I_2$, donc u étant une symétrie de E de dimension 2, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = 1$ et ainsi, u est une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.
Remarque : on aurait également pu considérer la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que :

$$\varepsilon_1 = \cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2 \text{ et } \varepsilon_2 = -\sin(\frac{\theta}{2})e_1 + \cos(\frac{\theta}{2})e_2$$

et montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc que u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$.

— On suppose u est directe. D'après la proposition 18, il existe une unique, à 2π près, $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$.
Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale directe et donc de même orientation que $\mathcal{B}$. Notons $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.
D'après la proposition 9, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$. Ainsi, par commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$, on a :

$$N = P^{-1}MP = P^{-1}PM = M.$$

Il en résulte que la forme matricielle de u ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie et donc θ est le même (toujours à 2π près) quelque soit la base orthonormale directe choisie.

□

Proposition 20.

Les groupes $(\mathbb{U}, \times)$ et $(SO(E), \circ)$ sont isomorphes.

Démonstration.

On suppose que E est orienté. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E. Pour $r \in SO(E)$, d'après le théorème précédent, il existe un unique $\theta_r \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_{\theta_r}$.
On construit alors l'application $\varphi : SO(E) \to \mathbb{U}$ telle que, pour $r \in SO(E)$:

$$\varphi(r) = e^{i\theta_r}.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi}$, l'unicité à 2π près de θ_r pour $r \in SO(E)$ garantit que $\varphi(r)$ est bien défini et donc que φ est bien définie sur $SO(E)$.

— Montrons que φ est un morphisme. On a, pour tout $r, r' \in SO(E)$,

$$\mathrm{Mat}_{BB}(r \circ r') = \mathrm{Mat}_{BB}(r)\mathrm{Mat}_{BB}(r') = R_{\theta_r}R_{\theta_{r'}} = R_{\theta_r+\theta_{r'}},$$

donc

$$\varphi(r \circ r') = e^{i(\theta_r + \theta_{r'})} = e^{i\theta_r} e^{i\theta_{r'}} = \varphi(r)\varphi(r')$$

Par suite, φ est un morphisme de groupes.

— Montrons que φ est injective. Si $r \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(r) = 1 = e^{i0}$, donc $\theta_r = 0\ [2\pi]$. Par suite, $r = \mathrm{Id}_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{Id}_E\}$ et donc φ est injective.

— Montrons que φ est surjective. Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On pose $r = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{-1}(R_\theta)$. Alors , par construction de φ, on a $\varphi(r) = e^{i\theta}$.
Par suite, φ est surjective.

Il en résulte que φ est un ismorphisme et donc $\mathbb{U}$ et $SO(E)$ sont isomorphes. $\square$

Lemme 2.

On note $U = S(0_E, 1)$ l'ensemble des vecteurs unitaires de E.

— pour tous $u, v \in U$, il existe un unique $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$.

— La relation binaire $\sim$ sur U^2 définie, pour $(u, v), (u', v') \in U^2$, par :

$$(u, v) \sim (u', v') \text{ si } \exists\, r \in SO(E), v = r(u) \text{ et } v' = r(u')$$

est une relation d'équivalence sur U^2.

— Les classes d'équivalence de $\sim$ sont en bijection avec $SO(E)$.

Démonstration.

— Soit $u, v \in U$. On pose $e_1 = u$ et on complète la famille (e_1) en une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. Alors $v = xe_1 + ye_2$ et d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$x^2 + y^2 = \|v\|^2 = 1$$

Considérons l'application linéaire $r : E \to E$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, ${}^tMM = I_2$ et $\det(M) = 1$ (faire les calculs), alors $r \in SO(E)$. De plus, on a :

$$r(u) = r(e_1) = xe_1 + ye_2 = v$$

D'où l'existence de $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$.
Montrons l'unicité : soit $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$. On reprend les notations utilisée dans l'existence, et on pose $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E, $N \in O_2(\mathbb{R})$ et :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc la première colonne de B est $N_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; or comme $N \in O_2(\mathbb{R})$, sa deuxième colonne est $N_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ car (N_1, N_2) est une base orthonormale de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. On aurait le même résultat pour $r' \in SO(E)$ tel que $v = r'(u)$, d'où, pour tous $r, r' \in SO(E)$ tels que

$r(u) = v = r'(u)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r')$$

Et donc $r = r'$ par injectivité de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$.
D'où l'unicité.

— Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur U^2.
  - (Réflexivité)
    Soit $(u, v) \in U^2$. D'après le point précédent, il existe $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$ (et $v = r(u)$), d'où $(u, v) \sim (u, v)$.
  - (Symétrie)
    Soit $(u, v), (u', v') \in U^2$. On suppose $(u, v) \sim (u', v')$. Alors il existe $r \in SO(E)$ tel que $v = r(u)$ et $v' = r(u')$; donc il existe $r \in SO(E)$ tel que $v' = r(u')$ et $v = r(u)$. D'où $(u', v') \sim (u, v)$.
  - (Transitivité)
    Soit $(u, v), (u', v'), (u'', v'') \in U^2$. On suppose $(u, v) \sim (u', v')$ et $(u', v') \sim (u'', v'')$. Alors il existe $r, r' \in SO(E)$ tels que $v = r(u)$ et $v' = r(u')$, et $v' = r'(u')$ et $v'' = r'(u'')$; par unicité du $r \in SO(E)$ tel que $v' = r(u')$ (point précédent), on a $r = r'$ donc $v = r(u)$ et $v'' = r(u'')$ i.e. $(u, v) \sim (u'', v'')$.

— On considère l'application $f : U^2 \to SO(E)$ qui à un couple $(u, v) \in U^2$ associe $r \in SO(E)$ telle que $v = r(u)$. L'application f est bien définie par unicité d'un tel r. Voyons quelques propriétés de f qui nous aiderons à construire notre bijection :

  $*$ pour $(u, v) \in U^2$ et pour tout couple $(u', v') \in \mathrm{Cl}(u, v)$ (classe d'équivalence de (u, v)), on a, par définition de $\sim$, $f(u, v) = f(u', v')$.
  Par suite, f est constante sur chaque classe d'équivalence.

  $**$ Réciproquement, si pour $(u, v), (u', v') \in U^2$, $f(u, v) = r = f(u', v')$, alors $v = r(u)$ et $v' = r(u')$, donc $(u, v) \sim (u', v')$.

  $***$ L'application f est surjective : en effet, pour $r \in SO(E)$, on a, pour $u \in U$, $f(u, r(u)) = r$.

  Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$. On construit alors l'application $\tilde{f} : \mathcal{C} \to SO(E)$ de la manière suivante :
  pour $C \in \mathcal{C}$, on pose $\tilde{f}(C) = f(u, v)$ pour un certain (u, v) quelconque dans C.
  D'après $*$, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\tilde{f}(C)$ est bien défini, et donc l'application $\tilde{f}$ est bien définie.
  Remarque : cette construction est classique quand on a une application constante sur des classes d'équivalence, on l'appelle la factorisation de f

  Montrons que $\tilde{f}$ est une bijection.
  - (injectivité) Soit $C, C' \in \mathcal{C}$. On suppose $\tilde{f}(C) = \tilde{f}(C')$. Alors pour $(u, v) \in C$ et $(u'v') \in C'$, on a :

    $$f(u, v) = \tilde{f}(C) = \tilde{f}(C') = f(u', v')$$

    donc d'après $**$, $(u, v) \sim (u', v')$ et donc $C = C'$.
    D'où $\tilde{f}$ est injective.
  - (surjectivité) Pour $r \in SO(E)$, d'après $***$, il existe $(u, v) \in U^2$ tel que $f(u, v) = r$. On pose $C = \mathrm{Cl}(u, v) \in \mathcal{C}$. Alors,

    $$\tilde{f}(C) = f(u, v) = r$$

    D'où $\tilde{f}$ est surjective.

  Il en résulte que $\tilde{f}$ est une bijection.

□

Dans cette définition, on reprend les notations du lemme précédent.

Définition 8. *Angle orienté*

Soit $(u, v) \in (E \setminus \{0_E\})^2$. On appelle **angle orienté** du couple (u, v) et on note $\widehat{(u, v)}$ la classe d'équivalence du couple $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}\right)$ par la relation d'équivalence $\sim$.

En utilisant le lemme 2 et le théorème 3, on justifie la bonne définition de la notion de *mesure d'un angle orienté* :

Définition 9. *Mesure d'un angle orienté*

On suppose E orienté.
Soit $\widehat{(u, v)}$ l'angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls (u, v). On appelle **mesure de l'angle orienté** $\widehat{(u, v)}$ l'unique (à 2π près) $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $r = R_\theta$ où r est l'unique élément de $SO(E)$ qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{v}{\|v\|}$.

Remarque 4.

L'orientation de E est importante : si on change l'orientation de E i.e. on prend une base orthonormale indirecte par rapport à l'orientation initiale et qu'on oriente E avec cette nouvelle base, la mesure d'un angle qui valait θ vaudra $-\theta$.

Définition 10. *Rotation d'un espace de dimension* 2

Soit $\widehat{(u, v)}$ l'angle orienté de mesure $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle **rotation d'angle orienté** $\widehat{(u, v)}$ l'unique élément r de $SO(E)$ qui envoie $\frac{u}{\|u\|}$ sur $\frac{v}{\|v\|}$.
De plus, si E est orienté, on dira que r est **la rotation d'angle de mesure** θ.

Proposition 21.

Soit $r \in SO(E)$ et $u \in E \setminus \{0_E\}$.
- l'application r est la rotation d'angle orienté $\widehat{(u, r(u))}$.
- si E est orienté et si on note θ est la mesure de l'angle orienté $\widehat{(u, r(u))}$, alors r est la rotation d'angle de mesure θ.
  En particulier, dans toute base $\mathcal{B}$ orthonormale directe de E,
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta.$$

5. Réduction des isométries vectorielles

a. Cas général

Proposition 22.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est une isométrie vectorielle de F i.e. $u_F \in O(F)$.

Démonstration.

Pour tout $x \in F$, on a :

$$\|u_F(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc $u_F \in O(F)$. $\square$

Proposition 23.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration.

Soit $y \in F^\perp$. Comme $u_F \in O(F)$, u_F est une bijection, pour tout $x \in F$, il existe $x' \in F$ tel que $x = u_F(x') = u(x')$ et donc on a :

$$(u(y)|x) = (u(y)|u(x')) = (\underbrace{y}_{\in F^\perp} | \underbrace{x'}_{\in F}) = 0.$$

Ainsi, $u(y) \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u. $\square$

Lemme 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors E possède un sous-espace vectoriel stable par u de dimension 1 ou 2 i.e. une droite ou un plan.

Démonstration.

Le polynôme minimal π_u de u est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et comme $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$ alors π_u se décompose en produit $P_1 ... P_k$ de facteurs irréductibles de degré 1 ou 2. De plus, comme π_u est annulateur, on a : $\pi_u(u) = P_1(u) \circ ... \circ P_k(u) = 0$, donc il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $P_i(u)$ n'est pas injectif. Alors, pour $x \in \mathrm{Ker}(P_i(u))$, $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. En effet, comme $P_i(u)(x) = 0$ et $\deg(P_i) = 1$ ou 2, $u^2(x)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u(x)$ et de x.
Il en résulte que F est une droite ou un plan stable par u. $\square$

Théorème 4.

Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs où les blocs sont de la forme :

$$I_p \quad ; \quad -I_q \quad ; \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [\![0, n]\!]$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

On démontre le résultat par récurrence double sur la dimension de E, c'est-à-dire, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$\mathcal{P}_n$ ="pour tout espace euclidien de dimension n, pour tout $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle la matrice de u possède la forme annoncée."

est vraie.

- **Initialisation :**
  — Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Soit E un espace euclidien de dimension 1 et $u \in O(E)$. Comme u est linéaire et E de dimension 1 sur $\mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u : x \mapsto ax$. Or, comme $u \in O(E)$, on a, pour $x \in E \setminus \{0_E\}$ (un tel x existe car $\dim(E) > 0$) :
  $$\|x\| = \|u(x)\| = \|ax\| = |a|\|x\|$$
  d'où $a = \pm 1$. Il en résulte que toute matrice de u (et donc dans une base orthonormée de E) possède la forme annoncée - ici (± 1).
  — Montrons que $\mathcal{P}_2$ est vraie. D'après le théorème 3, selon le déterminant de u, s est une réflexion ou une rotation. Or, pour une réflexion s, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et pour une rotation r, dans n'importe quelle base orthonormale $\mathcal{B}$, $r = R_\theta$ pour un certain θ dans $\mathbb{R}$.
  Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.
  Soit E un espace euclidien de dimension $n+2$ et $u \in O(E)$. D'après le lemme précédent, il existe F de dimension 1 ou 2 tel que F est stable par u. Comme $u \in O(E)$ et F est stable par u, d'après la proposition 23, $F^\perp$ est stable par u.
  — Comme $\dim(F) = 1$ ou 2 et $u_F \in O(F)$ (d'après la proposition 22), d'après l'initialisation, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F tel que sa matrice possède la forme annoncée.
  — On a $E = F \oplus F^\perp$ donc $\dim(F^\perp) = n$ ou $n+1$ et $u_{F^\perp} \in O(F^\perp)$ (d'après la proposition 22). Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthornormale $\mathcal{B}_{F^\perp}$ de $F^\perp$ telle que la matrice de $u_{F^\perp}$ possède la forme annoncée.
  La base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant les bases précédentes de F et $F^\perp$ est orthonormale (c'est bien une base car F et $F^\perp$ sont supplémentaires, et elle est orthonormale car F et $F^\perp$ sont orthogonaux et les deux bases sont orthornormales). De plus, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs dont le premier bloc est la matrice de u_F dans $\mathcal{B}_F$ et le second bloc est la mtrice de $u_{F^\perp}$ dans $\mathcal{B}_{F^\perp}$: ainsi la matrice de u a bien la forme annoncée.

Ce qui achève le raisonnement par récurrence. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. $\square$

Remarque 5.

Ainsi, si u est une isométrie vectorielle, il existe une base orthonormale telle que sa matrice A dans cette base est :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_k} \end{array}\right)$$

où $p, q, k \in [\![0, n]\!]$ (plus précisément $k \leq n/2$) et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\theta_i \in \mathbb{R}$.

b. Cas d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3

Proposition 24.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe i.e. $u \in O(\mathbb{R}^3)$ et $\det(u) = 1$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

On applique le théorème précédent et en utilisant le fait que $\det(u) = 1$. $\square$

Définition-Proposition 11. *Rotation de l'espace*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe. Alors il existe une droite $\mathcal{D}$ stable par u et $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que l'endomorphisme $u_{\mathcal{P}}$ induit par u sur $\mathcal{P}$ est une rotation d'angle θ où $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à $\mathcal{D}$.
Un tel endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ est appelé **rotation d'axe** $\mathcal{D}$.

Démonstration.

D'après la proposition précédente, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale telle que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors la droite $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u et le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ vérifie $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$ et

$$u_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$\square$

Partie C

Endomorphismes autoadjoints

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n.

1. Définition et propriétés

Définition 12. *Endomorphisme autoadjoint*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** (ou encore **symétrique**) si $u^* = u$ i.e si, pour tous $x, y \in E$:

$$(u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Proposition 25.

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

L'endomorphisme nul vérifie pour tous $x, y \in E$:

$$(x|0(y)) = (x|0) = 0 = (0|y) = (0(x)|y).$$

donc $0 \in \mathcal{S}(E)$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{S}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} ((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= \lambda(u(x)|y) + (\mu v(x)|y) \\ &= \lambda(x|u(y)) + (\mu x|v(y)) \\ &(x|(\lambda u + \mu v)(y)) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
On aurait pu également remarquer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ comme noyau de l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ défini par $f : u \mapsto u^* - u$; et f est bien linéaire car $f = Ad - Id_{\mathcal{L}(E)}$. □

Proposition 26.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. Alors u est autoadjoint i.e. $u \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique i.e. $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, d'après la proposition 2, u est autoadjoint si, et seulement si, ${}^tA = A$. D'où le résultat.

$\square$

Remarque 6.

La proposition précédente fournit un isomorphisme entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On obtient alors que :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 27.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u alors l'endomorphisme induit u_F de u sur F est autoadjoint i.e. $u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Démonstration.

Soit $x, y \in F$. Alors on a

$$(x|u_F(y)) = (x|u(y)) = (u(x)|y) = (u_F(x)|y).$$

Donc u_F est autoadjoint. $\square$

Proposition 28.

Soit p un projecteur et $F = \mathrm{Im}(p)$. Alors p est la projection orthogonale sur F si, et seulement si, p est autoadjoint.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que p est la projection orthogonale sur F. On a $F^\perp = \mathrm{Ker}(p)$, donc pour tout $x, y \in E$, on a :
$$(p(x)|y) = (p(x)|\underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(y)}_{\in F}) = (p(x)|p(y))$$
et par un calcul similaire,
$$(x|p(y)) = (p(x)|p(y))$$
d'où $(p(x)|y) = (x|p(y))$. Ainsi, p est autoadjoint.
- $(\Leftarrow)$. On suppose p autoadjoint. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Alors :
$$(x|y) = (p(x)|y) = (x|p(y)) = (x|0_E) = 0.$$
Donc p est la projection orthogonale sur F.

□

Exercice 5.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $s \in \mathcal{S}(E)$.

Correction.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$. Alors p est un projecteur de E et on a :

$$s \in \mathcal{S}(E)$$

si, et seulement si,

$$p = \tfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E) \in \mathcal{S}(E) \text{ (car } \mathcal{S}(E) \text{ est un espace vectoriel et } \mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E))$$

si, et seulement si,

$$p \text{ est un projecteur orthogonal}$$

si, et seulement si,

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \text{ est une symétrie orthogonale.}$$

Proposition 29.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$ alors

$$E_\lambda(u) \perp E_\lambda(u).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors on a :

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y),$$

et donc $(\lambda - \mu)(x|y) = 0$ d'où $(x|y) = 0$ car $\lambda - \mu \neq 0$. □

Remarque 7.

Compte tenu de la proposition précédente, on sait ainsi que les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont en somme directe orthogonale.

2. Réduction des endomorphismes autoadjoints

Proposition 30.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A admet au moins une valeur propre réelle et de plus, toutes ses valeurs propres de A sont réelles i.e. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère A comme une matrice à coefficients complexes. Alors A possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ. Alors on a, d'une part :

$$ {}^t X A \overline{X} = {}^t A X \overline{X} = \lambda {}^t X \overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2; $$

et d'autre part

$$ {}^t X A \overline{X} = {}^t X \overline{A X} = {}^t X \overline{\lambda X} = \overline{\lambda} {}^t X \overline{X} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2; $$

Or, comme $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$. Par suite, $\lambda = \overline{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 31.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u possède au moins une valeur propre.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique réelle. De plus, le polynôme caractéristique χ_u de u possède au moins une racine λ dans $\mathbb{C}$ et donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc λ est une valeur propre réelle de u. □

Proposition 32.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Démonstration.

On applique la proposition 6 avec l'hypothèse $u^* = u$. □

Théorème 5. *Théorème spectral*

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u est diagonalisable et de plus :

— E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; ou de manière équivalente,

— E possède une base orthonormale de vecteurs propres.

Démonstration.

D'après le proposition 31, u possède au moins une valeur propre. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ la liste de toutes les valeurs propres deux à deux distinctes de u. On note F le sous-espace vectoriel de E :

$$F = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k}(u).$$

Alors F est stable par u donc $G = F^{\perp}$ l'est aussi.
Comme u est autoadjoint, l'endomorphisme u_G par u sur G l'est aussi. Supposons par l'absurde que $G \neq \{0_E\}$, u_G est autoadjoint donc il possède une valeur propre réelle λ et ainsi un vecteur propre $x \in G \setminus \{0_E\}$ associé à λ. Or tout vecteur propre appartient à F, donc $x \in F \cap G = F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. contradiction !
Par suite $F^{\perp} = \{0_E\}$ et donc

$$E = F \oplus F^{\perp} = F = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k}(u).$$

□

Remarque 8.

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, on dit alors que u est **orthogonalement diagonalisable**.

Corollaire 3.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et de plus, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ i.e. $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que

$${}^tPAP (= P^{-1}AP) = D.$$

Démonstration.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, de sa base canonique $\mathcal{B}$ qui est orthonormale pour ce produit scalaire et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc, comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$. Par suite, la matrice P formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ vérifie que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et de plus, comme ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $P \in O_n(\mathbb{R})$. □

Remarque 9.

Attention, ce dernier résultat est faux dans $\mathbb{C}$: une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable (cf. exercice suivant) .

Exercice 6.

1. Diagonaliser dans une base orthonormale la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Que dire de la diagonalisabilité de la matrice symétrique complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Correction.

1. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, on a $A = PD{}^tP$ où

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $\begin{vmatrix} X-i & -1 \\ -1 & X+i \end{vmatrix} = X^2$. Par suite la matrice est nilpotente non nulle donc elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 7. *norme d'opérateur d'un endomorphisme autoadjoint positif*

On suppose $\dim(E) > 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $|||u|||$ la norme d'opérateur de u de $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même.

1. Montrer :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |(u(x)|y)| ,$$

puis, si $u \in \mathcal{S}(E)$:

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} |(u(x)|x)| .$$

2. Montrer que si $u \in \mathcal{S}(E)$, $|||u|||$ ou $-|||u|||$ est valeur propre de u et qu'il s'agit de la plus grande en valeur absolue.

Correction.

1. On note S la sphère unité de E et $A = \{|(u(x)|y)| \mid x, y \in S\}$ et $B = \{|(u(x)|x)| \mid x \in S\}$.
   On a, pour tout $x, y \in S$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$|(u(x)|y)| \leq \underbrace{\|u(x)\|}_{\leq \|\|u\|\|.\|x\|} .\|y\| = \|\|u\|\|$$
   Ainsi A est non vide (car S est non vide - ici $\dim(E) > 0$) et majoré par $\|\|u\|\|$ donc $\sup(A)$ existe et vérifie $\sup(A) \leq \|\|u\|\|$.
   Notons $a = \sup(A)$. On a, pour tous $x, y \in E$:
   $$|(u(x)|y)| \leq a\|x\|.\|y\|. \quad (*)$$
   En effet, si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité est vérifié (c'est même une égalité) et sinon, on pose $x' = \frac{x}{\|x\|} \in S$ et $y' = \frac{y}{\|y\|} \in S$, et ainsi :
   $$|(u(x)|y)| = \|x\|.\|y\|.|(u(x')|y')| \leq a\|x\|.\|y\|$$
   Par suite, on a, pour $x \in E$, en posant $y = u(x) \in E$:
   $$\|u(x)\|^2 = (u(x)|y) \leq a\|x\|.\|y\| = a\|u(x)\|.\|x\|$$
   D'où, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:
   $$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq a$$
   (le cas $u(x) = 0_E$ étant immédiatement vérifié). Ainsi, on a $\|\|u\|\| \leq a$.
   Il en résulte que $\|\|u\|\| = \sup(A)$.

   On a $B \subset A$ et B non vide car S est non vide, donc $b = \sup(B)$ existe et $b \leq a$.
   De plus, on remarque que pour tous $x, y \in E$, comme $u^* = u$:
   $$(u(x \pm y)|x \pm y) = (u(x)|x) \pm 2(u(x)|y) + (u(y)|y).$$
   et, par un raisonnement similaire à celui décrit pour établir $(*)$, on a, pour tout $z \in E$,
   $$(u(z)|z) \leq b\|z\|^2,$$
   Ainsi, pour tous $x, y \in S$:
   $$\begin{array}{rcl} |(u(x)|y)| & = & \frac{1}{4}\,|(u(x+y)|x+y) - (u(x-y)|x-y)| \\ & \leq & \frac{1}{4}(|(u(x+y)|x+y)| + |(u(x-y)|x-y)|) \\ & \leq & \frac{b}{4}\underbrace{(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)}_{=2\|x\|^2+2\|y\|^2=4} \end{array}$$
   $$|(u(x)|y)| \leq b.$$
   Par suite, $a \leq b$. Et donc $b = a$.

   Il en résulte que $\|\|u\|\| = b = a$.

2. Comme u est autoadjoint, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.
   Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note λ_i la valeur propre à laquelle e_i est associée.

On peut reformuler l'assertion à démontrer par :

$$|||u||| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

Comme $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ est un ensemble fini non vide, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.
Soit $x \in S$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $x_i = (x|e_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\| = 1$.De plus, on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ car chaque e_i est vecteur propre associé à λ_i.
Par suite, $\mathcal{B}$ étant orthonormale, on a :

$$|(u(x)|x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \underbrace{|\lambda_i|}_{\leq |\lambda_{i_0}|} \leq |\lambda_{i_0}|.$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a $|||u||| \leq |\lambda_{i_0}|$.
De plus, on a, $e_{i_0} \in S$ et :

$$|(u(e_{i_0})|e_{i_0})| = |\lambda_{i_0}|.|(e_{i_0}|e_{i_0})| = |\lambda_{i_0}|$$

Donc $|||u||| = |\lambda_{i_0}| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.
Il en résulte que $\lambda_{i_0} = \pm|||u|||$ est valeur propre de u et il s'agit de la plus grande en valeur absolue.

3. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

a. Définitions

Définition 13.

Soit $u \in O(E)$. On dit que u est un endomorphisme autoadjoint :
- **positif** si, pour tout $x \in E$,
$$(u(x)|x) \geq 0;$$
- **défini positif** si, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$,
$$(u(x)|x) > 0.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Définition 14.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est matrice symétrique :
- **positive** si, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,
$${}^tXAX \geq 0;$$
- **définie positive** si, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$,
$${}^tXAX > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives définies positives.

b. Propriétés

Proposition 33.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
- On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- On a $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

De même dans le cas matriciel.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et x vecteur propre associé à λ, on a, comme $x \neq 0$:

$$(u(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \underbrace{(x|x)}_{>0}$$

donc $(u(x)|x)$ et λ sont de même signe.
On obtient alors les deux implications directes de la proposition.
a $\square$

c. Exercices

Exercice 8. *Caractérisation des produits scalaires sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$*

On pose $E = M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E si, et seulement si, il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$:

$$\varphi(X, Y) = {}^tXAY$$

Correction.

($\Rightarrow$) On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$, $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$.

1ère façon : sans rien remarquer ;)

Pour tous $X, Y, Z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- On remarque que pour tout $m \in \mathbb{R} = M_{1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tm = m$ d'où, par symétrie de A :

$$\varphi(X, Y) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(Y, X)$$

  donc φ est symétrique.
- On a, par linéarité du passage à la transposée et par distributivité du produit matriciel :

$$\varphi(\lambda X + Y, Z) = {}^t\lambda X + YAZ = \lambda{}^tXAZ + {}^YAZ = \lambda\varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z)$$

donc φ est linéaire par rapport à sa première variable, et ainsi, pas symétrie de φ, φ est bilinéaire.
- On remarque que $\varphi(X,X) = {}^tXAX$ donc, par positivité de A, $\varphi(X,X) \geq 0$ et par définie positivité de A, si $X \neq 0$, $\varphi(X,X) > 0$. Or on a $\varphi(0,0) = 0$, donc si $\varphi(X,X) = 0$ alors $X = 0$.

2ème façon : en remarquant que $\varphi(X,Y) = < X, AY >$ où $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire canonique et en utilisant le fait que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (ce qui revient quasiment à faire la 1ère façon !).

De toutes ces façons, il en résulte que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. un produit scalaire.

($\Leftarrow$) On suppose que φ est un produit scalaire. On montre tout d'abord le résultat suivant :

> Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
> Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :
> $$m_{ij} = {}^tE_iME_j$$
> *Démonstration :* On a, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:
> $${}^tE_iME_j = {}^tE_i \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} = m_{ij}.$$

Montrons qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que, pour tous $X, Y \in E$, $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$.

On considère $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de E et on pose, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = \varphi(E_i, E_j)$ puis $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Par suite, on a, pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in E$, $X = \sum_{i=1}^n x_iE_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n y_iE_i$ et donc, par bilinéarité de φ :

$$\varphi(X,Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j \underbrace{\varphi(E_i, E_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right)}_{=(AY)_i} = {}^tXAY.$$

Il reste à montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- On a, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, par symétrie de φ :
$$a_{ji} = \varphi(E_j, E_i) = \varphi(E_i, E_j) = a_{ij}$$
donc ${}^tA = A$ i.e. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- On a, pour tout $X \in E$ tel que $X \neq 0$, par définie positivité de φ :
$${}^tXAX = \varphi(X,X) > 0$$

Par suite, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'où l'existence recherchée.

Exercice 9. *Racine carrée d'une matrice symétrique positive*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = A$.
2. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^+ + (\mathbb{R})$. Montrer que $\{R \in M_n(\mathbb{R}) \mid R^2 = A\}$ est fini et déterminer son cardinal.
3. Si on suppose seulement $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, A a-t-elle un nombre fini de racines ?

Correction.

1. Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, A est orthogonalement diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Ainsi, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$.
On note $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, ..., \sqrt{\alpha_n})$ et $R = PD'^tP$. Alors on a :
$$R^2 = PD'^tPPD'^tP = PD'^{2t}P = PD^tP = A.$$

2. Reamrquons tout d'abord deux faits :
   — On note $\alpha_1, ..., \alpha_k$ les valeurs propres distinctes de A. Alors, comme $A \in \mathcal{S}_n^+ + (\mathbb{R})$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{R}_+^*$.
   — Considérons le polynôme minimal π_A de A. Alors $\pi_A = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_k)$ car A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

   Soit R tel que $R^2 = A$. On pose $Q = \pi_A(X^2)$. Alors :
$$Q = \prod_{i=1}^{n} (X^2 - \alpha_k) = \prod_{i=1}^{n} (X - \sqrt{\alpha_k})(X + \sqrt{\alpha_k})$$
   est un polynôme scindé à racines simples car les a_k étant tous différents, leurs racines le sont et comme les a_k sont non nuls, $\sqrt{\alpha_k} \neq -\sqrt{\alpha_k}$.
   De plus on a :
$$Q(R) = \pi_A(R^2) = \pi_A(A) = 0,$$
   donc R possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc R est diagonalisable. On remarque alors que R et A sont diagonalisables et commutent (on a $AR = R^3 = RA$) donc elle sont simultanément diagonalisables i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D, D' diagonales telles que :
$$A = PDP^{-1} \text{ et } R = PD'P^{-1}$$

> Prouvons ce résultat classique : pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, si M, N sont diagonalisables et commutent, alors elles sont simultanément diagonalisables.
>
> *Démonstration :* On suppose que $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent.
> Soit λ une valeur propre de u (qui en possède au moins une car u est diagonalisable). Comme v et $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ commutent, $F = E_\lambda(u)$ est stable par v. Ainsi, l'endomorphisme induit v_F par v sur F est diagonalisable car v l'est. Par suite, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$,
>
> $$v(x) = v_F(x) = \mu x$$
>
> Il en résulte que tout vecteur propre de u est une vecteur propre de v et vice-versa par un raisonnement analogue.
> Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base de E qui diagonalise u, alors $\mathcal{B}$ diagonalise v et réciproquement i.e. u et v sont diagonalisables dans une même base.
>
> Maintenant, pour $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables et qui commutent, on considère leurs endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés ; ceux-ci sont donc diagonalisables et commutent donc d'après ce qui précède, ils sont diagonalisables dans une même base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que M et N sont toutes deux semblables à des matrices diagonales avec la même matrice de passage : la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{B}$. Par suite, M et N sont simultanément diagonalisables.

On a donc :

$$D'^2 = D$$